EXERCICES – CHAPITRE 4

MORPHISMES

Morphismes de groupes

EXERCICE 1 ⋆

Les applications suivantes sont-elles des morphismes de groupes ? Justifier, en exhibant un contre-exemple le cas échéant.

1. $f : \left|\begin{array}{ccc}(\mathbb{R};+) & \longrightarrow & (\mathbb{R};+)\\ x & \longmapsto & 3x\end{array}\right.$
2. $f : \left|\begin{array}{ccc}(\mathbb{R};+) & \longrightarrow & (\mathbb{R};+)\\ x & \longmapsto & x+1\end{array}\right.$
3. $f : \left|\begin{array}{ccc}(\mathbb{R};+) & \longrightarrow & (\mathbb{R};+)\\ x & \longmapsto & x^2\end{array}\right.$
4. $f : \left|\begin{array}{ccc}(\mathbb{R}^*;\times) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^*;\times)\\ x & \longmapsto & x^2\end{array}\right.$
5. $f : \left|\begin{array}{ccc}(\mathbb{C};+) & \longrightarrow & (\mathbb{C};+)\\ z & \longmapsto & \overline{z}\end{array}\right.$
6. $f : \left|\begin{array}{ccc}(\mathbb{C}^*;\times) & \longrightarrow & (\mathbb{R}_+^*;\times)\\ z & \longmapsto & |z|\end{array}\right.$
7. $f : \left|\begin{array}{ccc}(\mathbb{R}_+^*;\times) & \longrightarrow & (\mathbb{R};+)\\ x & \longmapsto & \ln(x)\end{array}\right.$
8. $f : \left|\begin{array}{ccc}(\mathbb{Z};+) & \longrightarrow & (\mathbb{Z};+)\\ k & \longmapsto & 5k\end{array}\right.$
9. $f : \left|\begin{array}{ccc}(\mathbb{Z};+) & \longrightarrow & (\mathbb{Z};+)\\ k & \longmapsto & k+5\end{array}\right.$
10. $f : \left|\begin{array}{ccc}(\mathbb{R};+) & \longrightarrow & (\mathbb{R}_+^*;\times)\\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x\end{array}\right.$
11. $f : \left|\begin{array}{ccc}(\mathbb{R}^*;\times) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^*;\times)\\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x}\end{array}\right.$
12. $f : \left|\begin{array}{ccc}(\mathbb{R}^*;\times) & \longrightarrow & (\mathbb{R};+)\\ x & \longmapsto & \ln|x|\end{array}\right.$

EXERCICE 2 ⋆

Reprendre les applications de l'exercice 1 qui sont des morphismes, et préciser pour chacune s'il s'agit d'un endomorphisme, d'un isomorphisme, d'un automorphisme, ou d'aucun des trois.

EXERCICE 3 ⋆⋆

Soit $(G;\cdot)$ un groupe.

1. Démontrer que l'application $\iota : x \mapsto x^{-1}$ est un morphisme de G dans G si et seulement si G est abélien.
2. Démontrer de même que $c : x \mapsto x^2$ est un morphisme de G dans G si et seulement si G est abélien.
3. En déduire que dans le groupe $\mathcal{S}(\{1;2;3\})$ des permutations, rencontré au chapitre 3, aucune de ces deux applications n'est un morphisme.

Propriétés élémentaires et isomorphismes

EXERCICE 4 ⋆

Soit $f : (G;\cdot) \longrightarrow (H;*)$ un morphisme de groupes.

1. Démontrer par récurrence que $f(x^n) = f(x)^n$ pour tout $x \in G$ et tout $n \in \mathbb{N}$, puis étendre le résultat à $n \in \mathbb{Z}$.
2. Utiliser la propriété 1 du cours pour écarter rapidement les candidats suivants, sans aucun calcul de composition.

(a) $x \mapsto x+1$ de $(\mathbb{R}\,;+)$ dans $(\mathbb{R}\,;+)$

(b) $x \mapsto 2x$ de $(\mathbb{R}^*\,;\times)$ dans $(\mathbb{R}^*\,;\times)$

(c) $z \mapsto z+\mathrm{i}$ de $(\mathbb{C}\,;+)$ dans $(\mathbb{C}\,;+)$

(d) $x \mapsto x-3$ de $(\mathbb{Z}\,;+)$ dans $(\mathbb{Z}\,;+)$

3. Soit $g : (\mathbb{R}\,;+) \to (\mathbb{R}\,;+)$ un morphisme. Démontrer que $g(n) = n\,g(1)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, puis que $g(r) = r\,g(1)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.

EXERCICE 5 ⋆⋆

1. Soient $f : (\mathbb{R}\,;+) \to (\mathbb{R}_+^*\,;\times)$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $g : (\mathbb{R}_+^*\,;\times) \to (\mathbb{R}\,;+)$, $x \mapsto \ln(x)$. Identifier $g \circ f$ et $f \circ g$.
2. Soient $f : G \to H$ et $g : H \to K$ deux isomorphismes de groupes. Démontrer que $g \circ f$ en est un.
3. On note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes d'un groupe G. Démontrer que $\mathrm{Aut}(G)$ est un sous-groupe du groupe $\mathcal{S}(G)$ des bijections de G dans G.

EXERCICE 6 ⋆⋆

Soit $(G\,;\cdot)$ un groupe. Pour tout $g \in G$, on définit l'application :

$$\varphi_g : \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ h & \longmapsto & ghg^{-1} \end{array} \right.$$

1. Démontrer que φ_g est un morphisme de groupes.
2. Démontrer que φ_g est bijective, et déterminer φ_g^{-1}.
3. Conclure : les φ_g sont appelés les *automorphismes intérieurs* de G.
4. Démontrer que $\varphi_g = \mathrm{Id}_G$ si et seulement si g appartient au centre $C(G)$, défini au chapitre 3.
5. Démontrer que $\varphi_g \circ \varphi_{g'} = \varphi_{gg'}$, et en déduire que $g \mapsto \varphi_g$ est un morphisme de G dans $\mathrm{Aut}(G)$.

EXERCICE 7 ⋆⋆

Dans chacun des cas suivants, démontrer que les deux groupes sont isomorphes en exhibant un isomorphisme explicite.

1. $(\mathbb{R}\,;+)$ et $(\mathbb{R}_+^*\,;\times)$.
2. $(\mathbb{Z}\,;+)$ et $(n\mathbb{Z}\,;+)$, où $n \in \mathbb{N}^*$.
3. $(\mathbb{R}\setminus\{-1\}\,;*)$, où $x * y = x + y + xy$, et $(\mathbb{R}^*\,;\times)$.
4. $(\mathbb{Z}\,;\perp)$, où $x \perp y = x + y - 3$, et $(\mathbb{Z}\,;+)$.

Les deux dernières lois ont été étudiées au chapitre 3, aux exercices 10 et 3.

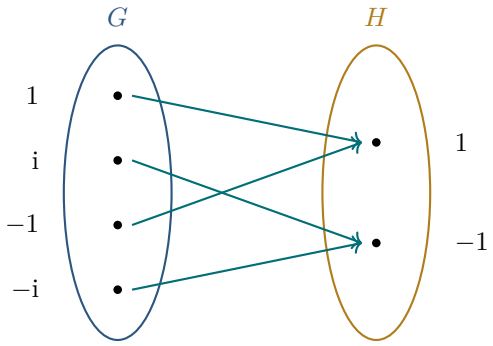
EXERCICE 8 ⋆⋆

1. Démontrer que le seul réel x vérifiant $x + x = 0$ est $x = 0$.
2. Donner un réel y différent de 1 vérifiant $y \times y = 1$.
3. On suppose qu'il existe un isomorphisme f de $(\mathbb{R}^*\,;\times)$ sur $(\mathbb{R}\,;+)$. Calculer $f(-1) + f(-1)$, et en déduire une contradiction.
4. Conclure. Le même argument permettrait-il de montrer que $(\mathbb{R}_+^*\,;\times)$ et $(\mathbb{R}\,;+)$ ne sont pas isomorphes ? Commenter.

Noyau et image

EXERCICE 9 ⋆

On pose $G = \{1\,;\mathrm{i}\,;-1\,;-\mathrm{i}\}$ et $H = \{1\,;-1\}$, tous deux munis de la multiplication des complexes. On admet que G est un groupe. On considère l'application $f : z \mapsto z^2$.



1. Vérifier que H est un sous-groupe de G, et que f est bien à valeurs dans H.
2. Démontrer que f est un morphisme de groupes de G dans H.
3. Lire sur le diagramme, puis retrouver par le calcul, le noyau et l'image de f.
4. L'application f est-elle injective ? surjective ?

EXERCICE 10 ⋆

Pour chacune des applications suivantes, déterminer s'il s'agit d'un morphisme de groupes. Le cas échéant, préciser son image et son noyau.

1. $f_1 : \left|\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^*\,;\times) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^*\,;\times) \\ z & \longmapsto & |z| \end{array}\right.$
2. $f_2 : \left|\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}^2\,;+) & \longrightarrow & (\mathbb{Z}\,;+) \\ (a\,;b) & \longmapsto & a-b \end{array}\right.$
3. $f_3 : \left|\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_+^*\,;\times) & \longrightarrow & (\mathbb{R}\,;+) \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}\right.$

EXERCICE 11 ⋆

Déterminer le noyau et l'image de chacun des morphismes suivants, rencontrés à l'exercice 1.

1. $x \mapsto 3x$ de $(\mathbb{R}\,;+)$ dans $(\mathbb{R}\,;+)$
2. $x \mapsto x^2$ de $(\mathbb{R}^*\,;\times)$ dans $(\mathbb{R}^*\,;\times)$
3. $z \mapsto \overline{z}$ de $(\mathbb{C}\,;+)$ dans $(\mathbb{C}\,;+)$
4. $k \mapsto 5k$ de $(\mathbb{Z}\,;+)$ dans $(\mathbb{Z}\,;+)$
5. $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ de $(\mathbb{R}^*\,;\times)$ dans $(\mathbb{R}^*\,;\times)$
6. $x \mapsto \ln|x|$ de $(\mathbb{R}^*\,;\times)$ dans $(\mathbb{R}\,;+)$

EXERCICE 12 ⋆⋆

La proposition 3 du cours affirme que le noyau et l'image d'un morphisme sont des sous-groupes. L'exploiter pour retrouver, sans aucune vérification directe, les résultats suivants.

1. L'ensemble $\mathbb{U}$ des complexes de module 1 est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*\,;\times)$.
2. L'ensemble $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}\,;+)$.
3. L'ensemble $\{(a\,;a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}^2\,;+)$.

4. L'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*\,;\times)$.

On précisera à chaque fois le morphisme utilisé, et s'il s'agit d'un noyau ou d'une image.

EXERCICE 13 ⋆⋆

1. Démontrer qu'une application $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est un morphisme de $(\mathbb{Z}\,;+)$ dans lui-même si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $f(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$.
   (a) Déterminer alors le noyau et l'image d'un tel morphisme.
   (b) À quelle condition sur a ce morphisme est-il un isomorphisme ?
   (c) En déduire tous les éléments de $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}\,;+)$.
2. Démontrer qu'une application $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ est un morphisme de $(\mathbb{Z}^2\,;+)$ dans lui-même si et seulement s'il existe $(a\,;b\,;c\,;d) \in \mathbb{Z}^4$ tel que :

$$\forall (x\,;y) \in \mathbb{Z}^2, \qquad f(x\,;y) = (ax + cy\,;\, bx + dy)$$

   (a) Déterminer le noyau d'un tel morphisme.
   (b) Démontrer que f est injectif si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

EXERCICE 14 ⋆⋆

On considère l'ensemble :

$$H = \{(a\,;b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a - b \text{ est pair}\}$$

1. Démontrer que H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}^2\,;+)$.
2. On considère l'application :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & H \\ (u\,;v) & \longmapsto & (2u+v\,;\,v) \end{array} \right.$$

   Vérifier que f est bien à valeurs dans H, puis démontrer que c'est un isomorphisme de groupes.
3. Que peut-on en conclure sur H et $\mathbb{Z}^2$?

Injectivité et surjectivité

EXERCICE 15 ⋆

Pour chacun des morphismes suivants, déterminer le noyau puis l'image, et conclure quant à l'injectivité et à la surjectivité en appliquant le théorème 1.

1. $f : \left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}\,;+) & \longrightarrow & (\mathbb{R}_+^*\,;\times) \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x \end{array} \right.$
2. $g : \left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^*\,;\times) & \longrightarrow & (\mathbb{R}_+^*\,;\times) \\ z & \longmapsto & |z| \end{array} \right.$
3. $h : \left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}\,;+) & \longrightarrow & (\mathbb{Z}\,;+) \\ k & \longmapsto & 3k \end{array} \right.$
4. $u : \left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2\,;+) & \longrightarrow & (\mathbb{R}\,;+) \\ (x\,;y) & \longmapsto & x+y \end{array} \right.$
5. $v : \left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}\,;+) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^2\,;+) \\ x & \longmapsto & (x\,;\,2x) \end{array} \right.$

EXERCICE 16 ⋆⋆

Soit $f : (G\,;\cdot) \longrightarrow (H\,;*)$ un morphisme de groupes.

1. Soit G' un sous-groupe de G. Démontrer que $f(G')$ est un sous-groupe de H.
2. Soit H' un sous-groupe de H. Démontrer que $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G.
3. Démontrer que $\operatorname{Ker} f \subset f^{-1}(H')$ pour tout sous-groupe H' de H.
4. Retrouver la proposition 3 du cours comme cas particulier des questions 1 et 2.

EXERCICE 17 ⋆⋆

1. Démontrer que $k \mapsto 2k$ est un endomorphisme de $(\mathbb{Z}\,;+)$, injectif mais non surjectif.
2. En déduire que $(\mathbb{Z}\,;+)$ et $(2\mathbb{Z}\,;+)$ sont isomorphes, bien que $2\mathbb{Z}$ soit une partie *stricte* de $\mathbb{Z}$.
3. Rapprocher ce résultat de l'exercice 10 du chapitre 2, où l'on construisait une bijection de $\mathbb{N}$ sur l'ensemble des entiers naturels pairs. Commenter.
4. Un endomorphisme injectif d'un groupe *fini* peut-il ne pas être surjectif ? Justifier.

Exercices de synthèse

EXERCICE 18 : VRAI OU FAUX

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Dans tout l'exercice, f désigne un morphisme du groupe $(G\,;\cdot)$ dans le groupe $(H\,;*)$.

1. Un morphisme envoie toujours le neutre de G sur le neutre de H.
2. Toute application de G dans H envoyant le neutre sur le neutre est un morphisme.
3. Le noyau de f est un sous-groupe de G.
4. L'image de f est un sous-groupe de G.
5. Le morphisme f est injectif si et seulement si son noyau est réduit au neutre de G.
6. La composée de deux morphismes de groupes est un morphisme de groupes.
7. Si f est un isomorphisme, alors f^{-1} en est un également.
8. Il existe un isomorphisme de $(\mathbb{R}\,;+)$ sur $(\mathbb{R}_+^*\,;\times)$.
9. L'application $x \mapsto x^{-1}$ est un morphisme de tout groupe dans lui-même.
10. Un groupe infini ne peut pas être isomorphe à l'un de ses sous-groupes stricts.

EXERCICE 19 ⋆⋆⋆

On munit $\mathbb{R}^2$ de la loi $*$ définie par :

$$\forall((x\,;y)\,;(x'\,;y')) \in (\mathbb{R}^2)^2, \qquad (x\,;y) * (x'\,;y') = (xx' - yy'\,;\, xy' + x'y)$$

On note enfin $\mathcal{C} = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ le cercle unité.

1. Vérifier l'identité suivante, valable pour tous réels x, y, x' et y' :

$$(xx' - yy')^2 + (xy' + x'y)^2 = (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)$$

2. En déduire que $*$ est une loi interne sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,;0)\}$, puis démontrer que $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,;0)\}\,;*)$ est un groupe abélien.

3. Démontrer que $\mathcal{C}$ en est un sous-groupe.
4. Démontrer que l'application suivante est un isomorphisme de groupes :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,;0)\}\,;*) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*\,;\times) \\ (x\,;y) & \longmapsto & x+\mathrm{i}y \end{array} \right.$$

5. En déduire que la restriction de f à $\mathcal{C}$ induit un isomorphisme de $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{U}$.
6. On admet les formules d'addition, valables pour tous réels a et b :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \qquad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

Démontrer que l'application ci-dessous est un morphisme de groupes surjectif, puis déterminer son noyau.

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}\,;+) & \longrightarrow & (\mathcal{C}\,;*) \\ \theta & \longmapsto & \big(\cos(\theta)\,;\sin(\theta)\big) \end{array} \right.$$

EXERCICE 20 ⋆⋆⋆

Soit $(G\,;\cdot)$ un groupe de neutre e, et a un élément de G. On admet que $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ pour tous entiers relatifs m et n, et l'on considère :

$$\varphi_a : \left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}\,;+) & \longrightarrow & (G\,;\cdot) \\ n & \longmapsto & a^n \end{array} \right.$$

1. Démontrer que φ_a est un morphisme de groupes.
2. En déduire que $\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de G. On l'appelle le *sous-groupe engendré* par a.
3. Démontrer que $\operatorname{Ker}\varphi_a$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}\,;+)$. En admettant le résultat annoncé au chapitre 3, selon lequel tout sous-groupe de $(\mathbb{Z}\,;+)$ s'écrit $d\mathbb{Z}$ pour un unique $d \in \mathbb{N}$, en déduire l'existence de cet entier d.
4. Interpréter les deux cas $d = 0$ et $d > 0$. Dans le second, l'entier d est appelé l'*ordre* de a.
5. Application : dans le groupe $\mathbb{U}_4 = \{1\,;\mathrm{i}\,;-1\,;-\mathrm{i}\}$, déterminer le noyau et l'image de φ_{i}, puis l'ordre de i.
6. Application : dans $(\mathbb{R}^*\,;\times)$, déterminer l'ordre de -1, puis celui de 2.