CORRIGÉ – CHAPITRE 2

APPLICATIONS

Généralités

EXERCICE 1 ⋆

1. La définition du cours exige que *chaque* élément de E possède *une et une seule* image.

(a) Chacun des trois points de E est l'origine d'exactement une flèche :

C'est une application.

(b) L'élément 2 est l'origine de deux flèches, vers a et vers b :

Ce n'est pas une application : l'élément 2 a deux images.

(c) Aucune flèche ne part de l'élément 2 :

Ce n'est pas une application : l'élément 2 n'a pas d'image.

(d) Chacun des trois points est l'origine d'exactement une flèche, toutes dirigées vers b :

C'est une application (constante).

Rien n'interdit à un élément de F de recevoir plusieurs flèches, ni de n'en recevoir aucune : la condition ne porte que sur l'ensemble de départ.

2. On examine à chaque fois si tout élément de l'ensemble de départ possède une image dans l'ensemble d'arrivée.

(1) Le quotient $\dfrac{1}{x}$ n'est pas défini pour $x = 0$:

Ce n'est pas une application : 0 n'a pas d'image.

(2) La racine carrée n'est pas définie pour $x < 0$:

Ce n'est pas une application : les réels strictement négatifs n'ont pas d'image.

(3) Tout réel possède un carré, et ce carré est positif, donc appartient bien à $\mathbb{R}_+$:

C'est une application.

(4) Tout entier relatif possède un carré, qui est un entier positif, donc un élément de $\mathbb{N}$:

C'est une application.

Piège : aux questions **(3)** et **(4)**, il ne suffit pas que la formule ait un sens ; encore faut-il que le résultat appartienne à l'ensemble d'arrivée annoncé.

EXERCICE 2 ⋆

Deux applications sont égales lorsque leurs trois composantes le sont : même ensemble de départ, même ensemble d'arrivée, et même image pour chaque élément.

1. Les ensembles de départ et les formules coïncident, mais les ensembles d'arrivée sont $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+$:

$$\boxed{f \neq g}$$

C'est exactement la distinction annoncée par le cours, et elle est loin d'être formelle : f n'est pas surjective, alors que g l'est.

2. Les ensembles coïncident, et pour tout réel x on a $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$:

$$\boxed{f = g}$$

3. Les ensembles coïncident, et pour tout réel x on a $\sqrt{x^2} = |x|$:

$$\boxed{f = g}$$

On notera que $\sqrt{x^2} = x$ serait faux pour $x < 0$.

4. Les ensembles de départ sont $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}$:

$$\boxed{f \neq g}$$

5. Les ensembles coïncident, et pour tout réel non nul x on a $\dfrac{x}{x} = 1$:

$$\boxed{f = g}$$

L'exclusion de 0 est ici indispensable : sur $\mathbb{R}$ tout entier, f ne serait pas une application.

EXERCICE 3 ⋆⋆

1. Se donner une application de E dans F, c'est se donner les trois images $f(1)$, $f(2)$ et $f(3)$, chacune valant a ou b : il y a deux choix indépendants pour chacune.

$$\boxed{\text{Il y a } 2 \times 2 \times 2 = 8 \text{ applications de } E \text{ dans } F.}$$

Les voici, sous la forme $\big(f(1)\,;f(2)\,;f(3)\big)$:

$$(a\,;a\,;a) \quad (a\,;a\,;b) \quad (a\,;b\,;a) \quad (a\,;b\,;b) \quad (b\,;a\,;a) \quad (b\,;a\,;b) \quad (b\,;b\,;a) \quad (b\,;b\,;b)$$

2. Une application injective enverrait les trois éléments de E sur trois éléments distincts de F, qui n'en compte que deux : chacun des huit triplets comporte donc au moins une répétition.

$$\boxed{\text{Aucune n'est injective.}}$$

Une application est surjective lorsque a et b figurent tous deux dans le triplet, ce qui exclut $(a\,;a\,;a)$ et $(b\,;b\,;b)$:

$$\boxed{\text{Six sont surjectives.}}$$

3. Une application de F dans E est déterminée par le couple $\big(f(a)\,;f(b)\big)$, chaque coordonnée valant 1, 2 ou 3 : il y en a $3 \times 3 = 9$. Elle est injective lorsque $f(a) \neq f(b)$, ce qui exclut les trois couples $(1\,;1)$, $(2\,;2)$ et $(3\,;3)$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Il y a 9 applications de } F \text{ dans } E, \text{ dont 6 injectives.}\\ \text{Aucune n'est surjective : deux images ne peuvent pas couvrir trois éléments.}\end{array}}$$

4. On généralise le raisonnement de comptage :

$$\boxed{\text{Si } E \text{ et } F \text{ sont finis, } F^E \text{ possède } (\text{card } F)^{\text{card } E} \text{ éléments.}}$$

C'est ce qui justifie la notation F^E ; ce résultat sera réutilisé à l'exercice 25.

Composition

EXERCICE 4 ⋆

On rappelle que dans $g \circ f$, c'est f qui agit en premier.

1. On compose dans les deux sens :

$$(g \circ f)(x) = g(2x+1) = (2x+1)^2 \qquad \text{et} \qquad (f \circ g)(x) = f(x^2) = 2x^2 + 1$$

$$\boxed{g \circ f \neq f \circ g}$$

2. On procède de la même manière :

$$(g \circ f)(x) = (x-3)^3 \qquad \text{et} \qquad (f \circ g)(x) = x^3 - 3 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{g \circ f \neq f \circ g}$$

3. On procède de la même manière :

$$(g \circ f)(x) = \mathrm{e}^x + 1 \qquad \text{et} \qquad (f \circ g)(x) = \mathrm{e}^{x+1} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{g \circ f \neq f \circ g}$$

4. Ici $f = g$, donc les deux composées coïncident :

$$(g \circ f)(x) = \left(x^2\right)^2 = x^4 = (f \circ g)(x) \qquad \text{donc} \qquad \boxed{g \circ f = f \circ g}$$

Conclusion : la composition n'est pas commutative en général, ce que montrent les trois premiers cas. Le quatrième rappelle qu'elle peut l'être dans des cas particuliers : « non commutative » ne signifie pas « jamais commutative ».

EXERCICE 5 ⋆

1. On compose dans l'ordre indiqué :

$$(g \circ f)(x) = g(x+1) = 2(x+1) = 2x + 2$$

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h(2x+2) = \boxed{(2x+2)^2}$$

2. On regroupe cette fois les deux dernières applications :

$$(h \circ g)(x) = h(2x) = 4x^2 \qquad \text{puis} \qquad ((h \circ g) \circ f)(x) = 4(x+1)^2 = \boxed{(2x+2)^2}$$

$$\boxed{h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \text{ sur cet exemple.}}$$

3. Pour tout réel x :

$$(f \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})(x) = f(x) = x + 1 \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \circ f)(x) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(x+1) = x + 1$$

$$\boxed{f \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \circ f = f}$$

4. La réponse est négative :

$$\boxed{\text{Non : un exemple ne démontre jamais une propriété universelle.}}$$

C'est l'asymétrie signalée au chapitre 1 : un exemple ne prouve rien, un contre-exemple suffit à réfuter. La démonstration générale de l'associativité figure dans la propriété 1 du cours, où l'on compare les images d'un x *quelconque*.

EXERCICE 6 ⋆⋆

1. Pour tout réel x : $(f \circ f)(x) = f(-x) = -(-x) = x$, donc :

$$\boxed{f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}}$$

2. Pour tout réel non nul x, le nombre $\dfrac{1}{x}$ est encore non nul, et :

$$(g \circ g)(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \qquad \text{donc} \qquad \boxed{g \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^*}}$$

3. Pour tout réel x : $(u \circ u)(x) = 1 - (1 - x) = x$, donc :

$$\boxed{u \circ u = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}}$$

4. Vérifions d'abord que v est bien à valeurs dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Supposons $v(x) = 1$ pour un $x \neq 1$:

$$\frac{x+1}{x-1} = 1 \iff x + 1 = x - 1 \iff 1 = -1$$

ce qui est absurde. Donc $v(x) \neq 1$ pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, et la composée $v \circ v$ a bien un sens. On calcule alors :

$$(v \circ v)(x) = \frac{v(x)+1}{v(x)-1} = \frac{\dfrac{x+1}{x-1} + 1}{\dfrac{x+1}{x-1} - 1} = \frac{\dfrac{(x+1)+(x-1)}{x-1}}{\dfrac{(x+1)-(x-1)}{x-1}} = \frac{2x}{2} = x$$

$$\boxed{v \circ v = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}\setminus\{1\}}}$$

Piège : la vérification préalable n'est pas une formalité. Sans elle, $v(x)$ pourrait sortir de l'ensemble de départ de v, et l'écriture $v \circ v$ n'aurait aucun sens.

Injectivité, surjectivité, bijectivité

EXERCICE 7 ⋆

(a) Chaque élément de F reçoit exactement une flèche :

$$\boxed{\text{Bijective.}}$$

(b) L'élément a reçoit deux flèches, celles de 1 et de 2, mais tout élément de F en reçoit au moins une :

$$\boxed{\text{Surjective, non injective : 1 et 2 ont la même image } a.}$$

(c) Chaque élément de F reçoit au plus une flèche, mais c n'en reçoit aucune :

$$\boxed{\text{Injective, non surjective : } c \text{ n'a pas d'antécédent.}}$$

(d) L'élément a reçoit deux flèches et c n'en reçoit aucune :

$$\boxed{\text{Ni injective (1 et 2 ont la même image), ni surjective } (c \text{ n'a pas d'antécédent}).}$$

EXERCICE 8 ⋆⋆

1. L'application $f : x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifie $f(-1) = f(1) = 1$, et le réel -1 n'a pas d'antécédent puisqu'un carré est positif.

f n'est ni injective, ni surjective.

2. *Injectivité.* Soit $(x\,;x') \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^3 = x'^3$. La fonction cube étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle est injective : $x \neq x'$ entraînerait $x^3 \neq x'^3$. Donc $x = x'$.

Surjectivité. Soit $y \in \mathbb{R}$. Posons $x = y^{1/3}$, qui est bien un réel. Alors $g(x) = y$.

g est bijective, de bijection réciproque $y \mapsto y^{1/3}$.

3. On a $\cos(0) = \cos(2\pi) = 1$, et le réel 2 n'a pas d'antécédent puisque $|\cos| \leqslant 1$.

h n'est ni injective, ni surjective.

4. *Injectivité.* Soit $(x\,;x') \in \mathbb{R}_+^2$ tel que $u(x) = u(x')$:

$$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x'^2}{x'^2+1} \iff x^2(x'^2+1) = x'^2(x^2+1) \iff x^2 = x'^2$$

Comme x et x' sont positifs, il vient $x = x'$.

Surjectivité. Soit $y \in [0\,;1[$. Alors $1-y > 0$, et l'on peut poser :

$$x = \sqrt{\frac{y}{1-y}}$$

qui est bien un élément de $\mathbb{R}_+$. On a $x^2 = \dfrac{y}{1-y}$, d'où :

$$u(x) = \frac{\frac{y}{1-y}}{\frac{y}{1-y}+1} = \frac{\frac{y}{1-y}}{\frac{y+1-y}{1-y}} = y$$

u est bijective.

5. L'application v associe à une fonction sa valeur en 0. Les fonctions $\varphi_1 : x \mapsto 0$ et $\varphi_2 : x \mapsto x$ sont distinctes et vérifient $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$. En revanche, pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction constante égale à y a pour image y.

v est surjective, non injective.

6. Les fonctions $\varphi_1 : t \mapsto 0$ et $\varphi_2 : t \mapsto t - \dfrac{1}{2}$ sont continues sur $[0\,;1]$, distinctes, et d'intégrales toutes deux nulles. En revanche, pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction constante égale à y a pour intégrale y.

w est surjective, non injective.

On remarque que les questions 5 et 6 se traitent exactement de la même façon : dans les deux cas, l'application « oublie » presque toute l'information contenue dans φ.

EXERCICE 9 ⋆⋆

1. Soient $(x\,;y)$ et $(x'\,;y')$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$ tels que $f(x\,;y) = f(x'\,;y')$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x + y = x' + y' \\ x + 2y = x' + 2y' \end{cases}$$

En soustrayant la première ligne à la seconde, il vient $y = y'$, puis la première donne $x = x'$. Donc $(x\,;y) = (x'\,;y')$:

f est injective.

2. Soit $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$. Posons $y = b - a$ et $x = 2a - b$, qui sont bien des réels. Alors :

$$x + y = (2a - b) + (b - a) = a \qquad \text{et} \qquad x + 2y = (2a - b) + 2(b - a) = b$$

donc $f(x\,;y) = (a\,;b)$.

$$\boxed{f \text{ est surjective.}}$$

3. On conclut :

$$\boxed{f \text{ est bijective, et } f^{-1}(a\,;b) = (2a - b\,;\, b - a).}$$

EXERCICE 10 ⋆⋆

Injectivité. Soit $(n\,;n') \in \mathbb{N}^2$ tel que $\varphi(n) = \varphi(n')$, c'est-à-dire $2n = 2n'$. En divisant par 2, on obtient $n = n'$.

Surjectivité. Soit $p \in \mathcal{P}air$. Par définition, p est un entier naturel pair : il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k$. Alors $k \in \mathbb{N}$ et $\varphi(k) = p$.

$$\boxed{\varphi \text{ est bijective, et } \varphi^{-1}(p) = \frac{p}{2}.}$$

Commentaire. L'inclusion $\mathcal{P}air \subset \mathbb{N}$ est stricte, puisque $1 \notin \mathcal{P}air$, et pourtant les deux ensembles sont en bijection. C'est impossible pour un ensemble fini : une partie stricte d'un ensemble fini a toujours strictement moins d'éléments. Cette propriété caractérise en fait les ensembles infinis.

Piège : si l'on avait pris pour $\mathcal{P}air$ l'ensemble des entiers *relatifs* pairs, φ n'aurait plus été surjective, l'entier -2 n'ayant pas d'antécédent dans $\mathbb{N}$.

EXERCICE 11 ⋆⋆

1. et **2.** On rassemble les résultats.

	Départ	**Arrivée**	**Injective**	**Surjective**	**Réciproque**
f_1	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	non	non	—
f_2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+$	non	oui	—
f_3	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}$	oui	non	—
f_4	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+$	oui	oui	$y \mapsto \sqrt{y}$
f_5	$\mathbb{R}_-$	$\mathbb{R}_+$	oui	oui	$y \mapsto -\sqrt{y}$

Justifions les points essentiels.

- *Défaut d'injectivité* pour f_1 et f_2 : on a $(-1)^2 = 1^2$, et -1 comme 1 appartiennent à $\mathbb{R}$.
- *Injectivité* de f_3, f_4 et f_5 : si $x^2 = x'^2$ avec x et x' de même signe, alors $x = x'$.
- *Défaut de surjectivité* pour f_1 et f_3 : le réel -1 n'a pas d'antécédent.
- *Surjectivité* de f_2, f_4 et f_5 : pour $y \in \mathbb{R}_+$, le réel $\sqrt{y}$ (respectivement $-\sqrt{y}$) est un antécédent situé dans l'ensemble de départ.

3. On tire de ce tableau la conclusion générale :

> L'injectivité et la surjectivité ne dépendent pas de la formule, mais du triplet (départ, arrivée, graphe). Restreindre l'arrivée peut créer la surjectivité, restreindre le départ peut créer l'injectivité.

C'est exactement ce que le cours illustre avec la fonction sinus.

EXERCICE 12 ⋆⋆

1. Soit $(x\,;x') \in E^2$ tel que $f(x) = f(x')$. En appliquant g aux deux membres :

$$g(f(x)) = g(f(x')) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad (g\circ f)(x) = (g\circ f)(x')$$

Comme $g \circ f$ est injective, on en déduit $x = x'$.

$$\boxed{f \text{ est injective.}}$$

2. Soit $z \in G$. Comme $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $(g \circ f)(x) = z$. Posons $y = f(x)$, qui appartient à F. Alors $g(y) = z$.

$$\boxed{g \text{ est surjective.}}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $g(f(n)) = |n| = n$ puisque n est positif :

$$\boxed{g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}}$$

4. L'application $\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ est injective et surjective. Pourtant :

- g n'est pas injective, car $g(-1) = g(1) = 1$;
- f n'est pas surjective, car $-1 \in \mathbb{Z}$ n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{N}$.

> Les réciproques des questions 1 et 2 sont donc fausses : $g \circ f$ peut être injective sans que g le soit, et surjective sans que f le soit.

5. *Injectivité.* Soit $(x\,;x') \in E^2$ tel que $(g\circ f)(x) = (g\circ f)(x')$. Comme g est injective, $f(x) = f(x')$; comme f est injective, $x = x'$.

Surjectivité. Soit $z \in G$. Comme g est surjective, il existe $y \in F$ tel que $g(y) = z$; comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Alors $(g \circ f)(x) = z$.

$$\boxed{g \circ f \text{ est bijective.}}$$

Le rôle des ensembles de départ et d'arrivée

EXERCICE 13 ⋆

1. On lit sur le graphique :

$$\boxed{y = 2{,}5 \ : \ 0 \text{ point} \qquad y = 1 \ : \ 3 \text{ points} \qquad y = -2 \ : \ 2 \text{ points}}$$

Pour $y = -2$, la droite est tangente à la courbe au point d'abscisse 1 et la recoupe à l'extrémité gauche, en $x = -2$.

2. La droite $y = 1$ rencontre la courbe en trois points : le réel 1 possède trois antécédents. La droite $y = 2{,}5$ n'en rencontre aucun : le réel 2,5 n'a pas d'antécédent.

$$\boxed{f \text{ n'est ni injective, ni surjective.}}$$

3. L'ensemble d'arrivée est maintenant $[-2\,;2]$. Toute droite d'équation $y = a$ avec $a \in [-2\,;2]$ rencontre la courbe au moins une fois, mais la droite $y = 1$ la rencontre encore trois fois.

$$\boxed{g \text{ est surjective, mais toujours pas injective.}}$$

Restreindre l'ensemble d'arrivée a créé la surjectivité, sans rien changer à l'injectivité.

4. Il faut choisir I de sorte que chaque droite $y = a$, pour $a \in [-2\,;2]$, rencontre la courbe restreinte exactement une fois : autrement dit, un intervalle sur lequel φ est monotone et prend toutes les valeurs de $[-2\,;2]$.

$$\boxed{I = [-2\,;-1] \qquad \text{ou} \qquad I = [-1\,;1] \qquad \text{ou} \qquad I = [1\,;2]}$$

Il y a donc trois réponses possibles. Sur $[-2\,;-1]$ et $[1\,;2]$, la fonction croît de -2 à 2 ; sur $[-1\,;1]$, elle décroît de 2 à -2.

EXERCICE 14 ⋆⋆

1. L'application $x \mapsto 2x + 3$ est affine de coefficient directeur non nul :

$$\boxed{E = \mathbb{R} \quad , \quad F = \mathbb{R} \quad , \quad \varphi^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}}$$

2. On écrit $x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$. La fonction est strictement croissante sur $[-1\,;+\infty[$, où elle prend toutes les valeurs de $[-1\,;+\infty[$:

$$\boxed{E = [-1\,;+\infty[\quad , \quad F = [-1\,;+\infty[\quad , \quad \varphi^{-1}(y) = -1 + \sqrt{y+1}}$$

Le choix $E =]-\infty\,;-1]$ convient également, avec $\varphi^{-1}(y) = -1 - \sqrt{y+1}$.

3. L'inverse est défini et à valeurs dans $\mathbb{R}^*$:

$$\boxed{E = \mathbb{R}^* \quad , \quad F = \mathbb{R}^* \quad , \quad \varphi^{-1}(y) = \frac{1}{y}}$$

Cette application est sa propre réciproque : c'est l'involution rencontrée à l'exercice 6.

4. L'exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et à valeurs strictement positives, avec pour limites 0 et $+\infty$:

$$\boxed{E = \mathbb{R} \quad , \quad F =]0\,;+\infty[\quad , \quad \varphi^{-1}(y) = \ln(y)}$$

Piège : prendre $F = \mathbb{R}$ pour l'exponentielle détruirait la surjectivité, puisqu'aucun réel négatif n'a d'antécédent.

Bijection réciproque

EXERCICE 15 ⋆

1. *Injectivité.* Si $3x - 5 = 3x' - 5$, alors $3x = 3x'$ puis $x = x'$.

Surjectivité. Soit $y \in \mathbb{R}$. Posons $x = \dfrac{y+5}{3}$, qui est un réel, et $f(x) = 3 \times \dfrac{y+5}{3} - 5 = y$.

$$\boxed{f \text{ est bijective, et } f^{-1}(y) = \frac{y+5}{3}}$$

Vérification : $f^{-1}(f(x)) = \dfrac{(3x-5)+5}{3} = x$ ✓

2. La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc injective, et tout réel y admet $y^{1/3}$ pour antécédent.

$$\boxed{g \text{ est bijective, et } g^{-1}(y) = y^{1/3}}$$

Vérification : $g^{-1}(g(x)) = \left(x^3\right)^{1/3} = x$ ✓

3. Vérifions d'abord que h est bien à valeurs dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Si $\dfrac{x+1}{x-2} = 1$, alors $x + 1 = x - 2$, ce qui est absurde.

Injectivité. Soient x et x' dans $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ tels que $h(x)=h(x')$:

$$\frac{x+1}{x-2}=\frac{x'+1}{x'-2} \iff (x+1)(x'-2)=(x'+1)(x-2) \iff -2x+x'=-2x'+x \iff x=x'$$

Surjectivité. Soit $y\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Posons $x=\dfrac{2y+1}{y-1}$, bien défini car $y\neq 1$. Ce réel est différent de 2 : sinon $2y+1=2y-2$, ce qui est absurde. Et l'on vérifie que $h(x)=y$.

$$\boxed{h \text{ est bijective, et } h^{-1}(y)=\frac{2y+1}{y-1}}$$

EXERCICE 16 ⋆⋆

1. On écrit $f(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$. Sur $I=]-\infty\,;2]$, la fonction est strictement décroissante, avec $f(2)=-1$ et $f(x)\to+\infty$ quand $x\to-\infty$:

$$\boxed{J=[-1\,;+\infty[}$$

Soit $y\in J$. L'équation $(x-2)^2-1=y$ équivaut à $(x-2)^2=y+1$, avec $y+1\geqslant 0$, donc à $x-2=\pm\sqrt{y+1}$. La contrainte $x\leqslant 2$ impose $x=2-\sqrt{y+1}$: chaque y de J a donc un unique antécédent dans I.

$$\boxed{f \text{ réalise une bijection de } I \text{ sur } J, \text{ et } f^{-1}(y)=2-\sqrt{y+1}}$$

2. On écrit $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}=2-\dfrac{5}{x+2}$. Sur $I=]-2\,;+\infty[$, le dénominateur $x+2$ est strictement positif et croissant, donc f est strictement croissante, avec $f(x)\to-\infty$ quand $x\to-2^+$ et $f(x)\to 2^-$ quand $x\to+\infty$:

$$\boxed{J=]-\infty\,;2[}$$

Soit $y\in J$. On résout :

$$y=2-\frac{5}{x+2} \iff \frac{5}{x+2}=2-y \iff x+2=\frac{5}{2-y} \iff x=\frac{5}{2-y}-2=\frac{2y+1}{2-y}$$

Ce réel est bien strictement supérieur à -2 puisque $\dfrac{5}{2-y}>0$.

$$\boxed{f \text{ réalise une bijection de } I \text{ sur } J, \text{ et } f^{-1}(y)=\frac{2y+1}{2-y}}$$

3. Sur $I=\left[-\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$, la quantité $2x+3$ est positive et croissante, donc f est strictement croissante, avec $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-1$ et $f(x)\to+\infty$:

$$\boxed{J=[-1\,;+\infty[}$$

Soit $y\in J$. Comme $y+1\geqslant 0$:

$$y=\sqrt{2x+3}-1 \iff \sqrt{2x+3}=y+1 \iff 2x+3=(y+1)^2 \iff x=\frac{(y+1)^2-3}{2}$$

$$\boxed{f \text{ réalise une bijection de } I \text{ sur } J, \text{ et } f^{-1}(y)=\frac{(y+1)^2-3}{2}}$$

Piège : l'équivalence $\sqrt{u}=v \iff u=v^2$ n'est correcte que sous la condition $v\geqslant 0$, ici assurée par $y\in[-1\,;+\infty[$.

EXERCICE 17 ⋆⋆

1. C'est exactement la question 5 de l'exercice 12 :

$$\boxed{g \circ f \text{ est bijective.}}$$

2. Il suffit de vérifier que $f^{-1} \circ g^{-1}$ se comporte comme la réciproque de $g \circ f$. Pour tout $z \in G$:

$$((g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}))(z) = g\Big(f(f^{-1}(g^{-1}(z)))\Big) = g(g^{-1}(z)) = z$$

et pour tout $x \in E$:

$$((f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f))(x) = f^{-1}\Big(g^{-1}(g(f(x)))\Big) = f^{-1}(f(x)) = x$$

Les deux composées valent donc Id_G et Id_E :

$$\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$$

3. *Première méthode.* On a $(g \circ f)(x) = (2x+1)^3$. En résolvant $y = (2x+1)^3$, il vient $2x+1 = y^{1/3}$, puis :

$$x = \frac{y^{1/3} - 1}{2}$$

Seconde méthode. On a $f^{-1}(y) = \dfrac{y-1}{2}$ et $g^{-1}(y) = y^{1/3}$, donc :

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(y) = f^{-1}(y^{1/3}) = \frac{y^{1/3} - 1}{2}$$

$$\boxed{(g \circ f)^{-1}(y) = \frac{y^{1/3} - 1}{2}}$$

4. On répond en une phrase :

$$\boxed{\text{Pour revenir en arrière, on défait les opérations dans l'ordre inverse.}}$$

Dans $g \circ f$, c'est f qui agit d'abord et g ensuite ; pour remonter, il faut donc défaire g d'abord, puis f. L'image est celle d'un vêtement : on enfile la chaussette puis la chaussure, on retire la chaussure puis la chaussette.

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. Supposons $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.
Injectivité. Soit $(x\,;x') \in E^2$ tel que $f(x) = f(x')$. En appliquant f :

$$x = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(f(x')) = (f \circ f)(x') = x'$$

Surjectivité. Soit $y \in E$. Posons $x = f(y)$, qui appartient à E. Alors $f(x) = (f \circ f)(y) = y$.

$$\boxed{\text{Une application involutive est bijective.}}$$

2. De $f \circ f = \mathrm{Id}_E$ et de la bijectivité de f, on tire, en composant par f^{-1} à gauche :

$$f^{-1} \circ f \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_E \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \boxed{f^{-1} = f}$$

3. On applique les deux questions précédentes :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Les quatre applications de l'exercice 6 sont bijectives et égales à leur} \\ \text{propre réciproque : } x \mapsto -x,\ x \mapsto \dfrac{1}{x},\ x \mapsto 1-x \ \text{ et } \ x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}.\end{array}}$$

4. On a $(u \circ u)(x) = 2 \times 2x = 4x$, qui ne vaut x que pour $x = 0$: u n'est pas involutive. Elle est pourtant bijective, de réciproque $y \mapsto \dfrac{y}{2}$.

La réciproque de la question 1 est fausse : une bijection n'est pas toujours involutive.

Image directe et image réciproque

EXERCICE 19 ⋆

A. L'application $f : x \mapsto 2x - 1$ est affine strictement croissante.

(1) L'image d'un intervalle par une fonction affine croissante est l'intervalle des images des bornes : $f(0) = -1$ et $f(3) = 5$.

$$\boxed{f([0\,;3]) = [-1\,;5]}$$

(2) On résout l'encadrement : $1 \leqslant 2x - 1 \leqslant 7 \iff 2 \leqslant 2x \leqslant 8 \iff 1 \leqslant x \leqslant 4$.

$$\boxed{f^{-1}([1\,;7]) = [1\,;4]}$$

(3) On résout $2x - 1 = 0$, soit $x = \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{f^{-1}(\{0\}) = \left\{\frac{1}{2}\right\}}$$

(4) Les images des entiers relatifs sont les nombres $2k - 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$$\boxed{f(\mathbb{Z}) = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{Z}\} \text{ : l'ensemble des entiers impairs.}}$$

B. L'application $g : x \mapsto x^2 - 1$.

(1) Sur $[-2\,;1]$, la quantité x^2 prend toutes les valeurs de $[0\,;4]$: le minimum 0 est atteint en $x = 0$ et le maximum 4 en $x = -2$.

$$\boxed{g([-2\,;1]) = [-1\,;3]}$$

Piège : il ne faut surtout pas se contenter des images des bornes, qui donneraient $[g(-2)\,;g(1)] = [3\,;0]$, dépourvu de sens. La fonction n'est pas monotone sur cet intervalle.

(2) On résout : $0 \leqslant x^2 - 1 \leqslant 3 \iff 1 \leqslant x^2 \leqslant 4 \iff 1 \leqslant |x| \leqslant 2$.

$$\boxed{g^{-1}([0\,;3]) = [-2\,;-1] \cup [1\,;2]}$$

(3) L'inégalité $x^2 - 1 < -2$ équivaut à $x^2 < -1$, ce qui est impossible.

$$\boxed{g^{-1}(\,]-\infty\,;-2[\,) = \varnothing}$$

(4) Le carré x^2 décrit $\mathbb{R}_+$ lorsque x décrit $\mathbb{R}$.

$$\boxed{g(\mathbb{R}) = [-1\,;+\infty[}$$

EXERCICE 20 ⋆⋆

1. L'application f n'est pas bijective : elle n'est ni injective, ni surjective (exercice 8, question 3, avec le cosinus ; le raisonnement est identique pour le sinus).

$$\boxed{\text{Notation incorrecte : } f^{-1}(y) \text{ n'a de sens que pour une bijection.}}$$

Il faut bien distinguer $f^{-1}(y)$, qui désigne un *élément* et suppose f bijective, de $f^{-1}(B)$, qui désigne une *partie* de l'ensemble de départ et a toujours un sens.

2. On cherche les réels dont le sinus est nul :

$$\boxed{f^{-1}(\{0\}) = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}}$$

3. Le sinus est positif exactement sur les intervalles $[2k\pi\,;\,(2k+1)\pi]$:

$$\boxed{f^{-1}([0\,;+\infty[) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2k\pi\,;\,(2k+1)\pi]}$$

4. Sur $[0\,;\pi]$, le sinus croît de 0 à 1 puis décroît de 1 à 0 : il prend toutes les valeurs de $[0\,;1]$.

$$\boxed{f([0\,;\pi]) = [0\,;1]}$$

5. L'image directe d'un singleton est le singleton de l'image :

$$\boxed{f(\{0\}) = \{\sin(0)\} = \{0\}}$$

6. Le sinus prend toutes les valeurs de $[-1\,;1]$ et aucune autre :

$$\boxed{f(\mathbb{R}) = [-1\,;1]}$$

C'est l'image de f au sens du cours : c'est en la prenant pour ensemble d'arrivée que l'on rend f surjective.

EXERCICE 21 ⋆⋆

1. Soit $x \in f^{-1}(B_1)$. Alors $f(x) \in B_1$, donc $f(x) \in B_2$ puisque $B_1 \subset B_2$, donc $x \in f^{-1}(B_2)$.

$$\boxed{B_1 \subset B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)}$$

2. Soit $x \in E$. On enchaîne les équivalences :

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\iff f(x) \in B_1 \cap B_2 \\ &\iff f(x) \in B_1 \ \text{ et } \ f(x) \in B_2 \\ &\iff x \in f^{-1}(B_1) \ \text{ et } \ x \in f^{-1}(B_2) \\ &\iff x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \end{aligned}$$

$$\boxed{f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)}$$

3. Le même enchaînement, en remplaçant partout « et » par « ou », donne :

$$\boxed{f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)}$$

4. Soit $y \in f(A_1)$. Il existe $x \in A_1$ tel que $f(x) = y$. Comme $A_1 \subset A_2$, ce x appartient aussi à A_2, donc $y \in f(A_2)$.

$$\boxed{A_1 \subset A_2 \implies f(A_1) \subset f(A_2)}$$

5. *Première inclusion.* Soit $y \in f(A_1 \cup A_2)$: il existe $x \in A_1 \cup A_2$ tel que $f(x) = y$. Si $x \in A_1$, alors $y \in f(A_1)$; sinon $x \in A_2$ et $y \in f(A_2)$. Dans les deux cas $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.

Réciproquement, $A_1 \subset A_1 \cup A_2$ donne $f(A_1) \subset f(A_1 \cup A_2)$ d'après la question 4, et de même pour A_2. La réunion de ces deux parties est donc incluse dans $f(A_1 \cup A_2)$.

$$\boxed{f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)}$$

6. On a $A_1 \cap A_2 \subset A_1$, donc $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1)$ d'après la question 4 ; de même $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_2)$. Une partie incluse dans deux ensembles est incluse dans leur intersection.

$$\boxed{f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)}$$

7. Soit $y \in f(f^{-1}(B_1))$. Il existe $x \in f^{-1}(B_1)$ tel que $y = f(x)$. Or dire que $x \in f^{-1}(B_1)$, c'est dire que $f(x) \in B_1$, c'est-à-dire $y \in B_1$.

$$\boxed{f(f^{-1}(B_1)) \subset B_1}$$

On observera l'asymétrie : l'image *réciproque* se comporte parfaitement bien vis-à-vis de l'intersection et de la réunion (questions 2 et 3), alors que l'image *directe* ne préserve que la réunion. C'est l'objet de l'exercice suivant.

EXERCICE 22 ⋆⋆⋆

1. On a $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, donc $f(A_1 \cap A_2) = \varnothing$. En revanche $f(A_1) = \{1\}$ et $f(A_2) = \{1\}$, donc :

$$f(A_1) \cap f(A_2) = \{1\} \neq \varnothing$$

$$\boxed{\text{L'inclusion 6 de l'exercice 21 peut être stricte.}}$$

Le phénomène est clair : -1 et 1 sont distincts mais ont la même image, ce que l'intersection des images ne peut pas distinguer.

2. Supposons f injective. L'inclusion directe est acquise. Réciproquement, soit $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$. Il existe $x_1 \in A_1$ et $x_2 \in A_2$ tels que $f(x_1) = y = f(x_2)$. Par injectivité, $x_1 = x_2$: ce point appartient donc à $A_1 \cap A_2$, et $y \in f(A_1 \cap A_2)$.

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est injective, } f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2).}$$

3. Soit $x \in A$. Alors $f(x) \in f(A)$ par définition de l'image directe, donc $x \in f^{-1}(f(A))$ par définition de l'image réciproque.

$$\boxed{A \subset f^{-1}(f(A))}$$

Contre-exemple à l'égalité : avec $f : x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $A = \{1\}$, on a $f(A) = \{1\}$ et :

$$f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\{1\}) = \{-1\ ;\ 1\} \neq A$$

4. Supposons f injective, et soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Alors $f(x) \in f(A)$: il existe $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$. Par injectivité, $x = a$, donc $x \in A$. Avec la question 3, on obtient la double inclusion.

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est injective, } f^{-1}(f(A)) = A.}$$

5. L'inclusion $f(f^{-1}(B)) \subset B$ est toujours vraie (question 7 de l'exercice 21).

Supposons $B \subset f(E)$, et soit $y \in B$. Comme $y \in f(E)$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Alors $f(x) = y \in B$, donc $x \in f^{-1}(B)$, et $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$. D'où l'égalité.

Réciproquement, si $f(f^{-1}(B)) = B$, alors B est une image directe par f, donc $B \subset f(E)$.

$$\boxed{f(f^{-1}(B)) = B \iff B \subset f(E)}$$

Si f est surjective, $f(E) = F$ et la condition est automatiquement vérifiée.

Exercices de synthèse

EXERCICE 23 : VRAI OU FAUX

1. **Fausse** Une application est le triplet formé de l'ensemble de départ, de l'ensemble d'arrivée et du graphe. L'exercice 2 en donne trois illustrations.

2. **Vraie** C'est la propriété 1 du cours, qui autorise à écrire $h \circ g \circ f$ sans parenthèses.

3. **Fausse** L'exercice 4 fournit trois contre-exemples, dont $f : x \mapsto x + 1$ et $g : x \mapsto x^2$.

4. **Vraie** C'est la définition même de l'injectivité : *au plus* un antécédent, éventuellement aucun.

5. **Vraie** Par construction, tout élément de $f(E)$ admet au moins un antécédent. C'est la remarque du cours, illustrée au point (b) de son exemple.

6. **Fausse** L'image réciproque d'une *partie* a toujours un sens, même si f n'est pas bijective. C'est un abus de notation signalé par le cours, et travaillé à l'exercice 20.

7. **Vraie** C'est la propriété 2 du cours.

8. **Fausse** C'est la question 1 de l'exercice 2 : $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ sont deux applications distinctes, la seconde étant surjective et non la première.

9. **Vraie** Par définition, $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$ est constituée d'éléments de E.

10. **Vraie** C'est la question 3 de l'exercice 22, l'égalité n'ayant lieu que si f est injective.

EXERCICE 24 ⋆⋆⋆

1. Soient x et x' dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ tels que $f(x) = f(x')$:

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{x+1} = \frac{x'-1}{x'+1} &\iff (x-1)(x'+1) = (x'-1)(x+1)\\ &\iff xx' + x - x' - 1 = xx' + x' - x - 1\\ &\iff 2x = 2x' \iff x = x'\end{aligned}$$

$$\boxed{f \text{ est injective.}}$$

2. Soit $y \in \mathbb{R}$. On cherche $x \neq -1$ tel que $f(x) = y$:

$$\frac{x-1}{x+1} = y \iff x - 1 = y(x+1) \iff x(1-y) = 1 + y$$

Si $y = 1$, cette équation devient $0 = 2$, sans solution. Sinon, elle donne $x = \dfrac{1+y}{1-y}$, qui est bien différent de -1 : sinon $1 + y = -1 + y$, ce qui est absurde.

$$\boxed{f(\mathbb{R} \setminus \{-1\}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}}$$

3. L'application f est injective et prend pour valeurs exactement les éléments de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$\boxed{f \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \setminus \{-1\} \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \{1\}, \text{ et } f^{-1}(y) = \frac{1+y}{1-y}.}$$

4. La composée $f \circ f$ n'a de sens qu'aux points x où $f(x)$ appartient encore à $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Or :

$$f(x) = -1 \iff x - 1 = -(x+1) \iff 2x = 0 \iff x = 0$$

La composée est donc définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\ ;\ 0\}$, et pour un tel x :

$$(f \circ f)(x) = \frac{f(x)-1}{f(x)+1} = \frac{\dfrac{x-1}{x+1} - 1}{\dfrac{x-1}{x+1} + 1} = \frac{\dfrac{(x-1)-(x+1)}{x+1}}{\dfrac{(x-1)+(x+1)}{x+1}} = \frac{-2}{2x} = -\frac{1}{x}$$

$$\boxed{f \circ f : x \mapsto -\frac{1}{x} \quad \text{sur} \quad \mathbb{R} \setminus \{-1\,;\,0\}}$$

Piège : on pouvait s'attendre à retrouver Id, comme pour les involutions de l'exercice 6. Ce n'est pas le cas : f n'est pas involutive.

5. En composant $f \circ f$ avec elle-même, on obtient, là où c'est défini :

$$(f \circ f) \circ (f \circ f) : x \mapsto -\frac{1}{-\frac{1}{x}} = x$$

$$\boxed{f \circ f \circ f \circ f = \mathrm{Id} \quad \text{sur} \quad \mathbb{R} \setminus \{-1\,;\,0\,;\,1\}}$$

En composant cette égalité par f^{-1} à gauche, il vient $f^{-1} = f \circ f \circ f$. On peut le vérifier directement, pour $y \notin \{-1\,;\,0\}$:

$$(f \circ f \circ f)(y) = f\left(-\frac{1}{y}\right) = \frac{-\frac{1}{y} - 1}{-\frac{1}{y} + 1} = \frac{\dfrac{-1-y}{y}}{\dfrac{-1+y}{y}} = \frac{-1-y}{y-1} = \frac{1+y}{1-y}$$

qui est bien l'expression de f^{-1} trouvée à la question 3.

$$\boxed{f^{-1} = f \circ f \circ f}$$

Piège : cette égalité de *formules* ne doit pas faire oublier les ensembles de définition. L'application f^{-1} est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ tout entier, alors que $f \circ f \circ f$ ne l'est que sur $\mathbb{R} \setminus \{0\,;\,1\}$: les deux applications coïncident partout où la seconde a un sens, mais ne sont pas égales au sens strict du cours.

6. On écrit $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1} = 1 - \dfrac{2}{x+1}$, expression strictement croissante sur $[0\,;1]$. Comme $f(0) = -1$ et $f(1) = 0$:

$$\boxed{f([0\,;1]) = [-1\,;0]}$$

Pour l'image réciproque, on résout le double encadrement. D'une part :

$$\frac{x-1}{x+1} \geqslant 0 \iff x \in]-\infty\,;-1[\cup [1\,;+\infty[$$

D'autre part :

$$\frac{x-1}{x+1} \leqslant 1 \iff \frac{(x-1)-(x+1)}{x+1} \leqslant 0 \iff \frac{-2}{x+1} \leqslant 0 \iff x+1 > 0 \iff x > -1$$

En intersectant les deux conditions :

$$\boxed{f^{-1}([0\,;1]) = [1\,;+\infty[}$$

EXERCICE 25 ⋆⋆⋆

1. Aucun élément de E n'appartient à $\varnothing$, et tous appartiennent à E :

$$\boxed{\mathbf{1}_\varnothing \text{ est l'application constante égale à 0, et } \mathbf{1}_E \text{ l'application constante égale à 1.}}$$

2. Soit $x \in E$. On distingue deux cas.

- Si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ et $x \in B$, donc $\mathbf{1}_A(x) = \mathbf{1}_B(x) = 1$ et le produit vaut 1. Or $\mathbf{1}_{A\cap B}(x) = 1$.
- Sinon, $x \notin A$ ou $x \notin B$: l'un au moins des deux facteurs est nul, donc le produit vaut 0. Or $\mathbf{1}_{A\cap B}(x) = 0$.

Les deux membres coïncident dans les deux cas :

$$\boxed{\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B}$$

3. Soient A et B deux parties de E telles que $\Phi(A) = \Phi(B)$, c'est-à-dire $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$.

Soit $x \in A$. Alors $\mathbf{1}_A(x) = 1$, donc $\mathbf{1}_B(x) = 1$, donc $x \in B$. Ainsi $A \subset B$, et le raisonnement symétrique donne $B \subset A$.

$$\boxed{\Phi \text{ est injective.}}$$

4. Soit g un élément de $\{0\ ;\ 1\}^E$, c'est-à-dire une application de E dans $\{0\ ;\ 1\}$. Posons :

$$A = g^{-1}(\{1\}) = \{x \in E \mid g(x) = 1\}$$

qui est bien une partie de E. Soit $x \in E$:

- si $g(x) = 1$, alors $x \in A$, donc $\mathbf{1}_A(x) = 1 = g(x)$;
- si $g(x) = 0$, alors $x \notin A$, donc $\mathbf{1}_A(x) = 0 = g(x)$.

Ces deux applications, de mêmes ensembles de départ et d'arrivée, coïncident en tout point : elles sont égales.

$$\boxed{\Phi(A) = g, \text{ donc } \Phi \text{ est surjective.}}$$

5. On conclut :

$$\boxed{\Phi \text{ est une bijection de } \mathcal{P}(E) \text{ sur } \{0\ ;\ 1\}^E.}$$

Supposons E fini de cardinal n. La question 4 de l'exercice 3 donne :

$$\operatorname{card}\left(\{0\ ;\ 1\}^E\right) = 2^n$$

et une bijection entre deux ensembles finis impose l'égalité de leurs cardinaux :

$$\boxed{\operatorname{card} \mathcal{P}(E) = 2^n}$$

On retrouve ainsi, et cette fois par une démonstration, le résultat que le chapitre 1 s'était contenté d'annoncer après l'avoir vérifié sur de petits exemples.