CORRIGÉ – CHAPITRE 1

ENSEMBLES ET LOGIQUE

Propositions et connecteurs

EXERCICE 1 ⋆

1. L'égalité $3+4=8$ peut être qualifiée de vraie ou de fausse : c'est une proposition. Or $3+4=7$, donc :

Proposition **Fausse**

2. L'écriture x^2-1 ne peut être ni vraie ni fausse.

Ce n'est pas une proposition, mais une expression.

3. Tout entier naturel est supérieur ou égal à 0 :

Proposition **Vraie**

4. Le cours démontre que $\sqrt{2}$ est irrationnel :

Proposition **Fausse**

5. « Soit n un entier naturel » introduit une notation ; on ne peut pas lui attribuer de valeur de vérité.

Ce n'est pas une proposition.

6. L'énoncé $n^2 \geqslant n$ dépend de n, qui n'est ici ni fixé ni quantifié : il est vrai pour $n=2$, faux pour $n=\frac{1}{2}$.

Ce n'est pas une proposition, mais un *prédicat* : une proposition dépendant d'une variable.

7. Le quantificateur fixe désormais le statut de n. Pour $n=0$ et $n=1$ on a $n^2=n$; pour $n \geqslant 2$, on a $n^2 = n \times n \geqslant n \times 1 = n$.

Proposition **Vraie**

8. On procède de la même manière, mais sur $\mathbb{R}$. Pour $x=\dfrac{1}{2}$:

$$x^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} = x$$

Proposition **Fausse**

Piège : les énoncés 6 et 7 diffèrent d'un seul mot. C'est le quantificateur qui transforme un prédicat en proposition ; sans lui, la question « est-ce vrai ? » n'a pas de sens.

EXERCICE 2 ⋆

On dresse les tables demandées, en y ajoutant les colonnes de $A \Rightarrow B$ et de $A \Leftrightarrow B$ nécessaires aux comparaisons. Les deux premières propositions donnent :

A	B	non A	non B	(non A) ou B	non(A et non B)	$A \Rightarrow B$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

puis les deux dernières :

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow A)$	$A \Leftrightarrow B$	A et (non A)
V	V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F
F	F	V	V	V	V	F

5. Les colonnes des questions 1 et 2 sont identiques à celle de $A \Rightarrow B$, et celle de la question 3 est identique à celle de $A \Leftrightarrow B$:

$$\boxed{\begin{array}{l}(A \Rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; (\text{(non } A\text{) ou } B) \;\Leftrightarrow\; \text{non}(A \text{ et non } B) \\ (A \Leftrightarrow B) \;\Leftrightarrow\; ((A \Rightarrow B) \text{ et } (B \Rightarrow A))\end{array}}$$

La seconde équivalence justifie le schéma de rédaction en deux temps donné dans le cours.

6. La colonne de A et (non A) ne contient que des F :

$$\boxed{\text{Cette proposition est fausse quelles que soient les valeurs de vérité de } A.}$$

Une proposition toujours fausse est appelée une *contradiction* ; une proposition toujours vraie, comme A ou (non A), est appelée une *tautologie*.

EXERCICE 3 ⋆

On applique les lois de De Morgan : la négation échange le « et » et le « ou », et nie chacun des deux membres.

1. $\boxed{x < 0 \text{ ou } y \geqslant 1}$ **2.** $\boxed{n \text{ est impair et } n \text{ n'est pas premier}}$

3. $\boxed{a \text{ est irrationnel ou } a \leqslant 0}$ **4.** $\boxed{x < 0 \text{ ou } x > 1}$

5. $\boxed{n \text{ n'est pas divisible par 2 ou } n \text{ n'est pas divisible par 3}}$

6. $\boxed{(u_n) \text{ n'est pas croissante et n'est pas majorée}}$

Piège : la négation de « $x \geqslant 0$ » est « $x < 0$ », et non « $x \leqslant 0$ ». De même, la négation de « $x \in [0\,;1]$ » n'est pas « $x \in]0\,;1[$ ».

EXERCICE 4 ⋆⋆

1. On dresse la table de vérité :

A	B	non A	non B	(non A) ou B	$A \Rightarrow B$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Les deux dernières colonnes coïncident, donc :

$$\boxed{(A \Rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; ((\text{non } A) \text{ ou } B)}$$

2. On nie les deux membres de l'équivalence précédente, puis on applique De Morgan :

$$\text{non}(A \Rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; \text{non}\big((\text{non } A) \text{ ou } B\big) \;\Leftrightarrow\; (\text{non}(\text{non } A)) \text{ et } (\text{non } B)$$

Comme non(non A) équivaut à A :

$$\boxed{\text{non}(A \Rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; (A \text{ et } (\text{non } B))}$$

3. La vérification est immédiate sur la table :

A	B	$A \Rightarrow B$	non$(A \Rightarrow B)$	A et (non B)
V	V	V	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	F	F

4. On applique la question 2 avec A : « $x > 2$ » et B : « $x^2 > 4$ » :

$$\boxed{x > 2 \;\text{ et }\; x^2 \leqslant 4}$$

Piège : la négation d'une implication n'est *pas* une implication. Écrire « si $x > 2$ alors $x^2 \leqslant 4$ » serait une faute de logique.

5. Soit x un réel tel que $x > 2$. La fonction carré étant strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, on obtient $x^2 > 2^2 = 4$, ce qui contredit $x^2 \leqslant 4$.

$$\boxed{\text{La négation est fausse pour tout réel } x, \text{ donc l'implication de départ est vraie pour tout réel } x.}$$

C'est la méthode générale : montrer qu'une implication est vraie, c'est montrer que « A et non B » est impossible.

Implication et équivalence

EXERCICE 5 ⋆

Lorsque $A \Rightarrow B$ est vraie, A est une condition *suffisante* pour B, et B une condition *nécessaire* pour A.

1. L'implication est vraie, donc :

Être multiple de 6 est suffisant pour être multiple de 3.
Être multiple de 3 est nécessaire pour être multiple de 6.

Réciproque **Fausse** : 3 est multiple de 3 mais pas de 6.

2. On applique les deux définitions :

$x = 2$ est suffisant pour $x^2 = 4$.
$x^2 = 4$ est nécessaire pour $x = 2$.

Réciproque **Fausse** : $x = -2$ vérifie $x^2 = 4$ sans valoir 2.

3. On applique les deux définitions :

Être un carré est suffisant pour être un losange.
Être un losange est nécessaire pour être un carré.

Réciproque **Fausse** : un losange dont les diagonales sont de longueurs différentes n'est pas un carré.

4. On applique les deux définitions :

$x > 0$ est suffisant pour $x \geqslant 0$.
$x \geqslant 0$ est nécessaire pour $x > 0$.

Réciproque **Fausse** : $x = 0$ vérifie $x \geqslant 0$ mais pas $x > 0$.

5. On applique les deux définitions :

Être pair est suffisant pour avoir un carré pair.
Avoir un carré pair est nécessaire pour être pair.

Réciproque **Vraie** : c'est le résultat démontré à la question 1 de l'exercice 8.

EXERCICE 6 ⋆

La réciproque de $A \Rightarrow B$ est $B \Rightarrow A$; sa contraposée est (non B) $\Rightarrow$ (non A).

1. On échange et on nie les deux membres :

Réciproque : si n est pair, alors n est un multiple de 4.
Contraposée : si n est impair, alors n n'est pas un multiple de 4.

L'implication est **Vraie** ; la réciproque est **Fausse**, comme le montre $n = 6$.

2. On procède de la même manière :

Réciproque : si $x^2 \geqslant 4$, alors $x \geqslant 2$.
Contraposée : si $x^2 < 4$, alors $x < 2$.

L'implication est **Vraie** ; la réciproque est **Fausse**, comme le montre $x = -3$.

3. On procède de la même manière :

Réciproque : si n est impair, alors n est premier et $n > 2$.
Contraposée : si n est pair, alors n n'est pas premier ou $n \leqslant 2$.

L'implication est **Vraie** ; la réciproque est **Fausse**, comme le montre $n = 9$.

Piège : la contraposée nie *les deux* membres et les échange. Nier « n premier et $n > 2$ » donne bien un « ou », d'après les lois de De Morgan.

4. On procède de la même manière :

Réciproque : si $x + y$ est rationnel, alors x et y sont rationnels.
Contraposée : si $x + y$ est irrationnel, alors x ou y est irrationnel.

L'implication est **Vraie**(question 1 de l'exercice 12) ; la réciproque est **Fausse** : $x = \sqrt{2}$ et $y = -\sqrt{2}$ sont irrationnels et $x + y = 0$ est rationnel.

EXERCICE 7 ⋆⋆

1. *Montrons que* $x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow (x = 0 \text{ et } y = 0)$. Supposons $x^2 + y^2 = 0$. Alors $x^2 = -y^2$. Or $x^2 \geqslant 0$ et $-y^2 \leqslant 0$, donc $x^2 = 0$, c'est-à-dire $x = 0$. On en déduit $y^2 = 0$, donc $y = 0$.

Réciproquement, montrons que $(x = 0 \text{ et } y = 0) \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$. Si $x = 0$ et $y = 0$, alors $x^2 + y^2 = 0 + 0 = 0$.

$$\boxed{x^2 + y^2 = 0 \iff (x = 0 \text{ et } y = 0)}$$

2. *Montrons le sens direct.* Supposons $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. En développant le membre de gauche :

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 \quad \text{donc} \quad 2ab = 0 \quad \text{donc} \quad ab = 0$$

Réciproquement, si $ab = 0$, alors $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2$.

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + b^2 \iff ab = 0}$$

3. *Montrons que* $|x| \leqslant 3 \Rightarrow -3 \leqslant x \leqslant 3$. Supposons $|x| \leqslant 3$. Si $x \geqslant 0$, alors $x = |x| \leqslant 3$ et $x \geqslant 0 > -3$. Si $x < 0$, alors $-x = |x| \leqslant 3$, donc $x \geqslant -3$, et $x < 0 \leqslant 3$. Dans les deux cas, $-3 \leqslant x \leqslant 3$.

Réciproquement, supposons $-3 \leqslant x \leqslant 3$. Si $x \geqslant 0$, alors $|x| = x \leqslant 3$. Sinon $|x| = -x \leqslant 3$ puisque $x \geqslant -3$.

$$\boxed{|x| \leqslant 3 \iff -3 \leqslant x \leqslant 3}$$

Modes de raisonnement

EXERCICE 8 ⋆

1. La contraposée s'énonce : *si n est impair, alors n^2 est impair.* Démontrons-la. Supposons n impair : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. Alors :

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Comme $2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$, l'entier n^2 est impair. La contraposée étant établie :

Si n^2 est pair, alors n est pair.

2. La contraposée s'énonce : *si $a < 1$ et $b < 1$, alors $a + b < 2$*, la négation de « $a \geqslant 1$ ou $b \geqslant 1$ » étant un « et » d'après De Morgan. En additionnant membre à membre les inégalités strictes $a < 1$ et $b < 1$, on obtient $a + b < 2$.

Si $a + b \geqslant 2$, alors $a \geqslant 1$ ou $b \geqslant 1$.

3. La contraposée s'énonce : *si n est impair, alors n^2-1 est divisible par* 8. Supposons $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$n^2 - 1 = (n-1)(n+1) = 2k \times (2k+2) = 4k(k+1)$$

Or, parmi les deux entiers consécutifs k et $k+1$, l'un est pair : le produit $k(k+1)$ s'écrit donc $2m$ avec $m \in \mathbb{Z}$, d'où $n^2 - 1 = 8m$.

$$\boxed{\text{Si } n^2-1 \text{ n'est pas divisible par 8, alors } n \text{ est pair.}}$$

EXERCICE 9 ⋆⋆

1. Supposons par l'absurde que $\sqrt{3}$ soit rationnel. On peut alors écrire :

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q} \quad \text{avec} \quad p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^* \text{ sans facteur commun}$$

En élevant au carré, il vient $3q^2 = p^2$. Ainsi 3 divise p^2, donc 3 divise p d'après le résultat admis, et $p = 3p'$ avec $p' \in \mathbb{Z}$. En reportant :

$$3q^2 = 9p'^2 \quad \text{d'où} \quad q^2 = 3p'^2$$

Donc 3 divise q^2, puis 3 divise q. Mais alors p et q admettent 3 comme facteur commun, ce qui contredit le choix de p et q.

$$\boxed{\sqrt{3} \text{ est irrationnel.}}$$

2. On remarque que $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$. Supposons par l'absurde $\sqrt{8}$ rationnel. Alors :

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{8}}{2}$$

serait le quotient de deux rationnels, donc un rationnel, ce qui contredit l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

$$\boxed{\sqrt{8} \text{ est irrationnel.}}$$

3. La démonstration de la question 1 reposerait sur l'implication *si* 4 *divise* p^2*, alors* 4 *divise* p.

$$\boxed{\text{Cette implication est fausse : } p = 2 \text{ vérifie } 4 \mid p^2 = 4 \text{ sans que } 4 \mid 2.}$$

Le raisonnement s'arrête donc dès la troisième ligne — et heureusement, puisque $\sqrt{4} = 2$ est rationnel.

EXERCICE 10 ⋆⋆

1. Les carrés d'entiers naturels inférieurs à 3 sont 0 et 1, et les sommes possibles sont 0, 1 et 2. Prenons $n = 3$:

$$\boxed{n = 3 \text{ n'est pas somme de deux carrés d'entiers naturels.}}$$

2. Prenons $x = y = 1$:

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \approx 1{,}414 \qquad \text{et} \qquad 1 + 1 = 2$$

$$\boxed{x = y = 1 \text{ convient.}}$$

3. Prenons $x = 1$: on a $x^2 = 1$, qui n'est pas strictement supérieur à 1.

$$\boxed{x = 1 \text{ convient (ou tout } x \text{ de } [0\,;1]).}$$

4. Prenons $n = 4$: il est divisible par 2 et par 4, mais $4 = 8 \times 0{,}5$ n'est pas un multiple de 8.

$$\boxed{n = 4 \text{ convient.}}$$

5. Prenons $a = 1$ et $b = -1$:

$$|a+b| = |0| = 0 \qquad \text{et} \qquad |a| + |b| = 1 + 1 = 2$$

$$\boxed{a = 1 \text{ et } b = -1 \text{ conviennent.}}$$

6. Le plus petit nombre premier est pair :

$$\boxed{2 \text{ est premier et pair.}}$$

7. Prenons $n = 41$:

$$41^2 + 41 + 41 = 41 \times (41 + 1 + 1) = 41 \times 43 = 1\,763$$

$$\boxed{n = 41 \text{ convient : } 1\,763 \text{ n'est pas premier.}}$$

Cet exemple mérite d'être médité : $n^2 + n + 41$ est premier pour *toutes* les valeurs de n de 0 à 40. Quarante-et-un exemples successifs ne démontrent rien, alors qu'un seul contre-exemple suffit à conclure — c'est exactement l'asymétrie signalée par le cours.

EXERCICE 11 ⋆⋆

1. Supposons par l'absurde que $x \neq 0$. Comme $x \geqslant 0$, on a donc $x > 0$. Posons $\varepsilon = \dfrac{x}{2}$, qui est un réel strictement positif. L'hypothèse appliquée à ce ε donne :

$$x \leqslant \frac{x}{2} \quad \text{donc} \quad \frac{x}{2} \leqslant 0 \quad \text{donc} \quad x \leqslant 0$$

ce qui contredit $x > 0$. L'hypothèse $x \neq 0$ est donc fausse.

$$\boxed{x = 0}$$

On remarque que le réel $\varepsilon = \frac{x}{2}$ est exactement celui qu'utilise le cours dans la démonstration par contraposée : les deux rédactions manipulent les mêmes objets, seule leur mise en scène diffère.

2. Prenons $x = -1$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a $-1 < 0 < \varepsilon$, donc $x \leqslant \varepsilon$; pourtant $x \neq 0$.

$$\boxed{x = -1 \text{ convient : l'hypothèse } x \geqslant 0 \text{ est indispensable.}}$$

3. Prenons $x = 1$ et $\varepsilon = 2$: il existe bien un réel $\varepsilon > 0$ tel que $x \leqslant \varepsilon$, et $x \neq 0$.

$$\boxed{\text{Non, le résultat tombe en défaut.}}$$

C'est le « pour tout » qui porte toute la force de l'hypothèse : il oblige x à être plus petit que des réels arbitrairement proches de 0.

EXERCICE 12 ⋆⋆⋆

1. Soient r et r' deux rationnels : il existe $p, p' \in \mathbb{Z}$ et $q, q' \in \mathbb{N}^*$ tels que $r = \dfrac{p}{q}$ et $r' = \dfrac{p'}{q'}$. Alors :

$$r + r' = \frac{pq' + p'q}{qq'} \qquad \text{et} \qquad rr' = \frac{pp'}{qq'}$$

Les numérateurs sont entiers et les dénominateurs sont des entiers naturels non nuls.

$$\boxed{\text{La somme et le produit de deux rationnels sont rationnels.}}$$

2. Supposons par l'absurde que $r + x$ soit rationnel, et notons $s = r + x \in \mathbb{Q}$. Alors :

$$x = s - r$$

est la somme des deux rationnels s et $-r$, donc un rationnel d'après la question 1 : cela contredit l'irrationalité de x.

$$\boxed{r+x \text{ est irrationnel.}}$$

3. On procède de la même manière. Supposons $rx = s$ avec $s \in \mathbb{Q}$. Comme $r \neq 0$, on peut écrire :

$$x = \frac{s}{r}$$

qui est le produit des rationnels s et $\dfrac{1}{r}$, donc un rationnel : contradiction.

$$\boxed{rx \text{ est irrationnel.}}$$

4. Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel, et $-\sqrt{2}$ l'est aussi d'après la question 3 appliquée à $r = -1$. Or :

$$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{Q} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$$

$$\boxed{\text{Non : ni la somme ni le produit de deux irrationnels ne sont nécessairement irrationnels.}}$$

5. Si $r = 0$, alors $rx = 0$, qui est rationnel quel que soit x.

$$\boxed{\text{L'énoncé serait faux sans l'hypothèse } r \neq 0.}$$

On retiendra la structure commune aux questions 2 et 3 : l'ensemble $\mathbb{Q}$ est stable par somme et par produit, ce qui permet de « revenir en arrière » et d'obtenir la contradiction.

Ensembles et quantificateurs

EXERCICE 13 ⋆

1. On énumère les éléments :

(a) $\boxed{\{-3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\}}$ **(b)** $\boxed{\{1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4\,;\ 6\,;\ 12\}}$

(c) $\boxed{\{-\sqrt{2}\,;\ \sqrt{2}\}}$ **(d)** $\boxed{\varnothing}$

Le cas **(d)** n'est autre que l'irrationalité de $\sqrt{2}$: aucun rationnel n'a pour carré 2.

2. On donne une propriété caractéristique :

(a) $\boxed{\{n^2 \mid n \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leqslant n \leqslant 5\}}$ **(b)** $\boxed{\{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z},\ n = 2k\}}$

(c) $\boxed{\{x \in \mathbb{R} \mid |x-3| \leqslant 1\} = [2\,;4]}$

EXERCICE 14 ⋆

Le symbole $\in$ relie un élément à un ensemble, le symbole $\subset$ relie deux ensembles. Les éléments de E sont 1, 2, $\{3\}$ et $\{1\,;2\}$.

1. $\boxed{1 \in E \text{ seulement}}$ **2.** $\boxed{\{1\} \subset E \text{ seulement}}$ **3.** $\boxed{3 : \text{aucune des deux}}$

4. $\boxed{\{3\} \in E \text{ seulement}}$ **5.** $\boxed{\{1\,;2\} \in E \ \text{ et } \ \{1\,;2\} \subset E}$

6. $\boxed{\varnothing \subset E \text{ seulement}}$ **7.** $\boxed{\{\{3\}\} \subset E \text{ seulement}}$ **8.** $\boxed{\{2\,;\{3\}\} \subset E \text{ seulement}}$

Justifions les cas délicats.

- **3.** L'entier 3 n'est pas un élément de E : seul l'ensemble $\{3\}$ l'est. Et 3 n'étant pas un ensemble, l'écriture $3 \subset E$ n'a pas de sens.
- **4.** On a $\{3\} \in E$ puisque $\{3\}$ figure dans la liste. En revanche $\{3\} \subset E$ signifierait $3 \in E$, ce qui est faux.
- **5.** L'ensemble $\{1\,;2\}$ figure dans la liste, donc $\{1\,;2\} \in E$; et comme $1 \in E$ et $2 \in E$, on a aussi $\{1\,;2\} \subset E$. **Les deux relations sont vraies simultanément**, ce qui montre qu'elles sont indépendantes l'une de l'autre.
- **6.** L'ensemble vide est inclus dans tout ensemble, mais il ne figure pas dans la liste des éléments de E.
- **7.** On a $\{\{3\}\} \subset E$ car son unique élément, $\{3\}$, appartient à E.

EXERCICE 15 ⋆

1. Pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2 + 1 \geqslant 1 > 0$: **Vraie**

2. D'après ce qui précède, $x^2 + 1 \geqslant 1$ ne s'annule jamais : **Fausse**

3. L'entier $n = 0$ appartient à $\mathbb{N}$ et vérifie $n < 1$: **Fausse**

4. Prenons $n = 0$: tout entier naturel m vérifie $0 \leqslant m$: **Vraie**

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y = -x$: alors $x + y = 0$: **Vraie**

6. Supposons qu'un tel y existe. Appliqué à $x = 0$, il donne $y = 0$; appliqué à $x = 1$, il donne $y = -1$. C'est contradictoire : **Fausse**

7. Soit x un réel non nul. Posons $y = \dfrac{1}{x}$: alors $xy = 1$: **Vraie**

8. C'est l'irrationalité de $\sqrt{2}$, démontrée dans le cours : **Fausse**

Piège : les propositions 5 et 6 ne diffèrent que par l'ordre des quantificateurs, et n'ont pourtant pas la même valeur de vérité. Dans la cinquième, y peut dépendre de x ; dans la sixième, un même y devrait convenir pour tous les x.

EXERCICE 16 ⋆⋆

On applique la propriété 2 du cours : nier échange $\forall$ et $\exists$, et fait descendre la négation sur la proposition finale.

1. $\boxed{\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < x}$ **2.** $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 \neq 2}$

3. $\boxed{\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y \leqslant x}$ **4.** $\boxed{\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n > M}$

5. $\boxed{\exists x \in E,\ (P(x) \text{ et non } Q(x))}$

6. $\boxed{\exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N,\ |u_n - \ell| > \varepsilon}$

La question 5 utilise la négation d'une implication établie à l'exercice 4 : $\text{non}(P \Rightarrow Q)$ équivaut à P et non Q.

La question 6 est la négation de « la suite (u_n) converge vers ℓ ». On observera que les quantificateurs se renversent *tous*, dans l'ordre où ils apparaissent, et que seule l'inégalité finale est niée. C'est le mécanisme le plus important du chapitre.

EXERCICE 17 ⋆⋆

1. Dire que f est majorée, c'est dire qu'il existe un réel qui majore *toutes* les valeurs de f :

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ majorée} : \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M \\ \text{Négation} : \forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > M \end{array}}$$

2. La proposition porte sur *toutes* les valeurs de f :

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ ne s'annule jamais} : \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0 \\ \text{Négation} : \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0 \end{array}}$$

3. La proposition porte au contraire sur *une* valeur de f :

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ n'est pas la fonction nulle} : \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0 \\ \text{Négation} : \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0 \end{array}}$$

Piège : les propositions 2 et 3 sont souvent confondues, alors qu'elles sont la négation l'une de l'autre. « Ne s'annule jamais » porte un $\forall$, « n'est pas la fonction nulle » porte un $\exists$.

4. Chaque entier naturel doit être atteint, par un antécédent qui peut dépendre de lui :

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ atteint toutes les valeurs de } \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = n \\ \text{Négation} : \exists n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq n \end{array}}$$

5. La fonction f est impaire lorsque $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)$. Sa négation donne :

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ n'est pas impaire} : \exists x \in \mathbb{R},\ f(-x) \neq -f(x) \\ \text{Négation} : \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x) \end{array}}$$

6. Dire que f admet un minimum, c'est dire qu'il existe un réel a en lequel f prend une valeur inférieure à toutes les autres :

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ n'admet aucun minimum} : \forall a \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) < f(a) \\ \text{Négation} : \exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(a) \leqslant f(x) \end{array}}$$

Piège : le minimum doit être *atteint*. Écrire $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, m \leqslant f(x)$ traduirait « f est minorée », ce qui est plus faible : la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est minorée par 0 sans admettre de minimum.

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y = -x$: alors $x + y = 0$. La proposition est **Vraie**

(b) Supposons qu'un tel y convienne pour tous les x. Pour $x = 0$ il donnerait $y = 0$, pour $x = 1$ il donnerait $y = -1$: c'est impossible. La proposition est **Fausse**

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y = 0$: alors $xy = 0$. La proposition est **Vraie**

(b) Posons $y = 0$. Pour tout réel x, on a $xy = 0$. La proposition est **Vraie**

Ici, un *même* y convient pour tous les x : les deux propositions sont vraies. Avec la question 1, on dispose donc d'un exemple où elles diffèrent et d'un exemple où elles coïncident.

3. Supposons $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x\,;y)$, et notons y_0 un tel réel : on a donc $P(x\,;y_0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$. Le réel y_0 vérifie $P(x\,;y_0)$, donc il existe bien un réel y tel que $P(x\,;y)$. Ceci valant pour tout x :

$$\boxed{\Big(\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x\,;y)\Big) \implies \Big(\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ P(x\,;y)\Big)}$$

4. On conclut :

$$\boxed{\text{Dans } \forall x,\ \exists y,\ \text{le réel } y \text{ peut dépendre de } x,\ \text{alors que } \exists y,\ \forall x \text{ impose un même } y \text{ pour tous.}}$$

La question 1 le montre : le seul y possible est $y = -x$, qui change avec x.

Inclusion et égalité

EXERCICE 19 ⋆

1. Soit $n \in \mathcal{M}_{12}$: il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 12k$. Alors $n = 6 \times (2k)$ et $n = 4 \times (3k)$, avec $2k$ et $3k$ entiers. De même, si $n = 6k$, alors $n = 3 \times (2k)$.

$$\boxed{\mathcal{M}_{12} \subset \mathcal{M}_6 \quad ; \quad \mathcal{M}_{12} \subset \mathcal{M}_4 \quad ; \quad \mathcal{M}_6 \subset \mathcal{M}_3}$$

2. On exhibe un contre-exemple dans chaque sens : $6 \in \mathcal{M}_6$ mais $6 \notin \mathcal{M}_4$, et $4 \in \mathcal{M}_4$ mais $4 \notin \mathcal{M}_6$.

$$\boxed{\text{Aucune des deux inclusions n'est vraie.}}$$

3. Supposons $\mathcal{M}_k \subset \mathcal{M}_\ell$. Comme $k = k \times 1 \in \mathcal{M}_k$, on a $k \in \mathcal{M}_\ell$, donc ℓ divise k. Réciproquement, si $k = \ell m$ avec $m \in \mathbb{Z}$, alors tout $n = kq$ s'écrit $n = \ell(mq)$, donc $n \in \mathcal{M}_\ell$.

$$\boxed{\mathcal{M}_k \subset \mathcal{M}_\ell \iff \ell \text{ divise } k}$$

On notera l'inversion : plus k est grand au sens de la divisibilité, plus $\mathcal{M}_k$ est petit.

4. (a) **Vraie** : tout entier naturel est un entier relatif, tout entier relatif n s'écrit $\frac{n}{1}$, et tout rationnel est un réel.

(b) **Vraie** : si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $0 \leqslant x \leqslant 2$.

(c) **Vraie** : l'unique élément de $\{0\}$ est 0, qui appartient à $\mathbb{N}$.

(d) **Fausse** : 0 est un élément et non un ensemble ; il faut écrire $0 \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 20 ⋆⋆

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - 1| \leqslant 2$. Alors $-2 \leqslant x - 1 \leqslant 2$, d'où $-1 \leqslant x \leqslant 3$: donc $x \in [-1\,;3]$.

Réciproquement, soit $x \in [-1\,;3]$. Alors $-1 \leqslant x \leqslant 3$, d'où $-2 \leqslant x - 1 \leqslant 2$, c'est-à-dire $|x - 1| \leqslant 2$.

$$\boxed{\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| \leqslant 2\} = [-1\,;3]}$$

2. Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n^2 \leqslant 4$. Si $|n| \geqslant 3$, alors $n^2 \geqslant 9 > 4$: on a donc $|n| \leqslant 2$, c'est-à-dire $n \in \{-2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2\}$.

Réciproquement, chacun de ces cinq entiers vérifie $n^2 \leqslant 4$, les carrés valant respectivement 4, 1, 0, 1 et 4.

$$\boxed{\{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 \leqslant 4\} = \{-2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2\}}$$

3. On factorise : $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $(x - 1)(x - 2) \leqslant 0$. Si $x < 1$, alors $x - 1 < 0$ et $x - 2 < 0$, donc le produit est strictement positif. Si $x > 2$, les deux facteurs sont strictement positifs et le produit l'est aussi. Ces deux cas étant exclus, on a $1 \leqslant x \leqslant 2$.

Réciproquement, si $1 \leqslant x \leqslant 2$, alors $x - 1 \geqslant 0$ et $x - 2 \leqslant 0$, donc le produit est négatif.

$$\boxed{\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 \leqslant 0\} = [1\,;2]}$$

Opérations sur les ensembles

EXERCICE 21 ⋆

1. On applique les définitions des trois opérations :

$$\boxed{\begin{array}{l} A \cap B = \{3\ ;\ 4\} \quad ; \quad A \cup B = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\} \\ A \setminus B = \{1\ ;\ 2\} \quad ; \quad B \setminus A = \{5\ ;\ 6\} \quad ; \quad \overline{A} = \{5\ ;\ 6\ ;\ 7\ ;\ 8\} \end{array}}$$

On remarque au passage que $A \setminus B$ et $B \setminus A$ sont différents : la différence n'est pas symétrique.

2. On procède de la même manière :

$$\boxed{(A \cup B) \cap C = \{2\ ;\ 4\ ;\ 6\} \quad ; \quad A \cap B \cap C = \{4\} \quad ; \quad (A \cap B) \cup C = \{2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 6\ ;\ 8\}}$$

3. On calcule séparément les deux membres :

$$\overline{A \cup B} = E \setminus \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\} = \{7\ ;\ 8\}$$

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \{5\ ;\ 6\ ;\ 7\ ;\ 8\} \cap \{1\ ;\ 2\ ;\ 7\ ;\ 8\} = \{7\ ;\ 8\}$$

Les deux ensembles coïncident, conformément aux lois de De Morgan.

4. On raisonne sur les bornes des deux intervalles :

$$\boxed{I \cap J =]1\ ;5] \quad ; \quad I \cup J = [-2\ ;+\infty[\quad ; \quad \mathbb{R} \setminus J =]-\infty\ ;1] \quad ; \quad I \setminus J = [-2\ ;1]}$$

Piège : la borne 1 est exclue de J, donc elle appartient à $\mathbb{R} \setminus J$ et à $I \setminus J$: les crochets se retournent au passage au complémentaire.

EXERCICE 22 ⋆

(a) $\boxed{A \cap B}$ **(b)** $\boxed{A \setminus B = A \cap \overline{B}}$ **(c)** $\boxed{\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}}$

(d) $\boxed{(A \cup B) \setminus (A \cap B) \quad \text{ou} \quad (A \setminus B) \cup (B \setminus A)}$

Pour **(c)**, les deux écritures correspondent aux deux façons de lire la zone : « ce qui n'est pas dans la réunion » ou « ce qui est à la fois hors de A et hors de B ». Leur égalité est précisément la loi de De Morgan démontrée dans le cours.

Pour **(d)**, la première écriture retire de la réunion la partie commune, la seconde réunit les deux « croissants ». Cet ensemble est étudié en détail à l'exercice 30.

EXERCICE 23 ⋆

La lecture du diagramme donne :

$$A = \{a\ ;\ d\ ;\ e\ ;\ f\} \qquad B = \{c\ ;\ d\ ;\ e\ ;\ g\} \qquad C = \{e\ ;\ f\ ;\ g\ ;\ h\}$$

et donc, les complémentaires étant pris dans E :

$$\overline{A} = \{b\ ;\ c\ ;\ g\ ;\ h\} \qquad \overline{B} = \{a\ ;\ b\ ;\ f\ ;\ h\} \qquad \overline{C} = \{a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d\}$$

1. L'élément g n'appartient pas à A, donc pas à $A \cap \overline{B}$: **Fausse**

2. L'élément g appartient à B, donc pas à $\overline{B}$: **Fausse**

3. L'élément g n'appartient pas à A, donc $g \in \overline{A}$, et il suffit d'appartenir à l'un des deux ensembles d'une réunion : **Vraie**

4. L'élément f appartient à la fois à A et à C : **Vraie**

5. L'élément e appartient aux trois ensembles A, B et C : **Fausse**

6. Les éléments h et b n'appartiennent ni à A ni à B : **Vraie**

7. On a $a \in A$ et $f \in A$, donc les deux appartiennent à $A \cup C$: **Vraie**

Piège : les assertions 1 et 2 sont fausses pour des raisons *différentes* — la première parce que $g \notin A$, la seconde parce que $g \in B$. Il ne suffit pas de constater qu'une assertion est fausse, il faut dire quel facteur la met en défaut.

EXERCICE 24 ⋆⋆

1. Soit $x \in E$. On enchaîne les équivalences :

$$\begin{aligned} x \in \overline{F \cap G} &\iff x \notin F \cap G \\ &\iff \text{non}(x \in F \text{ et } x \in G) \\ &\iff x \notin F \text{ ou } x \notin G \\ &\iff x \in \overline{F} \text{ ou } x \in \overline{G} \\ &\iff x \in \overline{F} \cup \overline{G} \end{aligned}$$

la troisième équivalence provenant des lois de De Morgan de la propriété 1.

$$\boxed{\overline{F \cap G} = \overline{F} \cup \overline{G}}$$

2. *Première inclusion.* Soit $x \in (F \cap G) \cup H$. Deux cas se présentent.

- Si $x \in F \cap G$, alors $x \in F$ et $x \in G$, donc $x \in F \cup H$ et $x \in G \cup H$.
- Si $x \in H$, alors $x \in F \cup H$ et $x \in G \cup H$.

Dans les deux cas, $x \in (F \cup H) \cap (G \cup H)$.

Réciproquement, soit $x \in (F \cup H) \cap (G \cup H)$. Si $x \in H$, alors $x \in (F \cap G) \cup H$. Sinon $x \notin H$: de $x \in F \cup H$ on tire $x \in F$, et de $x \in G \cup H$ on tire $x \in G$, donc $x \in F \cap G$, et *a fortiori* $x \in (F \cap G) \cup H$.

$$\boxed{(F \cap G) \cup H = (F \cup H) \cap (G \cup H)}$$

3. *Première inclusion.* Soit $n \in \mathcal{M}_6$: il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 6k = 2(3k) = 3(2k)$, donc $n \in \mathcal{M}_2 \cap \mathcal{M}_3$.

Réciproquement, soit $n \in \mathcal{M}_2 \cap \mathcal{M}_3$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3k$, et n est pair. Si k était impair, alors $n = 3k$ serait le produit de deux entiers impairs, donc impair : c'est exclu. Ainsi k est pair, $k = 2m$ avec $m \in \mathbb{Z}$, et $n = 6m \in \mathcal{M}_6$.

$$\boxed{\mathcal{M}_2 \cap \mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_6}$$

EXERCICE 25 ⋆⋆

Démontrer les six équivalences séparément demanderait douze implications ; la chaîne n'en demande que quatre.

(*i*) ⇒ (*ii*) Supposons $A \subset B$. L'inclusion $A \cap B \subset A$ est toujours vraie. Réciproquement, soit $x \in A$: alors $x \in B$ par hypothèse, donc $x \in A \cap B$. D'où $A \cap B = A$.

(*ii*) ⇒ (*iii*) Supposons $A \cap B = A$. L'inclusion $B \subset A \cup B$ est toujours vraie. Réciproquement, soit $x \in A \cup B$. Si $x \in B$, c'est fini. Sinon $x \in A = A \cap B$, donc $x \in B$. D'où $A \cup B = B$.

(*iii*) ⇒ (*iv*) Supposons $A \cup B = B$, et soit $x \in A \setminus B$. Alors $x \in A$, donc $x \in A \cup B = B$, ce qui contredit $x \notin B$. L'ensemble $A \setminus B$ n'a donc aucun élément.

(*iv*) ⇒ (*i*) Supposons $A \setminus B = \varnothing$, et soit $x \in A$. Si $x \notin B$, alors $x \in A \setminus B = \varnothing$, ce qui est absurde. Donc $x \in B$, et $A \subset B$.

$$\boxed{\text{Les quatre propositions } (i), (ii), (iii) \text{ et } (iv) \text{ sont équivalentes.}}$$

La chaîne étant fermée, chacune entraîne toutes les autres en la parcourant : par exemple $(iii) \Rightarrow (ii)$ s'obtient en passant par (iv) puis (i).

EXERCICE 26 ⋆⋆⋆

1. On utilise les inclusions toujours vraies $A \subset A \cup B$ et $B \cap C \subset B$:

$$A \subset A \cup B = B \cap C \subset B$$

On procède de la même manière avec $B \subset A \cup B$ et $B \cap C \subset C$:

$$B \subset A \cup B = B \cap C \subset C$$

$$\boxed{A \subset B \subset C}$$

2. Soit $x \in B$. Alors $x \in A \cup B \subset A \cup C$, donc $x \in A$ ou $x \in C$.

- Si $x \in C$, la conclusion est acquise.
- Si $x \in A$, alors $x \in A \cap B$ puisque $x \in B$. Or $A \cap B \subset A \cap C$, donc $x \in A \cap C$ et en particulier $x \in C$.

$$\boxed{(A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cap C) \implies B \subset C}$$

3. Supposons $B \cap \overline{C} \subset A$, et soit $x \in B \cap \overline{A}$: on a $x \in B$ et $x \notin A$. Si $x \notin C$, alors $x \in B \cap \overline{C} \subset A$, donc $x \in A$: c'est contradictoire. Donc $x \in C$.

$$\boxed{B \cap \overline{C} \subset A \implies B \cap \overline{A} \subset C}$$

4. *Sens direct.* Supposons $A \cap B = A \cap C$, et soit $x \in A \cap \overline{B}$: on a $x \in A$ et $x \notin B$. Si $x \in C$, alors $x \in A \cap C = A \cap B$, donc $x \in B$: c'est contradictoire. Donc $x \notin C$, c'est-à-dire $x \in A \cap \overline{C}$. On a montré $A \cap \overline{B} \subset A \cap \overline{C}$, et l'autre inclusion s'obtient en échangeant les rôles de B et C.

Réciproque. Le sens direct vient d'être établi pour *toutes* les parties B et C de E. Appliquons-le à $\overline{B}$ et $\overline{C}$: de $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$, il vient $A \cap \overline{\overline{B}} = A \cap \overline{\overline{C}}$, c'est-à-dire $A \cap B = A \cap C$.

$$\boxed{A \cap B = A \cap C \iff A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}}$$

Cette réciproque « gratuite » mérite d'être notée : plutôt que de refaire la démonstration, on applique le sens direct à d'autres ensembles bien choisis.

5. Soit $x \in B$. Alors $x \in A \cup B = A \cup C$, donc $x \in A$ ou $x \in C$.

- Si $x \in C$, la conclusion est acquise.
- Si $x \in A$, alors $x \in A \cap B = A \cap C$, donc $x \in C$.

Ainsi $B \subset C$. Les hypothèses étant symétriques en B et C, le même raisonnement donne $C \subset B$.

$$\boxed{(A \cup B = A \cup C) \text{ et } (A \cap B = A \cap C) \implies B = C}$$

On remarquera que chacune des deux hypothèses seule est insuffisante : avec $A = E$, la première est toujours vraie ; avec $A = \varnothing$, la seconde l'est aussi.

6. *Montrons $C \subset A$.* Soit $x \in C$. Alors $x \in C \cup D = A \cup B$, donc $x \in A$ ou $x \in B$. Si $x \in B$, alors $x \in D$ puisque $B \subset D$, donc $x \in C \cap D = \varnothing$: c'est absurde. Donc $x \in A$. Avec l'hypothèse $A \subset C$, on obtient $A = C$.

Montrons $D \subset B$. Soit $x \in D$. Alors $x \in C \cup D = A \cup B$, donc $x \in A$ ou $x \in B$. Si $x \in A$, alors $x \in C$ puisque $A \subset C$, donc $x \in C \cap D = \varnothing$: c'est absurde. Donc $x \in B$. Avec l'hypothèse $B \subset D$, on obtient $B = D$.

$$\boxed{A = C \quad \text{et} \quad B = D}$$

C'est l'hypothèse $C \cap D = \varnothing$ qui fait tout le travail : elle interdit à un élément d'être à la fois dans C et dans D, donc de « passer » d'un ensemble à l'autre.

Parties d'un ensemble et produit cartésien

EXERCICE 27 ⋆⋆

1. On range les parties par nombre d'éléments croissant :

à 0 élément :	$\varnothing$
à 1 élément :	$\{a\}$; $\{b\}$; $\{c\}$; $\{d\}$
à 2 éléments :	$\{a\,;b\}$; $\{a\,;c\}$; $\{a\,;d\}$; $\{b\,;c\}$; $\{b\,;d\}$; $\{c\,;d\}$
à 3 éléments :	$\{a\,;b\,;c\}$; $\{a\,;b\,;d\}$; $\{a\,;c\,;d\}$; $\{b\,;c\,;d\}$
à 4 éléments :	E

On compte $1+4+6+4+1=16$ parties, et $2^4=16$: le résultat du cours est vérifié.

2. Une partie de E contenant a s'écrit de façon unique $\{a\}\cup X$, où X est une partie de $\{b\,;\,c\,;\,d\}$. En lisant la liste précédente, ce sont :

$$\{a\}\ ;\ \{a\,;b\}\ ;\ \{a\,;c\}\ ;\ \{a\,;d\}\ ;\ \{a\,;b\,;c\}\ ;\ \{a\,;b\,;d\}\ ;\ \{a\,;c\,;d\}\ ;\ E$$

Il y en a 8, soit exactement le nombre d'éléments de $\mathcal{P}(\{b\,;\,c\,;\,d\}) = 2^3$.

Le procédé « ajouter a » associe à chaque partie de $\{b\,;\,c\,;\,d\}$ une et une seule partie de E contenant a : les deux collections ont donc le même nombre d'éléments.

3. (a) **Vraie** : $\varnothing$ est une partie de E, donc un élément de $\mathcal{P}(E)$.

(b) **Vraie** : l'ensemble vide est inclus dans tout ensemble, en particulier dans $\mathcal{P}(E)$.

(c) **Vraie** : E est une partie de lui-même.

(d) **Fausse** : a est un *élément* de E, pas une partie. C'est $\{a\}$ qui appartient à $\mathcal{P}(E)$.

(e) **Vraie** : $\{a\}$ est bien une partie de E.

(f) **Vraie** : l'unique élément de $\{\{a\}\}$ est $\{a\}$, qui appartient à $\mathcal{P}(E)$ d'après **(e)**.

Piège : les affirmations **(a)** et **(b)** sont toutes deux vraies mais ne disent pas la même chose. Dans $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble vide joue les deux rôles : il en est un élément, et il en est aussi une partie.

EXERCICE 28 ⋆⋆

1. On énumère tous les couples :

$$E\times F = \{(1\,;a)\ ;\ (1\,;b)\ ;\ (2\,;a)\ ;\ (2\,;b)\ ;\ (3\,;a)\ ;\ (3\,;b)\}$$
$$F\times E = \{(a\,;1)\ ;\ (a\,;2)\ ;\ (a\,;3)\ ;\ (b\,;1)\ ;\ (b\,;2)\ ;\ (b\,;3)\}$$

Chacun compte $3\times 2=6$ éléments. En revanche ils ne sont pas égaux : $(1\,;a)\in E\times F$ mais $(1\,;a)\notin F\times E$, car la première coordonnée d'un élément de $F\times E$ appartient à F.

Même nombre d'éléments, mais $E\times F \neq F\times E$.

2. Un élément de $E\times F$ a sa première coordonnée dans E, un élément de $F\times E$ l'a dans F. Comme $E\cap F=\varnothing$, aucun couple ne peut appartenir aux deux :

$$(E\times F)\cap(F\times E)=\varnothing$$

3. Un couple $(x\,;y)$ appartient à $[0\,;2]\times[1\,;3]$ lorsque $0\leqslant x\leqslant 2$ et $1\leqslant y\leqslant 3$.

C'est le rectangle plein de sommets $(0\,;1)$, $(2\,;1)$, $(2\,;3)$ et $(0\,;3)$, côtés compris.

4. *Sens direct*, par contraposée. Supposons $A \neq \varnothing$ et $B \neq \varnothing$. On peut alors choisir $a \in A$ et $b \in B$, et le couple $(a\,;b)$ appartient à $A \times B$, qui n'est donc pas vide.

Réciproque. Si $A = \varnothing$, il n'existe aucun $x \in A$, donc aucun couple $(x\,;y)$ avec $x \in A$: le produit est vide. Il en va de même si $B = \varnothing$.

$$\boxed{A \times B = \varnothing \iff (A = \varnothing \text{ ou } B = \varnothing)}$$

5. Soit $(x\,;y) \in A \times B$. Alors $x \in A \subset E$, donc $x \in E$; et $y \in B \subset F$, donc $y \in F$. Ainsi $(x\,;y) \in E \times F$.

$$\boxed{A \times B \subset E \times F}$$

Exercices de synthèse

EXERCICE 29 : VRAI OU FAUX

1. **Vraie** Les deux dernières lignes de la table de vérité de l'implication donnent V lorsque A est fausse, quelle que soit B. Une hypothèse fausse permet de conclure n'importe quoi.

2. **Fausse** Les lois de De Morgan échangent le « et » et le « ou » : la négation est « $x < 0$ ou $y < 0$ ». Le couple $x = -1$, $y = 1$ met l'affirmation en défaut.

3. **Vraie** C'est le résultat du cours : démontrer une implication ou sa contraposée, c'est démontrer la même chose.

4. **Fausse** L'implication « si n est multiple de 4, alors n est pair » est vraie, sa réciproque est fausse (exercice 6).

5. **Fausse** Un exemple ne démontre rien pour une proposition universelle. L'exercice 10 en donne l'illustration la plus frappante : $n^2 + n + 41$ est premier pour n allant de 0 à 40, et cesse de l'être en 41.

6. **Vraie** L'ensemble vide est inclus dans tout ensemble, donc c'est une partie de E, donc un élément de $\mathcal{P}(E)$.

7. **Fausse** Il en possède 2^n, et non $2n$. Pour $n = 4$, l'exercice 27 en dénombre 16 et non 8.

8. **Vraie** C'est la remarque finale du cours : deux $\forall$ consécutifs, ou deux $\exists$ consécutifs, peuvent être permutés. Seuls des quantificateurs de natures différentes ne le peuvent pas.

9. **Vraie** « A ou B » est vraie dès que l'une des deux l'est, y compris lorsque les deux le sont.

10. **Vraie** C'est la loi de De Morgan ensembliste, démontrée dans le cours et vérifiée sur un exemple à l'exercice 21.

EXERCICE 30 ⋆⋆⋆

1. On a $A \setminus B = \{1\ ;\ 2\}$ et $B \setminus A = \{5\ ;\ 6\}$, d'où :

$$\boxed{A \Delta B = \{1\ ;\ 2\ ;\ 5\ ;\ 6\}}$$

2. C'est la zone formée des deux « croissants », c'est-à-dire la réunion privée de l'intersection :

$$\boxed{\text{Le diagramme } \textbf{(d)}.}$$

3. Notons P la proposition « $x \in A$ » et Q la proposition « $x \in B$ ». Par définition de la réunion et de la différence :

$$x \in A \Delta B \iff (P \text{ et non } Q) \text{ ou } (Q \text{ et non } P)$$

Comparons cette proposition à $(P$ ou $Q)$ et non$(P$ et $Q)$ par une table de vérité :

P	Q	$(P$ et non $Q)$ ou $(Q$ et non $P)$	P ou Q	non$(P$ et $Q)$	$(P$ ou $Q)$ et non$(P$ et $Q)$
V	V	F	V	F	F
V	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	F

Les deux colonnes encadrées coïncident, ce qui établit l'équivalence demandée :

$$\boxed{x \in A \Delta B \iff \Big((x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et non}(x \in A \text{ et } x \in B)\Big)}$$

4. On traduit chacun des deux membres du « et » :

$$(x \in A \text{ ou } x \in B) \iff x \in A \cup B \qquad \text{et} \qquad \text{non}(x \in A \text{ et } x \in B) \iff x \notin A \cap B$$

La question 3 se relit donc : $x \in A \Delta B$ si et seulement si $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$, ce qui est la définition de la différence.

$$\boxed{A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)}$$

5. On applique la question 4 :

$$A \Delta A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \varnothing$$
$$A \Delta \varnothing = (A \cup \varnothing) \setminus (A \cap \varnothing) = A \setminus \varnothing = A$$
$$A \Delta E = (A \cup E) \setminus (A \cap E) = E \setminus A = \overline{A}$$
$$\boxed{A \Delta A = \varnothing \quad ; \quad A \Delta \varnothing = A \quad ; \quad A \Delta E = \overline{A}}$$

6. *Sens direct.* Supposons $A \Delta B = \varnothing$. D'après la question 4, cela signifie $A \cup B \subset A \cap B$. Or les inclusions $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ sont toujours vraies, donc :

$$A \cup B \subset A \cap B \subset A \subset A \cup B$$

Toutes ces inclusions sont donc des égalités, et $A = A \cup B$. Le même raisonnement avec B donne $B = A \cup B$, d'où $A = B$.

Réciproquement, si $A = B$, alors $A \Delta B = A \Delta A = \varnothing$ d'après la question 5.

$$\boxed{A \Delta B = \varnothing \iff A = B}$$

7. La question 3 montre que x appartient à $A \Delta B$ lorsque x appartient à A ou à B, *mais pas aux deux*. C'est exactement le sens du « ou » du langage courant dans « fromage ou dessert » : l'un des deux, à l'exclusion de l'autre.

> La réunion $A \cup B$ correspond au « ou » inclusif des mathématiques,
> la différence symétrique $A \Delta B$ au « ou » exclusif du langage courant.

C'est pourquoi le cours prend soin de préciser que le « ou » mathématique est inclusif : le « ou » exclusif existe bien, mais il porte un autre nom et se note autrement.