Chapitre 9

Fonctions trigonométriques

9.1 Introduction historique

L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques.

Joseph Fourier - *Théorie analytique de la chaleur* (1822), Discours préliminaire

Vous avez rencontré le cosinus et le sinus en Première, comme des *nombres* associés à un angle. Ce chapitre franchit un pas décisif : nous les considérerons désormais comme des **fonctions** de la variable réelle, que l'on peut dériver, dont on peut étudier les variations et tracer les courbes. Ce changement de statut n'est pas une coquetterie de mathématicien : il est né d'un problème de physique très concret, celui de la corde vibrante.

9.1.1 La querelle des cordes vibrantes

En 1747, **Jean le Rond d'Alembert** établit l'équation qui régit les vibrations d'une corde de violon, et ouvre du même coup une controverse qui occupera les mathématiciens pendant un demi-siècle. **Euler** et **Daniel Bernoulli** s'y opposent sur une question de fond : toute forme initiale de la corde peut-elle se décomposer en une somme de vibrations sinusoïdales simples ? Bernoulli l'affirme, Euler en doute, et le débat achoppe sur ce que l'on entend au juste par « fonction ».

9.1.2 Fourier et les séries trigonométriques

La réponse vient d'un problème voisin. Étudiant la propagation de la chaleur, **Joseph Fourier** publie en 1822 sa *Théorie analytique de la chaleur*, où il affirme que toute fonction périodique peut s'écrire comme une somme, éventuellement infinie, de sinus et de cosinus. L'idée choque ses contemporains par sa généralité, mais elle se révèle d'une fécondité extraordinaire.

C'est elle qui permet aujourd'hui de compresser un son au format MP3, de filtrer une image, ou d'analyser un signal électrique : dans tous les cas, on décompose un phénomène compliqué en une superposition de fonctions sinusoïdales élémentaires. Ce chapitre étudie précisément ces fonctions élémentaires.



9.2 Les fonctions cosinus et sinus

9.2.1 Définitions et premières propriétés

Définition : À tout réel x correspond un unique point M du cercle trigonométrique, obtenu par enroulement de la droite numérique. On appelle :

- **fonction cosinus** la fonction $x \mapsto \cos(x)$, qui à x associe l'abscisse de M ;
- **fonction sinus** la fonction $x \mapsto \sin(x)$, qui à x associe l'ordonnée de M.

Ces deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Proposition 1 : Pour tout réel x et tout entier relatif k :

$$-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \quad ; \quad -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \quad ; \quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x) \quad ; \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$$

Définition : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et T un réel strictement positif.

- f est **périodique de période** T lorsque $f(x + T) = f(x)$ pour tout réel x.
- f est **paire** lorsque $f(-x) = f(x)$ pour tout réel x ; elle est **impaire** lorsque $f(-x) = -f(x)$.

Proposition 2 : Les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques de période** 2π. De plus, pour tout réel x :

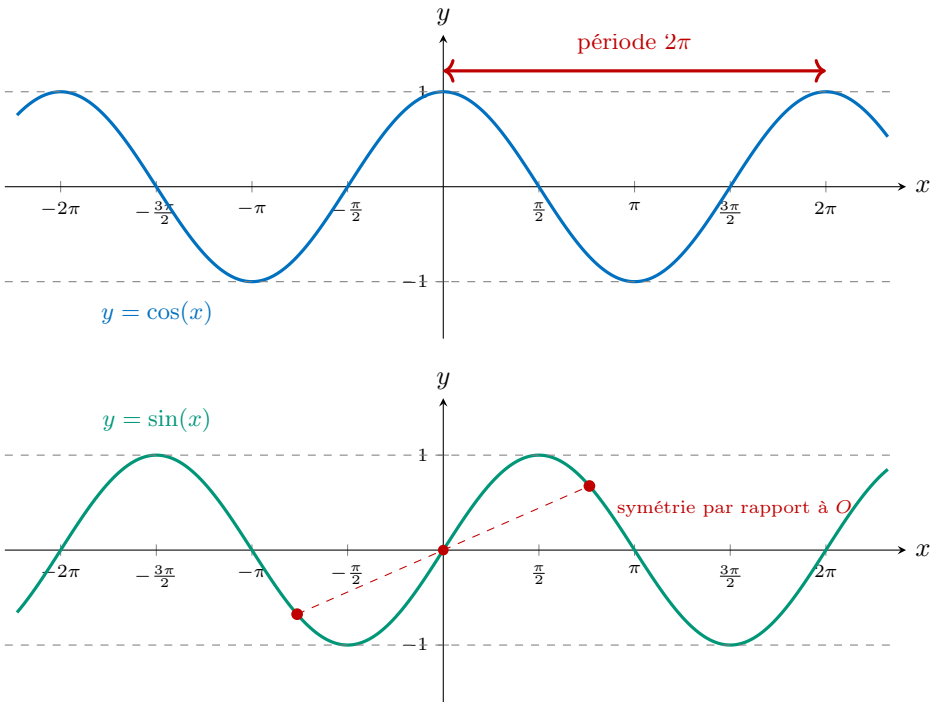
$$\cos(-x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(-x) = -\sin(x)$$

La fonction cosinus est donc **paire**, et la fonction sinus est **impaire**.

○ Démonstration : Vu en première. □

Remarque : Ces deux propriétés ont une traduction graphique immédiate, et ce sont elles qui permettront de réduire considérablement le travail d'étude en section 9.4 :

- la **périodicité** signifie que la courbe est invariante par translation de vecteur $2\pi\,\vec{\imath}$: il suffit donc de l'étudier sur un intervalle de longueur 2π, puis de la reproduire ;
- la **parité** du cosinus signifie que sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, et l'**imparité** du sinus que la sienne est symétrique par rapport à l'origine.



Sur la première courbe, le motif compris entre 0 et 2π se répète à l'identique de part et d'autre : c'est la périodicité. Sur la seconde, deux points d'abscisses opposées sont toujours symétriques par rapport à l'origine : c'est l'imparité.

9.2.2 Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

9.3 Dérivation

9.3.1 Une limite fondamentale

Proposition 3 : On a :

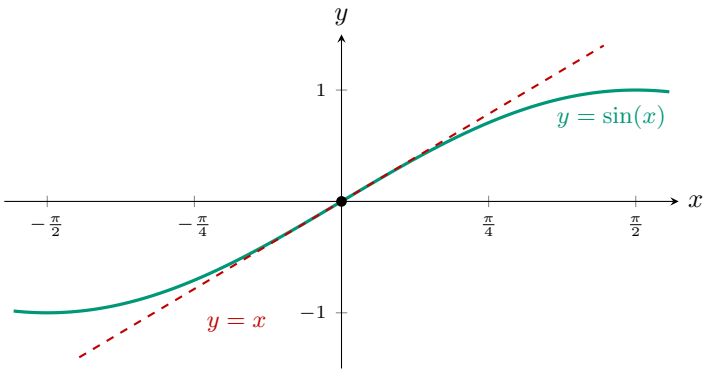
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=0$$

∘ Démonstration : Le premier quotient n'est autre que le taux de variation de la fonction sinus entre 0 et x :

$$\frac{\sin(x)}{x}=\frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}$$

Sa limite en 0 est donc, par définition, le nombre dérivé de la fonction sinus en 0. Nous admettons que ce nombre vaut 1 ; le raisonnement est identique pour le second quotient, qui donne le nombre dérivé du cosinus en 0. □

Remarque : Graphiquement, cette limite signifie que la courbe du sinus admet en 0 une tangente de coefficient directeur 1, c'est-à-dire la droite d'équation $y=x$. C'est la raison pour laquelle, en physique, on remplace couramment $\sin(x)$ par x pour les petits angles — approximation qui n'est légitime qu'en *radians*, et c'est là tout l'intérêt de cette unité.



Au voisinage de l'origine, les deux courbes sont pratiquement confondues : c'est la traduction visuelle de $\sin(x)\approx x$.

9.3.2 Dérivées

Théorème 1 : Dérivées des fonctions trigonométriques :
Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :

$$\sin'(x)=\cos(x) \qquad \text{et} \qquad \cos'(x)=-\sin(x)$$

∘ Démonstration : Calculons le taux de variation de la fonction sinus entre x et $x+h$, en utilisant la formule d'addition $\sin(x+h) = \sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h)$:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &= \frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h}\\ &= \sin(x)\times\underbrace{\frac{\cos(h)-1}{h}}_{\longrightarrow 0} + \cos(x)\times\underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\longrightarrow 1}\end{aligned}$$

D'après la proposition 3, ce taux tend vers $\sin(x)\times 0 + \cos(x)\times 1 = \cos(x)$ lorsque h tend vers 0. La fonction sinus est donc dérivable, de dérivée le cosinus. Le raisonnement est analogue pour le cosinus. □

Remarque : Le signe moins de la seconde formule s'oublie très facilement. Un moyen de le retrouver : en 0, la fonction cosinus atteint son maximum, donc sa dérivée y est nulle — ce qui est bien le cas de $-\sin(0) = 0$; et juste après 0, le cosinus *décroît*, donc sa dérivée doit être *négative*, ce qu'assure le signe moins.

Proposition 4 : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors :

$$\big(\sin(u)\big)' = u'\cos(u) \qquad \text{et} \qquad \big(\cos(u)\big)' = -u'\sin(u)$$

En particulier, pour tous réels a et b :

$$\big(\sin(ax+b)\big)' = a\cos(ax+b) \qquad \text{et} \qquad \big(\cos(ax+b)\big)' = -a\sin(ax+b)$$

∘ Démonstration : Ce sont des applications directes du théorème de dérivation d'une composée, établi au chapitre 3 : $(f\circ u)' = u'\times f'\circ u$. □

Exemple : Dérivons les fonctions suivantes :

$f(x) = \sin(3x-1)$	$f'(x) = 3\cos(3x-1)$
$g(x) = \cos\left(x^2\right)$	$g'(x) = -2x\sin\left(x^2\right)$
$h(x) = x\sin(x)$	$h'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$

La dernière utilise la dérivée d'un produit, et non celle d'une composée : il faut bien distinguer les deux situations.

9.4 Étude et représentation graphique

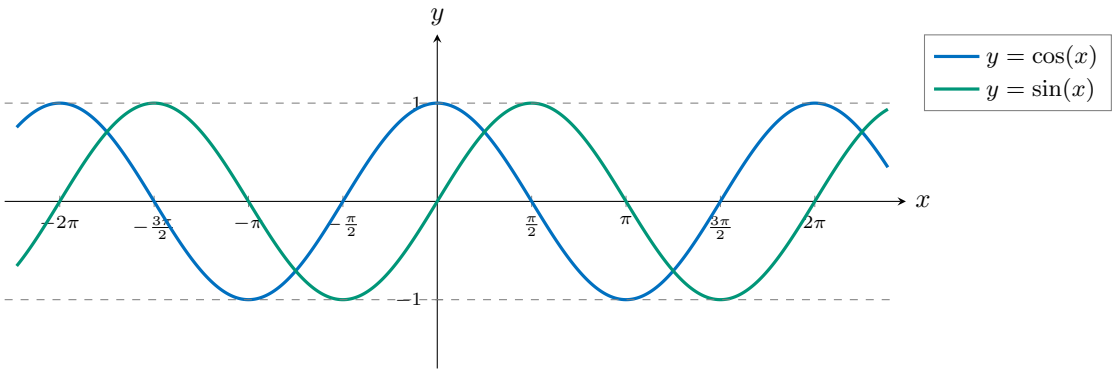
9.4.1 Les deux courbes de référence

Commençons par l'étude des deux fonctions elles-mêmes. Sur $[0\,;\pi]$, la dérivée du sinus est le cosinus, dont le signe est connu, et la dérivée du cosinus est $-\sin(x)$, négative sur tout l'intervalle. On en déduit les deux tableaux :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'(x) = \cos(x)$		$+$	0	$-$	
$\sin(x)$	0	↗	1	↘	0

x	0		π
$\cos'(x) = -\sin(x)$		$-$	
$\cos(x)$	1	↘	-1

En complétant par parité puis par périodicité, on obtient les courbes complètes sur $\mathbb{R}$:



Les deux courbes, appelées **sinusoïdes**, se déduisent l'une de l'autre par une translation de $\frac{\pi}{2}$ vers la droite : c'est la traduction graphique de l'identité $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$.

9.4.2 Méthode générale

♡ **Méthode :** Pour étudier une fonction trigonométrique quelconque, on exploite systématiquement ses symétries, ce qui réduit le travail :

1. La périodicité permet de se limiter à un intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi\,;\pi]$.

2. La parité permet de diviser encore cet intervalle par deux : il suffit d'étudier sur $[0\,;\pi]$, puis de compléter par symétrie.

3. On dresse le tableau de variations sur cet intervalle réduit, à l'aide du signe de la dérivée.

4. On trace la courbe sur $[0\,;\pi]$, on la complète par symétrie sur $[-\pi\,;\pi]$, puis par translations successives.

Exemple : Étudions la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sin(x) + \sin(2x)$.

(a) Réduction de l'intervalle d'étude. Les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \sin(2x)$ étant 2π-périodiques, f l'est également : il suffit donc de l'étudier sur $[-\pi\,;\pi]$. De plus, pour tout réel x :

$$f(-x) = 2\sin(-x) + \sin(-2x) = -2\sin(x) - \sin(2x) = -f(x)$$

La fonction f est donc *impaire*, et il suffit de l'étudier sur $[0\,;\pi]$, la courbe se complétant ensuite par symétrie par rapport à l'origine.

(b) Dérivée. La proposition 4 donne :

$$f'(x) = 2\cos(x) + 2\cos(2x)$$

Pour en déterminer le signe, on utilise l'identité $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, puis on factorise :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\cos(x) + 2\big(2\cos^2(x) - 1\big) \\ &= 4\cos^2(x) + 2\cos(x) - 2 \\ &= 2\big(2\cos(x) - 1\big)\big(\cos(x) + 1\big) \end{aligned}$$

ce que l'on vérifie en développant le produit obtenu.

(c) Signe de la dérivée sur $[0\,;\pi]$. Le facteur $\cos(x) + 1$ est toujours positif, et ne s'annule qu'en π. Le facteur $2\cos(x) - 1$ est positif lorsque $\cos(x) > \frac{1}{2}$, c'est-à-dire pour $x < \frac{\pi}{3}$. D'où le tableau :

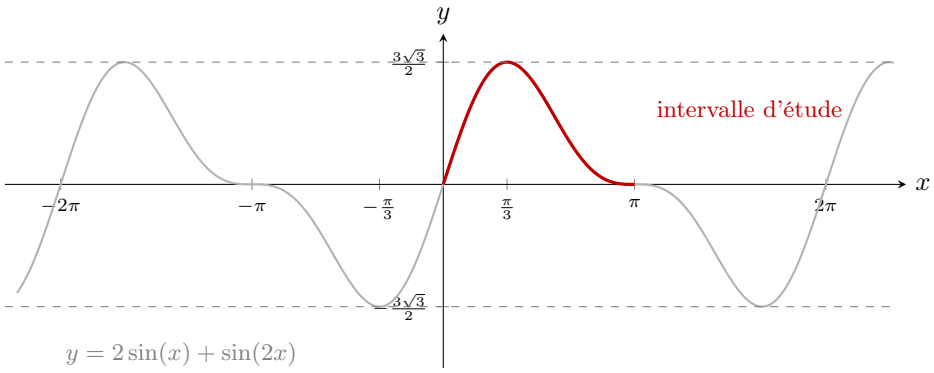
x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$2\cos(x) - 1$		$+$	0	$-$	
$\cos(x) + 1$		$+$		$+$	0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0

(d) Variations. On en déduit que f croît sur $\left[0\,;\frac{\pi}{3}\right]$ puis décroît sur $\left[\frac{\pi}{3}\,;\pi\right]$. Les valeurs aux bornes valent $f(0)=0$, $f(\pi)=0$, et le maximum :

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}60$$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0

Remarque : On n'a donc étudié la fonction que sur $[0\,;\pi]$, soit le quart de sa période, et la courbe complète s'en déduit entièrement : par symétrie autour de l'origine sur $[-\pi\,;\pi]$, puis par translations de vecteur $2\pi\,\vec{\imath}$. C'est tout l'intérêt de la méthode.



En rouge, la portion réellement étudiée ; en gris, tout le reste de la courbe, obtenu sans aucun calcul supplémentaire.