EXERCICES – CHAPITRE 1

ENSEMBLES ET LOGIQUE

Propositions et connecteurs

EXERCICE 1 ⋆

Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il s'agit d'une proposition. Le cas échéant, donner sa valeur de vérité en justifiant.

1. $3 + 4 = 8$
2. $x^2 - 1$
3. Tout entier naturel est positif ou nul.
4. $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$
5. Soit n un entier naturel.
6. $n^2 \geqslant n$
7. Pour tout entier naturel n, on a $n^2 \geqslant n$.
8. Pour tout réel x, on a $x^2 \geqslant x$.

EXERCICE 2 ⋆

Soient A et B deux propositions. Dresser la table de vérité de chacune des propositions suivantes.

1. (non A) ou B
2. non(A et (non B))
3. $(A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow A)$
4. A et (non A)

1. Comparer les colonnes obtenues aux questions 1 et 2 avec celle de $A \Rightarrow B$, puis celle de la question 3 avec celle de $A \Leftrightarrow B$. Que peut-on en conclure ?
2. Que remarque-t-on à la question 4 ?

EXERCICE 3 ⋆

Écrire la négation de chacune des propositions suivantes, en évitant toute formulation du type « il est faux que ».

1. $x \geqslant 0$ et $y < 1$.
2. L'entier n est pair ou premier.
3. Le réel a est rationnel et strictement positif.
4. $x \in [0\,;1]$.
5. Le nombre n est divisible par 2 et par 3.
6. La suite (u_n) est croissante ou majorée.

EXERCICE 4 ⋆⋆

Soient A et B deux propositions.

1. Établir à l'aide d'une table de vérité l'équivalence $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\text{non } A) \text{ ou } B)$.
2. En déduire, sans nouvelle table, que non$(A \Rightarrow B)$ équivaut à $(A$ et (non $B))$.
3. Vérifier ce dernier résultat par une table de vérité.
4. Soit x un réel fixé. Écrire la négation de la proposition « si $x > 2$, alors $x^2 > 4$ ».
5. Cette négation peut-elle être vraie pour un certain réel x ? Qu'en conclure sur l'implication de départ ?

Implication et équivalence

EXERCICE 5 ⋆

Pour chacune des implications suivantes, supposée vraie, compléter les deux phrases « ... est une condition suffisante pour ... » et « ... est une condition nécessaire pour ... », puis dire si la réciproque est vraie ou fausse.

1. n est un multiple de $6 \Rightarrow n$ est un multiple de 3.
2. $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$.
3. $ABCD$ est un carré $\Rightarrow ABCD$ est un losange.
4. $x > 0 \Rightarrow x \geqslant 0$.
5. n est pair $\Rightarrow n^2$ est pair.

EXERCICE 6 ⋆

Pour chacune des implications suivantes, écrire la réciproque puis la contraposée. Dire ensuite si l'implication de départ est vraie, et si sa réciproque l'est.

1. Si n est un multiple de 4, alors n est pair.
2. Si $x \geqslant 2$, alors $x^2 \geqslant 4$.
3. Si n est un nombre premier strictement supérieur à 2, alors n est impair.
4. Si x et y sont rationnels, alors $x + y$ est rationnel.

EXERCICE 7 ⋆⋆

Démontrer les équivalences suivantes en respectant le schéma de rédaction en deux temps du cours.

1. Soient x et y deux réels. Montrer que $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ et } y = 0)$.
2. Soient a et b deux réels. Montrer que $(a + b)^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow ab = 0$.
3. Soit x un réel. Montrer que $|x| \leqslant 3 \Leftrightarrow -3 \leqslant x \leqslant 3$.

Modes de raisonnement

EXERCICE 8 ⋆

Démontrer par contraposée les implications suivantes.

1. Soit n un entier relatif. Si n^2 est pair, alors n est pair.
2. Soient a et b deux réels. Si $a + b \geqslant 2$, alors $a \geqslant 1$ ou $b \geqslant 1$.
3. Soit n un entier relatif. Si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.

EXERCICE 9 ⋆⋆

On admet le résultat suivant : *si* 3 *divise* p^2*, alors* 3 *divise* p.

1. Démontrer par l'absurde que $\sqrt{3}$ est irrationnel, en reprenant la structure de la démonstration du cours.
2. En admettant que $\sqrt{2}$ est irrationnel, démontrer que $\sqrt{8}$ l'est également.
3. Où la démonstration de la question 1 échouerait-elle si l'on cherchait à établir que $\sqrt{4}$ est irrationnel ?

EXERCICE 10 ⋆⋆

Chacune des propositions suivantes est fausse. Le démontrer en exhibant un contre-exemple.

1. Tout entier naturel est la somme des carrés de deux entiers naturels.
2. Pour tous réels x et y, $\sqrt{x^2+y^2} = x+y$.
3. Pour tout réel x, $x^2 > x$.
4. Si un entier est divisible par 2 et par 4, alors il est divisible par 8.
5. Pour tous réels a et b, $|a+b| = |a|+|b|$.
6. Tout nombre premier est impair.
7. Pour tout entier naturel n, n^2+n+41 est un nombre premier.

EXERCICE 11 ⋆⋆

Le cours établit par contraposée le résultat suivant : *si x est un réel positif tel que $x \leqslant \varepsilon$ pour tout réel $\varepsilon > 0$, alors $x = 0$.*

1. Rédiger une démonstration de ce même résultat par l'absurde.
2. Montrer que l'hypothèse « x positif » ne peut pas être supprimée, en donnant un réel x strictement négatif vérifiant $x \leqslant \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.
3. Le résultat subsiste-t-il si l'on remplace « pour tout réel $\varepsilon > 0$ » par « il existe un réel $\varepsilon > 0$ » ? Justifier.

EXERCICE 12 ⋆⋆⋆

On rappelle qu'un réel est *irrationnel* lorsqu'il n'appartient pas à $\mathbb{Q}$.

1. Montrer que la somme et le produit de deux rationnels sont rationnels.
2. Soient r un rationnel et x un irrationnel. Démontrer par l'absurde que $r+x$ est irrationnel.
3. Soient r un rationnel non nul et x un irrationnel. Démontrer de même que rx est irrationnel.
4. La somme de deux irrationnels est-elle toujours irrationnelle ? Et leur produit ? Justifier.
5. Pourquoi l'hypothèse $r \neq 0$ est-elle nécessaire à la question 3 ?

Ensembles et quantificateurs

EXERCICE 13 ⋆

1. Décrire en extension les ensembles suivants :
   (a) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leqslant 9\}$
   (b) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ divise } 12\}$
   (c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 2\}$
   (d) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 2\}$
2. Décrire en compréhension les ensembles suivants :
   (a) $\{1\ ;\ 4\ ;\ 9\ ;\ 16\ ;\ 25\}$
   (b) l'ensemble des entiers relatifs pairs
   (c) l'ensemble des réels dont la distance à 3 est inférieure ou égale à 1

EXERCICE 14 ⋆

On pose $E = \{1\ ;\ 2\ ;\ \{3\}\ ;\ \{1\ ;\ 2\}\}$.

Pour chacun des objets ci-dessous, dire s'il appartient à E, s'il est inclus dans E, s'il vérifie les deux, ou aucune des deux. Justifier.

1. 1
2. $\{1\}$
3. 3
4. $\{3\}$
5. $\{1\ ;\ 2\}$
6. $\varnothing$
7. $\{\{3\}\}$
8. $\{2\ ;\ \{3\}\}$

EXERCICE 15 ⋆

Donner la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes, en justifiant.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 > 0$
2. $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 = 0$
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1$
4. $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ n \leqslant m$
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y = 0$
6. $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x + y = 0$
7. $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \exists y \in \mathbb{R},\ xy = 1$
8. $\exists x \in \mathbb{Q},\ x^2 = 2$

EXERCICE 16 ⋆⋆

Écrire la négation de chacune des propositions suivantes, sous une forme où aucun « non » ne porte sur un quantificateur.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant x$
2. $\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 = 2$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y > x$
4. $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$
5. $\forall x \in E,\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$
6. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$

EXERCICE 17 ⋆⋆

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Traduire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes, ainsi que leur négation.

1. f est majorée sur $\mathbb{R}$.
2. f ne s'annule jamais.
3. f n'est pas la fonction nulle.
4. f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$.
5. f n'est pas impaire.
6. f n'admet aucun minimum sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 18 ⋆⋆

Soient x et y des réels.

1. On note $P(x\ ;y)$ la proposition « $x + y = 0$ ». Donner la valeur de vérité de :

   (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ P(x\ ;y)$

   (b) $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x\ ;y)$

2. Reprendre la question précédente avec $P(x\ ;y)$: « $xy = 0$ ».

3. Les deux exemples précédents montrent qu'aucune règle générale ne relie ces deux propositions dans un sens. Démontrer en revanche que, pour toute proposition P, l'implication suivante est vraie :

$$\Big(\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x\ ;y)\Big) \implies \Big(\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ P(x\ ;y)\Big)$$

4. Expliquer en une phrase pourquoi la réciproque est fausse.

Inclusion et égalité

EXERCICE 19 ⋆

On note $\mathcal{M}_k$ l'ensemble des multiples de k dans $\mathbb{Z}$.

1. Justifier les inclusions $\mathcal{M}_{12} \subset \mathcal{M}_6$, $\mathcal{M}_{12} \subset \mathcal{M}_4$ et $\mathcal{M}_6 \subset \mathcal{M}_3$.
2. A-t-on $\mathcal{M}_6 \subset \mathcal{M}_4$? Et $\mathcal{M}_4 \subset \mathcal{M}_6$? Justifier.
3. Plus généralement, à quelle condition sur les entiers k et ℓ a-t-on $\mathcal{M}_k \subset \mathcal{M}_\ell$?
4. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant :

   (a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
   (b) $[0\,;1] \subset [0\,;2]$
   (c) $\{0\} \subset \mathbb{N}$
   (d) $0 \subset \mathbb{N}$

EXERCICE 20 ⋆⋆

Démontrer les égalités d'ensembles suivantes par double inclusion, en respectant le schéma de rédaction du cours.

1. $\{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| \leqslant 2\} = [-1\,;3]$
2. $\{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 \leqslant 4\} = \{-2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2\}$
3. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 \leqslant 0\} = [1\,;2]$

Opérations sur les ensembles

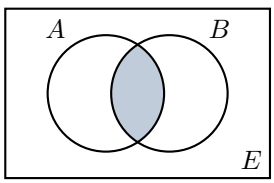
EXERCICE 21 ⋆

On pose $E = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\ ;\ 7\ ;\ 8\}$, puis $A = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$, $B = \{3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$ et $C = \{2\ ;\ 4\ ;\ 6\ ;\ 8\}$. Les complémentaires sont pris dans E.

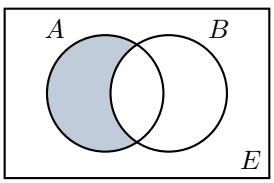
1. Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ et $\overline{A}$.
2. Déterminer $(A \cup B) \cap C$, $A \cap B \cap C$ et $(A \cap B) \cup C$.
3. Vérifier sur cet exemple l'égalité $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
4. On pose maintenant $I = [-2\,;5]$ et $J =]1\,;+\infty[$, parties de $\mathbb{R}$. Déterminer $I \cap J$, $I \cup J$, $\mathbb{R} \setminus J$ et $I \setminus J$.

EXERCICE 22 ⋆

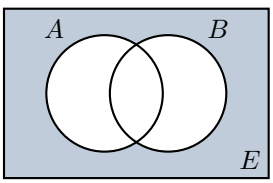
Dans chacun des quatre diagrammes ci-dessous, A et B sont deux parties d'un ensemble E. Donner, pour chaque zone coloriée, une expression à l'aide des symboles $\cap$, $\cup$, $\setminus$ et du passage au complémentaire.



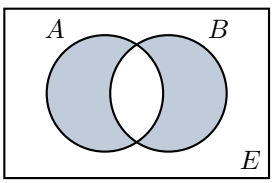
(a)



(b)



(c)

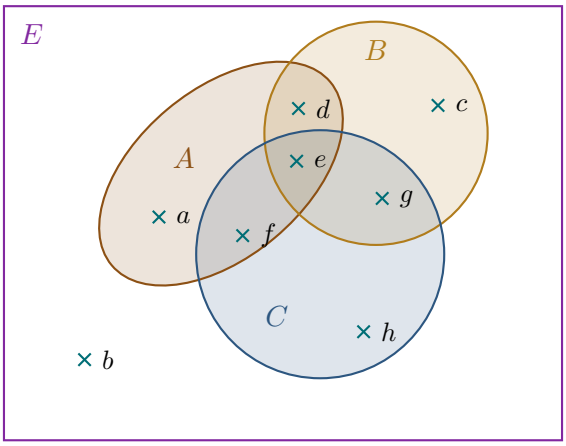


(d)

Pour le dernier diagramme, on donnera deux expressions différentes.

EXERCICE 23 ⋆

On considère le diagramme ci-dessous, où A, B et C sont trois parties d'un ensemble E, et où a, b, c, d, e, f, g et h sont des éléments de E. Les complémentaires sont pris dans E.



Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant.

1. $g \in A \cap \overline{B}$
2. $g \in \overline{A} \cap \overline{B}$
3. $g \in \overline{A} \cup \overline{B}$
4. $f \in C \cap A$
5. $e \in \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
6. $\{h\,;\,b\} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$
7. $\{a\,;\,f\} \subset A \cup C$

EXERCICE 24 ⋆⋆

Soient F, G et H trois parties d'un ensemble E, les complémentaires étant pris dans E.

1. Le cours démontre l'égalité $\overline{F \cup G} = \overline{F} \cap \overline{G}$ par équivalences successives. Rédiger de la même manière la démonstration de $\overline{F \cap G} = \overline{F} \cup \overline{G}$.
2. Démontrer par double inclusion que $(F \cap G) \cup H = (F \cup H) \cap (G \cup H)$.
3. Application : en notant $\mathcal{M}_k$ l'ensemble des multiples de k dans $\mathbb{Z}$, démontrer que $\mathcal{M}_2 \cap \mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_6$.

EXERCICE 25 ⋆⋆

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Démontrer que les quatre propositions suivantes sont équivalentes :

$$(i)\ A \subset B \qquad (ii)\ A \cap B = A \qquad (iii)\ A \cup B = B \qquad (iv)\ A \setminus B = \varnothing$$

On pourra établir la chaîne d'implications $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i)$ plutôt que de démontrer séparément chacune des équivalences.

Parties d'un ensemble et produit cartésien

EXERCICE 26 ⋆⋆⋆

1. Soient A, B et C trois ensembles tels que $A \cup B = B \cap C$. Montrer que :
$$A \subset B \subset C$$
2. Soient A, B et C trois ensembles. Montrer que :
$$(A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cap C) \implies B \subset C$$
3. Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer que :
$$B \cap \overline{C} \subset A \implies B \cap \overline{A} \subset C$$
4. Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer que :
$$A \cap B = A \cap C \iff A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$$
5. Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer que :
$$(A \cup B = A \cup C) \text{ et } (A \cap B = A \cap C) \implies B = C$$
6. Soient A, B, C et D quatre parties d'un ensemble E. Montrer que :
$$\left.\begin{array}{l} A \subset C \\ B \subset D \\ C \cap D = \varnothing \\ A \cup B = C \cup D \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{l} A = C \\ B = D \end{array}\right.$$

EXERCICE 27 ⋆⋆

On pose $E = \{a\,;\ b\,;\ c\,;\ d\}$.

1. Écrire $\mathcal{P}(E)$ en rangeant ses éléments par nombre d'éléments croissant, et vérifier le résultat annoncé dans le cours pour le nombre de parties.
2. Combien de parties de E contiennent l'élément a ? Les décrire, puis expliquer le lien avec l'ensemble $\mathcal{P}(\{b\,;\ c\,;\ d\})$.
3. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant :

(a) $\varnothing \in \mathcal{P}(E)$
(b) $\varnothing \subset \mathcal{P}(E)$
(c) $E \in \mathcal{P}(E)$
(d) $a \in \mathcal{P}(E)$
(e) $\{a\} \in \mathcal{P}(E)$
(f) $\{\{a\}\} \subset \mathcal{P}(E)$

EXERCICE 28 ⋆⋆

On pose $E = \{1\,;\ 2\,;\ 3\}$ et $F = \{a\,;\ b\}$.

1. Écrire $E \times F$ puis $F \times E$ en extension. Ces deux ensembles ont-ils le même nombre d'éléments ? Sont-ils égaux ?
2. Déterminer $(E \times F) \cap (F \times E)$.
3. Décrire géométriquement la partie $[0\,;2] \times [1\,;3]$ du plan.

4. Soient A et B deux ensembles. Démontrer que $A \times B = \varnothing$ si et seulement si $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$.
5. Soient $A \subset E$ et $B \subset F$. Démontrer que $A \times B \subset E \times F$.

Exercices de synthèse

EXERCICE 29 : VRAI OU FAUX

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Dans tout l'exercice, A et B désignent des propositions, et E, F, G des ensembles.

1. Si A est fausse, alors $A \Rightarrow B$ est vraie.
2. La négation de « $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ » est « $x < 0$ et $y < 0$ ».
3. Une implication et sa contraposée ont la même valeur de vérité.
4. Une implication et sa réciproque ont la même valeur de vérité.
5. Un exemple suffit à démontrer qu'une proposition commençant par « pour tout » est vraie.
6. Pour tout ensemble E, on a $\varnothing \subset E$ et $\varnothing \in \mathcal{P}(E)$.
7. Si E possède n éléments, alors $\mathcal{P}(E)$ en possède $2n$.
8. Dans une proposition, deux quantificateurs de même nature peuvent être permutés sans changer sa valeur de vérité.
9. Le « ou » des mathématiques est inclusif.
10. Pour toutes parties F et G de E, on a $\overline{F \cup G} = \overline{F} \cap \overline{G}$.

EXERCICE 30 ⋆⋆⋆

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On appelle *différence symétrique* de A et B l'ensemble :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

1. Sur l'exemple de l'exercice 21, avec $A = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$ et $B = \{3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$, déterminer $A \Delta B$.
2. Auquel des quatre diagrammes de l'exercice 22 la différence symétrique correspond-elle ?
3. Montrer que, pour tout $x \in E$:

$$x \in A \Delta B \quad \Longleftrightarrow \quad \Big((x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et non}(x \in A \text{ et } x \in B)\Big)$$

4. En déduire l'égalité $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
5. Déterminer $A \Delta A$, $A \Delta \varnothing$ et $A \Delta E$.
6. Démontrer que $A \Delta B = \varnothing$ si et seulement si $A = B$.
7. Le cours souligne que le « ou » des mathématiques est inclusif. Expliquer en quoi la question 3 fait apparaître le « ou » exclusif du langage courant, celui du « fromage ou dessert ».