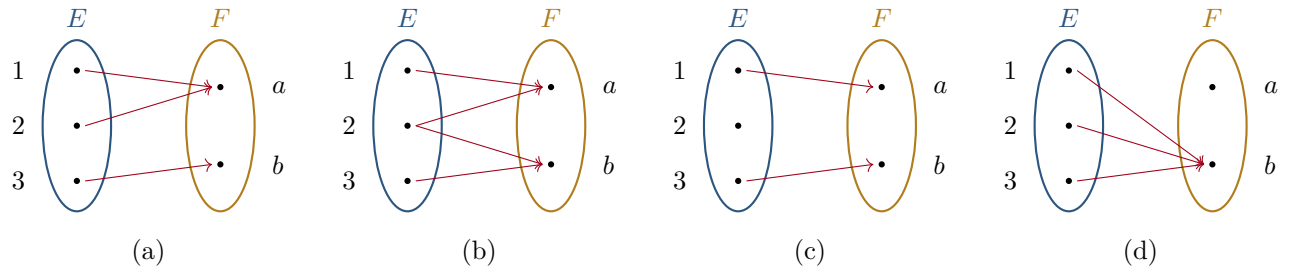
EXERCICES – CHAPITRE 2

APPLICATIONS

Généralités

EXERCICE 1 ⋆

1. Les quatre diagrammes sagittaux ci-dessous définissent-ils une application de E dans F ? Justifier.



(a) (b) (c) (d)

2. Même question pour les correspondances suivantes, en précisant à chaque fois ce qui fait défaut le cas échéant.

1. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$

2. $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$

3. $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$

4. $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n^2 \end{array} \right.$

EXERCICE 2 ⋆

Dans chacun des cas suivants, dire si les deux applications f et g sont égales. Justifier en examinant les trois composantes d'une application.

1. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$

2. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x+1)^2 \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+2x+1 \end{array} \right.$

3. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2} \end{array} \right.$

4. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$

5. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{x} \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array} \right.$

EXERCICE 3 ⋆⋆

On pose $E = \{1\,;\,2\,;\,3\}$ et $F = \{a\,;\,b\}$.

1. Combien y a-t-il d'applications de E dans F ? Les décrire toutes, par exemple en donnant le triplet $(f(1)\,;f(2)\,;f(3))$.
2. Parmi elles, lesquelles sont injectives ? lesquelles sont surjectives ?
3. Reprendre les deux questions précédentes pour les applications de F dans E.
4. Conjecturer une expression du nombre d'éléments de F^E lorsque E et F sont finis.

Composition

EXERCICE 4 ⋆

Dans chacun des cas suivants, f et g sont des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$, puis conclure.

1. $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x^2$
2. $f(x) = x - 3$ et $g(x) = x^3$
3. $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $g(x) = x + 1$
4. $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^2$

EXERCICE 5 ⋆

Soient f, g et h les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x$ et $h(x) = x^2$.

1. Calculer $g \circ f$, puis $h \circ (g \circ f)$.
2. Calculer $h \circ g$, puis $(h \circ g) \circ f$. Que constate-t-on ?
3. Calculer $f \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ et $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \circ f$.
4. Ces calculs démontrent-ils l'associativité de la composition ? Justifier.

EXERCICE 6 ⋆⋆

Une application $f : E \to E$ est dite *involutive* lorsque $f \circ f = \mathrm{Id}_E$. Montrer que les applications suivantes le sont.

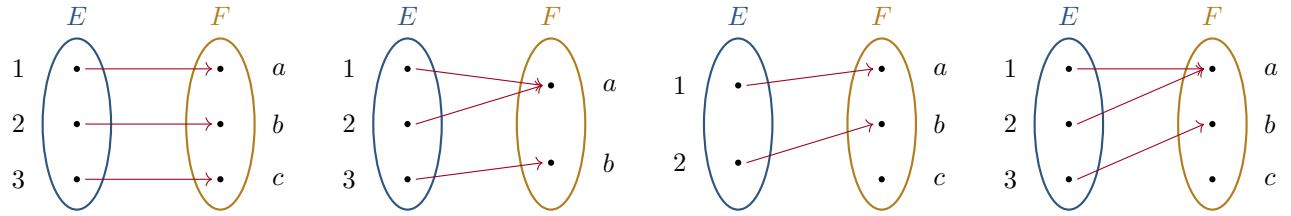
1. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -x \end{array}\right.$
2. $g : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}\right.$
3. $u : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 - x \end{array}\right.$
4. $v : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array}\right.$

Pour la dernière, on vérifiera d'abord que $v(x)$ appartient bien à $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Injectivité, surjectivité, bijectivité

EXERCICE 7 ⋆

Chacun des quatre diagrammes ci-dessous définit une application de E dans F. Pour chacune, dire si elle est injective, surjective, bijective, ou aucune des trois. Justifier en exhibant l'élément qui met en défaut la propriété.



(a) (b) (c) (d)

EXERCICE 8 ⋆⋆

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ? On rédigera en suivant les deux schémas donnés dans le cours.

1. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$
2. $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array} \right.$
3. $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array} \right.$
4. $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & [0\,;1[\\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2}{x^2+1} \end{array} \right.$
5. $v : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & \varphi(0) \end{array} \right.$
6. $w : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}([0\,;1]\,,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$

Dans les deux derniers cas, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ désigne l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{C}([0\,;1]\,,\mathbb{R})$ celui des fonctions continues de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 9 ⋆⋆

On considère l'application :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x+y\,;\,x+2y) \end{array} \right.$$

1. L'application f est-elle injective ?
2. L'application f est-elle surjective ?
3. Conclure.

EXERCICE 10 ⋆⋆

On note $\mathcal{P}air$ l'ensemble des entiers naturels pairs. Démontrer que l'application :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathcal{P}air \\ n & \longmapsto & 2n \end{array} \right.$$

est bijective, et préciser sa bijection réciproque.

Il y a donc « autant » d'entiers naturels que d'entiers naturels pairs, bien que le second ensemble soit strictement inclus dans le premier. Commenter ce résultat.

EXERCICE 11 ⋆⋆

On considère les cinq applications suivantes, qui se calculent toutes de la même façon.

1. $f_1 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$
2. $f_2 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$
3. $f_3 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$
4. $f_4 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$
5. $f_5 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_- & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$

1. Pour chacune, déterminer si elle est injective, surjective, bijective.
2. Préciser la bijection réciproque lorsqu'elle existe.
3. Quelle conclusion générale tirer de cet exercice ?

EXERCICE 12 ⋆⋆

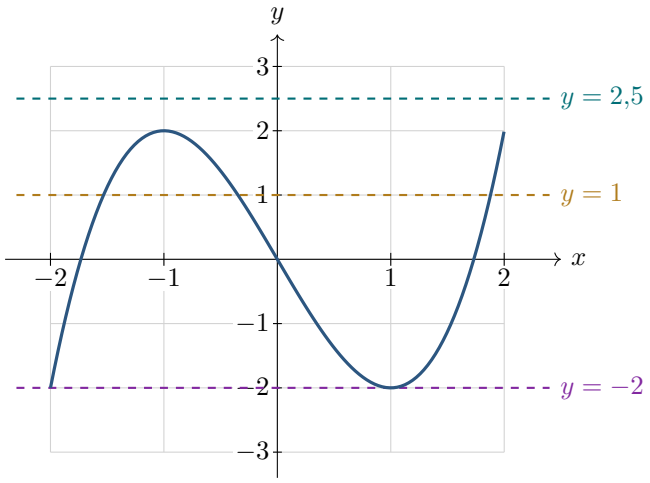
Soient E, F et G trois ensembles, ainsi que deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

1. Démontrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Démontrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
3. On pose $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & n \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ k & \longmapsto & |k| \end{array} \right.$. Déterminer $g \circ f$.
4. En déduire un exemple où $g \circ f$ est injective sans que g le soit, et un exemple où $g \circ f$ est surjective sans que f le soit.
5. Démontrer que si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.

Le rôle des ensembles de départ et d'arrivée

EXERCICE 13 ⋆

Soit φ la fonction définie sur $[-2\,;2]$ par $\varphi(x) = x^3 - 3x$, dont la courbe représentative est donnée ci-dessous. Trois droites horizontales y ont été tracées.



1. Pour chacune des trois droites, lire le nombre de points d'intersection avec la courbe.
2. L'application $f : \left| \begin{array}{ccc} [-2\,;2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 - 3x \end{array} \right.$ est-elle injective ? surjective ?

3. Même question pour $g : \left| \begin{array}{ccc} [-2\,;2] & \longrightarrow & [-2\,;2] \\ x & \longmapsto & x^3 - 3x \end{array} \right.$.

4. Proposer un intervalle $I \subset [-2\,;2]$ tel que $h : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & [-2\,;2] \\ x & \longmapsto & x^3 - 3x \end{array} \right.$ soit bijective. Y a-t-il plusieurs réponses possibles ?

EXERCICE 14 ⋆⋆

Pour chacune des expressions suivantes, proposer un ensemble de départ E et un ensemble d'arrivée F, aussi grands que possible, rendant l'application $x \mapsto \varphi(x)$ bijective de E dans F.

1. $\varphi(x) = 2x + 3$
2. $\varphi(x) = x^2 + 2x$
3. $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$
4. $\varphi(x) = \mathrm{e}^x$

Bijection réciproque

EXERCICE 15 ⋆

Démontrer que chacune des applications suivantes est bijective, puis déterminer sa bijection réciproque. On vérifiera à chaque fois que $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$.

1. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x - 5 \end{array} \right.$
2. $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array} \right.$
3. $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{x-2} \end{array} \right.$

EXERCICE 16 ⋆⋆

Dans chacun des cas suivants, déterminer $J = f(I)$, montrer que f réalise une bijection de I sur J, puis préciser f^{-1}.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ et $I =]-\infty\,;2]$
2. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$ et $I =]-2\,;+\infty[$
3. $f(x) = \sqrt{2x+3} - 1$ et $I = \left[-\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$

EXERCICE 17 ⋆⋆

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications bijectives.

1. Justifier que $g \circ f$ est bijective. On pourra utiliser l'exercice 12.
2. Démontrer que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
3. Application : on pose $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x^3$, toutes deux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Calculer $(g \circ f)^{-1}$ de deux façons différentes, et vérifier que les résultats coïncident.
4. Pourquoi l'ordre des deux applications est-il inversé dans la formule de la question 2 ?

EXERCICE 18 ⋆⋆

On reprend les quatre applications involutives de l'exercice 6.

1. Démontrer qu'une application involutive $f : E \to E$ est nécessairement bijective.
2. Que vaut alors f^{-1} ?
3. En déduire les bijections réciproques des quatre applications de l'exercice 6.
4. L'application $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x \end{array} \right.$ est-elle involutive ? Est-elle bijective ? Que peut-on en conclure sur la réciproque de la question 1 ?

Image directe et image réciproque

EXERCICE 19 ⋆

A. On considère $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x-1 \end{array} \right.$. Déterminer :

1. $f([0\,;3])$
2. $f^{-1}([1\,;7])$
3. $f^{-1}(\{0\})$
4. $f(\mathbb{Z})$

B. On considère $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2-1 \end{array} \right.$. Déterminer :

1. $g([-2\,;1])$
2. $g^{-1}([0\,;3])$
3. $g^{-1}(\,]-\infty\,;-2[\,)$
4. $g(\mathbb{R})$

EXERCICE 20 ⋆⋆

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array} \right.$. Déterminer les ensembles suivants, après avoir vérifié dans chaque cas si la notation employée a un sens.

1. $f^{-1}(0)$
2. $f^{-1}(\{0\})$
3. $f^{-1}([0\,;+\infty[)$
4. $f([0\,;\pi])$
5. $f(\{0\})$
6. $f(\mathbb{R})$

EXERCICE 21 ⋆⋆

Soit $f : E \to F$ une application, A_1 et A_2 deux parties de E, B_1 et B_2 deux parties de F. Démontrer les propriétés suivantes.

1. $B_1 \subset B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$
2. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
3. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
4. $A_1 \subset A_2 \implies f(A_1) \subset f(A_2)$
5. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
6. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$
7. $f(f^{-1}(B_1)) \subset B_1$

EXERCICE 22 ⋆⋆⋆

Les propriétés 6 et 7 de l'exercice 21 sont des inclusions, et non des égalités. Cet exercice cherche à quelle condition ce sont des égalités. Soit $f : E \to F$ une application.

1. Avec $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$, déterminer $f(A_1 \cap A_2)$ et $f(A_1) \cap f(A_2)$ pour $A_1 = \{-1\}$ et $A_2 = \{1\}$. Conclure.
2. Démontrer que si f est injective, alors $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ pour toutes parties A_1 et A_2 de E.
3. Soit A une partie de E. Démontrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$, puis donner un contre-exemple à l'égalité.
4. Démontrer que si f est injective, alors $f^{-1}(f(A)) = A$ pour toute partie A de E.
5. Soit B une partie de F. Démontrer que $f(f^{-1}(B)) = B$ si et seulement si $B \subset f(E)$. Que devient cette condition lorsque f est surjective ?

Exercices de synthèse

EXERCICE 23 : VRAI OU FAUX

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Dans tout l'exercice, f désigne une application de E dans F.

1. Une application est entièrement déterminée par sa formule de calcul.
2. La composition des applications est associative.
3. La composition des applications est commutative.
4. Si f est injective, tout élément de F admet au plus un antécédent par f.
5. Toute application devient surjective si l'on remplace son ensemble d'arrivée par $f(E)$.
6. L'écriture $f^{-1}(B)$, où B est une partie de F, suppose que f soit bijective.
7. Si f est bijective, alors $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$.
8. Deux applications ayant la même formule mais des ensembles d'arrivée différents sont égales.
9. L'image réciproque d'une partie de F est une partie de E.
10. Pour toute partie A de E, on a $A \subset f^{-1}(f(A))$.

EXERCICE 24 ⋆⋆⋆

On considère l'application :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x-1}{x+1} \end{array} \right.$$

1. Démontrer que f est injective.
2. Déterminer $f(\mathbb{R} \setminus \{-1\})$.
3. En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ sur un ensemble à préciser, puis déterminer f^{-1}.
4. Calculer $f \circ f$. Le résultat est-il celui que l'on pouvait attendre ?
5. En déduire l'expression de $f \circ f \circ f \circ f$, puis exprimer f^{-1} à l'aide de compositions de f.
6. Déterminer $f([0\,;1])$ et $f^{-1}([0\,;1])$.

EXERCICE 25 ⋆⋆⋆

Soit E un ensemble. Pour toute partie A de E, on appelle *fonction indicatrice* de A l'application :

$$\mathbf{1}_A : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0\ ;\ 1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array} \right.$$

On considère alors l'application Φ qui à toute partie de E associe sa fonction indicatrice :

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \{0\ ;\ 1\}^E \\ A & \longmapsto & \mathbf{1}_A \end{array} \right.$$

1. Décrire les applications $\mathbf{1}_\varnothing$ et $\mathbf{1}_E$.
2. Démontrer que, pour toutes parties A et B de E et tout $x \in E$:
$$\mathbf{1}_{A\cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_B(x)$$
3. Démontrer que Φ est injective.
4. Soit g un élément de $\{0\ ;\ 1\}^E$. Vérifier que $A = g^{-1}(\{1\})$ convient, et en déduire que Φ est surjective.
5. Conclure. À l'aide de l'exercice 3, retrouver le nombre d'éléments de $\mathcal{P}(E)$ lorsque E possède n éléments.