EXERCICES – CHAPITRE 3

GROUPES

Lois de composition interne

EXERCICE 1 ⋆

Les correspondances suivantes définissent-elles une loi de composition interne sur l'ensemble indiqué ? Justifier, en exhibant un contre-exemple le cas échéant.

1. la soustraction sur $\mathbb{N}$
2. la soustraction sur $\mathbb{Z}$
3. la division sur $\mathbb{R}$
4. la division sur $\mathbb{R}^*$
5. $x * y = \dfrac{x+y}{2}$ sur $\mathbb{Z}$
6. $x * y = \dfrac{x+y}{2}$ sur $\mathbb{Q}$
7. $x * y = x^y$ sur $\mathbb{N}^*$
8. $x * y = \sqrt{x+y}$ sur $\mathbb{R}_+$
9. $\cup$ sur $\mathcal{P}(E)$
10. $A * B = A \setminus B$ sur $\mathcal{P}(E)$

EXERCICE 2 ⋆

Pour chacune des lois suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, déterminer si elle est commutative et si elle est associative.

1. $x * y = x + y + xy$
2. $x * y = \dfrac{x+y}{2}$
3. $x * y = x$
4. $x * y = x^2 y$

EXERCICE 3 ⋆⋆

Pour chacune des lois suivantes, étudier dans cet ordre : l'internité, la commutativité, l'associativité, l'existence d'un neutre, puis les éléments symétrisables.

1. $x * y = x + y - xy$ sur $\mathbb{R}$
2. $x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$ sur $\mathbb{R}_+$
3. $x * y = x + y - 3$ sur $\mathbb{Z}$

Que remarque-t-on à la dernière question ?

Neutre, symétrique et tables de Cayley

EXERCICE 4 ⋆

Pour chacune des lois suivantes, déterminer l'élément neutre lorsqu'il existe, puis l'ensemble des éléments symétrisables.

1. $(\mathbb{N}\,;\times)$
2. $(\mathbb{R}\,;\times)$
3. $(\mathcal{P}(E)\,;\cap)$
4. $(\mathcal{P}(E)\,;\cup)$
5. $(E^E\,;\circ)$
6. $(\mathcal{P}(E)\,;\Delta)$, où $A\,\Delta\,B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

La dernière loi, rencontrée au chapitre 1, réserve une surprise : la commenter.

EXERCICE 5 ⋆

On donne ci-dessous les tables de Cayley de deux lois, définies respectivement sur $E = \{e\,;a\,;b\,;c\}$ et sur $F = \{e\,;a\,;b\}$. On admet que la première loi est associative.

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

$\perp$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e	a
b	b	a	e

1. Pour chacune des deux lois, dire si elle est commutative, en justifiant par une lecture de la table.
2. Pour chacune, déterminer l'élément neutre.
3. Pour chacune, déterminer les éléments symétrisables.
4. Les trois lectures précédentes sont favorables dans les deux cas. Pourtant, l'une des deux lois ne fait pas de son ensemble un groupe. Laquelle ? On pourra calculer $(a \perp a) \perp b$ puis $a \perp (a \perp b)$.
5. Observer par ailleurs la ligne de a dans la seconde table. Que remarque-t-on, et en quoi cela distingue-t-il cette table de la première ?

EXERCICE 6 ⋆⋆

On note Δ la différence symétrique définie à l'exercice 4, et l'on pose $E = \{a\,;b\}$.

1. Dresser la table de Cayley de $(\mathcal{P}(E)\,;\Delta)$.
2. Cette loi fait-elle de $\mathcal{P}(E)$ un groupe ? On admettra l'associativité.
3. Comparer cette table à celle de la multiplication sur $\{1\,;\mathrm{i}\,;-1\,;-\mathrm{i}\}$, donnée dans le cours. Les deux groupes se comportent-ils de la même façon ?

Groupes

EXERCICE 7 ⋆

Les ensembles suivants, munis des lois considérées, sont-ils des groupes ? On suivra l'ordre de vérification donné par l'acronyme **IANS**, et l'on précisera le cas échéant lequel des quatre axiomes échoue.

1. $(\mathbb{N}\,;+)$
2. $(\mathbb{N}\,;\times)$
3. $(\mathbb{Z}\,;+)$
4. $(\mathbb{Z}\,;\times)$
5. $(n\mathbb{Z}\,;+)$, où $n \in \mathbb{N}^*$
6. $(\mathbb{R}\,;+)$
7. $(\mathbb{R}\,;\times)$
8. $(\mathbb{R}^*\,;\times)$
9. $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\,;\circ)$
10. $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\,;+)$

Préciser enfin lesquels de ces groupes sont abéliens.

EXERCICE 8 ⋆⋆

Les ensembles suivants, munis des lois considérées, sont-ils des groupes ? Sont-ils abéliens ?

1. G est l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto ax + b$, avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, muni de la composition $\circ$.
2. G est l'ensemble des fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition.
3. $G = \{f_1 ; f_2 ; f_3 ; f_4\}$, muni de la composition $\circ$, où pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:
$$f_1(x) = x \qquad f_2(x) = -x \qquad f_3(x) = \frac{1}{x} \qquad f_4(x) = -\frac{1}{x}$$
4. $G =]-1 ; 1[$, muni de la loi $\star$ définie par :
$$\forall (x ; y) \in G^2, \qquad x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$$
5. $G = \mathbb{R}^2$, muni de la loi $\diamond$ définie par :
$$\forall ((x ; y) ; (x' ; y')) \in G^2, \qquad (x ; y) \diamond (x' ; y') = (x + x' ; y\,\mathrm{e}^{x'} + y'\,\mathrm{e}^{-x})$$

Pour la question 3, on pourra dresser la table de Cayley de la loi.

EXERCICE 9 ⋆⋆

On considère la loi de composition interne $*$ définie sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ par :
$$\forall ((x ; y) ; (x' ; y')) \in (\mathbb{R}^* \times \mathbb{R})^2, \qquad (x ; y) * (x' ; y') = (xx' ; xy' + y)$$

1. Démontrer que $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} ; *)$ est un groupe. Est-il abélien ?
2. Calculer $(x ; y)^2$ puis $(x ; y)^3$.
3. Conjecturer une expression de $(x ; y)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, et la démontrer.
4. Simplifier cette expression dans le cas $x \neq 1$, puis dans le cas $x = 1$.

EXERCICE 10 ⋆⋆

On pose $G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et l'on définit sur G la loi $*$ par :
$$\forall (x ; y) \in G^2, \qquad x * y = x + y + xy$$

1. Vérifier que $1 + x * y = (1 + x)(1 + y)$, puis en déduire que $*$ est bien une loi interne sur G.
2. Démontrer que $(G ; *)$ est un groupe abélien, en précisant le neutre et le symétrique d'un élément.
3. L'égalité de la question 1 suggère un lien entre $(G ; *)$ et $(\mathbb{R}^* ; \times)$. Le formuler.

EXERCICE 11 ⋆⋆

On pose $E = \{1 ; 2 ; 3\}$ et l'on note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des bijections de E dans E, muni de la composition.

1. Combien $\mathcal{S}(E)$ possède-t-il d'éléments ? Décrire chacun d'eux par le triplet $(\sigma(1) ; \sigma(2) ; \sigma(3))$ de ses images.
2. Démontrer que $(\mathcal{S}(E) ; \circ)$ est un groupe. On pourra s'appuyer sur les résultats du chapitre 2 pour trois des quatre axiomes.
3. On note $\sigma = (2 ; 1 ; 3)$ et $\tau = (1 ; 3 ; 2)$. Calculer $\sigma \circ \tau$ et $\tau \circ \sigma$. Le groupe $\mathcal{S}(E)$ est-il abélien ?
4. Déterminer le symétrique de chacun des six éléments.

Premières propriétés et groupe produit

EXERCICE 12 ⋆

Soit $(G\,;\cdot)$ un groupe de neutre e, et a, b, x des éléments de G.

1. Démontrer que $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$.
2. Démontrer que $(xyz)^{-1} = z^{-1}y^{-1}x^{-1}$ pour tous x, y, z de G.
3. Résoudre dans G l'équation $ax = b$, puis l'équation $xa = b$. Ces deux solutions coïncident-elles en général ?
4. Simplifier $\left(aba^{-1}\right)^{-1}$, puis $\left(aba^{-1}\right)^{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Démontrer que si G est abélien, alors $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$.

EXERCICE 13 ⋆⋆

Soit $(G\,;\cdot)$ un groupe de neutre e.

1. Démontrer que pour tous a, x, y de G : $ax = ay \Rightarrow x = y$, et $xa = ya \Rightarrow x = y$.
2. En déduire que, dans la table de Cayley d'un groupe fini, chaque élément apparaît exactement une fois dans chaque ligne et dans chaque colonne.
3. Relire à cette lumière la seconde table de l'exercice 5.
4. On suppose désormais que $x^2 = e$ pour tout $x \in G$. Démontrer que $x^{-1} = x$ pour tout x, puis que G est abélien.
5. Donner deux exemples de groupes vérifiant cette hypothèse, rencontrés dans les exercices précédents.

EXERCICE 14 ⋆⋆

1. Rappeler la définition du groupe produit de deux groupes, puis démontrer que $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\,;+)$, muni de l'addition composante par composante, est un groupe abélien. En préciser le neutre et le symétrique d'un élément.
2. On munit $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ de la loi $\perp$ définie par $(x\,;y)\perp(x'\,;y') = (x+x'\,;\,yy')$. Justifier que c'est un groupe, et préciser son neutre.
3. Démontrer que le groupe produit de deux groupes abéliens est abélien.
4. La loi $*$ de l'exercice 9 fait-elle de $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ le groupe produit de $(\mathbb{R}^*\,;\times)$ et de $(\mathbb{R}\,;+)$? Justifier.

Sous-groupes

EXERCICE 15 ⋆

Pour chacune des questions suivantes, déterminer si la partie H est un sous-groupe du groupe G. On utilisera la caractérisation en deux points de la proposition 5.

1. $G = (\mathbb{Z}\,;+)$ et H est l'ensemble des entiers pairs.
2. $G = (\mathbb{Z}\,;+)$ et H est l'ensemble des entiers impairs.
3. $G = (\mathbb{R}\,;+)$ et $H = [-1\,;+\infty[$.
4. $G = (\mathbb{R}^*\,;\times)$ et $H = \mathbb{Q}^*$.
5. $G = (\mathbb{C}^*\,;\times)$ et $H = \{z\in\mathbb{C}^* \mid \exists n\in\mathbb{N}^*,\ z^n = 1\}$.

6. $G = (\mathbb{R}^* ; \times)$ et $H = \{a + b\sqrt{2} \mid (a ; b) \in \mathbb{Q}^2,\ (a ; b) \neq (0 ; 0)\}$.

Pour la dernière question, on justifiera d'abord que H est bien inclus dans $\mathbb{R}^*$.

EXERCICE 16 ⋆

Soit n un entier naturel. On pose $n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

1. Démontrer que $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z} ; +)$.
2. Que valent $1\mathbb{Z}$ et $0\mathbb{Z}$?
3. Démontrer que $n\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z}$ si et seulement si m divise n.
4. Déterminer $4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z}$, puis $4\mathbb{Z} \cap 5\mathbb{Z}$. Que conjecture-t-on ?

EXERCICE 17 ⋆⋆

Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe $(G ; \cdot)$.

1. Démontrer que $H \cap K$ est un sous-groupe de G.
2. Démontrer que $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ n'est pas un sous-groupe de $(\mathbb{Z} ; +)$.
3. L'intersection d'une famille quelconque de sous-groupes de G est-elle encore un sous-groupe ? Justifier.

EXERCICE 18 ⋆⋆

On pose $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$.

1. Démontrer que $\mathbb{U}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^* ; \times)$.
2. Démontrer que $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^* ; \times)$, puis qu'il est inclus dans $\mathbb{U}$.
3. Démontrer que si n divise m, alors $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_m$.
4. Déterminer $\mathbb{U}_4$ en extension, et le comparer à l'exemple traité dans le cours.

EXERCICE 19 ⋆⋆⋆

Soit $(G ; \cdot)$ un groupe de neutre e. Démontrer que les parties suivantes sont des sous-groupes de G.

1. Le *centre* de G :
$$C(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G,\ xy = yx\}$$
2. Le *conjugué* d'un sous-groupe H par un élément a de G :
$$aHa^{-1} = \{aha^{-1} \mid h \in H\}$$
3. L'ensemble des *éléments de torsion*, dans le cas où G est de plus supposé abélien :
$$T(G) = \{x \in G \mid \exists n \in \mathbb{N}^*,\ x^n = e\}$$

Pour la dernière question, on précisera où l'hypothèse de commutativité est utilisée.

Exercices de synthèse

EXERCICE 20 : VRAI OU FAUX

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. Toute loi de composition interne admet un élément neutre.
2. Si une loi de composition interne admet un élément neutre, alors celui-ci est unique.
3. Le symétrique d'un élément, lorsqu'il existe, est toujours unique.
4. Dans un groupe, $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ pour tous x et y.
5. Un groupe n'est pas nécessairement abélien.
6. L'ensemble $\mathbb{N}$ muni de l'addition n'est pas un groupe, car 3 n'y admet pas d'opposé.
7. Un sous-groupe contient nécessairement l'élément neutre du groupe.
8. L'intersection de deux sous-groupes est un sous-groupe.
9. La réunion de deux sous-groupes est un sous-groupe.
10. Pour démontrer qu'une partie H d'un groupe G en est un sous-groupe, il suffit de vérifier que H est non vide et que $xy^{-1} \in H$ pour tout couple $(x\,;y)$ de H^2.

EXERCICE 21 ⋆⋆⋆

Soit $(G\,;\cdot)$ un groupe. Pour tout $a \in G$, on définit la *translation à gauche* :

$$\tau_a : \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & ax \end{array} \right.$$

On note enfin $\mathcal{S}(G)$ le groupe des bijections de G dans G, muni de la composition.

1. Démontrer que τ_a est bijective, de bijection réciproque $\tau_{a^{-1}}$.
2. Démontrer que $\tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$ pour tous a et b de G.
3. En déduire que $T = \{\tau_a \mid a \in G\}$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}(G)$.
4. Démontrer que l'application $\Phi : a \mapsto \tau_a$, de G dans $\mathcal{S}(G)$, est injective.
5. Commenter : que peut-on dire de tout groupe au vu de ce résultat ?

EXERCICE 22 ⋆⋆⋆

Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe $(G\,;\cdot)$.

1. Démontrer que si $H \subset K$ ou $K \subset H$, alors $H \cup K$ est un sous-groupe de G.
2. On suppose désormais que $H \cup K$ est un sous-groupe de G et que $H \not\subset K$. On fixe un élément h de H n'appartenant pas à K, et l'on se donne $k \in K$.
   (a) Justifier que hk appartient à $H \cup K$.
   (b) Démontrer que hk ne peut pas appartenir à K.
   (c) En déduire que k appartient à H, puis que $K \subset H$.
3. Conclure par une équivalence.
4. Retrouver, à l'aide de cette équivalence, le résultat de la question 2 de l'exercice 17.