CORRIGÉ – CHAPITRE 6

ESPACES VECTORIELS

Espaces vectoriels : généralités

EXERCICE 1 ⋆

1. L'addition fait de $\mathbb{R}^2$ un groupe abélien, et les quatre axiomes de la loi externe se vérifient coordonnée par coordonnée à partir de ceux de $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\mathbb{R}^2 \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel.}}$$

2. Les opérations étant définies point par point, chaque axiome se ramène à une égalité de réels, vraie en chaque point.

$$\boxed{\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}) \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel.}}$$

3. Une suite réelle n'est rien d'autre qu'une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$: c'est le cas particulier $I = \mathbb{N}$ de l'exemple précédent.

$$\boxed{\mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel.}}$$

4. La loi externe devrait être une application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Or $(-1) \cdot 1 = -1 \notin \mathbb{R}_+$: elle n'est même pas définie. De plus $(\mathbb{R}_+;+)$ n'est pas un groupe, puisque 1 n'y admet pas d'opposé.

$$\boxed{\text{Non : la loi externe n'est pas à valeurs dans } \mathbb{R}_+, \text{ et l'axiome } \mathbf{A} \text{ échoue.}}$$

5. La loi externe devrait être une application de $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$. Or $\sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

$$\boxed{\text{Non : la loi externe n'est pas définie.}}$$

6. L'ensemble $(\mathbb{R};+)$ est un groupe abélien, la multiplication définit bien une application de $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et les quatre axiomes découlent des règles de calcul dans le corps $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\mathbb{R} \text{ est un } \mathbb{Q}\text{-espace vectoriel.}}$$

Piège : les questions 5 et 6 portent sur le même ensemble et la même multiplication. C'est le *corps des scalaires* qui change tout, et cette structure est étudiée à l'exercice 21.

EXERCICE 2 ⋆

1. On part de $0_K = 0_K + 0_K$ et l'on applique la distributivité par rapport à l'addition des scalaires :

$$0_K \cdot x = (0_K + 0_K) \cdot x = 0_K \cdot x + 0_K \cdot x$$

Comme $(E;+)$ est un groupe, on simplifie par $0_K \cdot x$:

$$\boxed{0_K \cdot x = 0_E}$$

2. On procède de la même manière, avec cette fois la distributivité par rapport à l'addition des vecteurs :

$$\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E + 0_E) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\lambda \cdot 0_E = 0_E}$$

3. On calcule, en utilisant l'axiome **N** puis la question 1 :

$$x + (-1_K) \cdot x = 1_K \cdot x + (-1_K) \cdot x = (1_K + (-1_K)) \cdot x = 0_K \cdot x = 0_E$$

Donc $(-1_K)\cdot x$ est l'opposé de x dans le groupe $(E\,;+)$:

$$\boxed{(-1_K)\cdot x = -x}$$

4. Supposons $\lambda\cdot x = 0_E$ et $\lambda \neq 0_K$. Comme K est un corps, λ est inversible, et :

$$x = 1_K\cdot x = (\lambda^{-1}\lambda)\cdot x = \lambda^{-1}\cdot(\lambda\cdot x) = \lambda^{-1}\cdot 0_E = 0_E$$

en utilisant successivement les axiomes **N** et **A**, puis la question 2.

$$\boxed{\lambda\cdot x = 0_E \implies \lambda = 0_K \text{ ou } x = 0_E}$$

$$\boxed{\text{L'hypothèse « } K \text{ est un corps » sert exactement à disposer de } \lambda^{-1}.}$$

EXERCICE 3 ⋆⋆

1. L'addition étant l'addition usuelle, $(\mathbb{R}^2\,;+)$ est bien un groupe abélien. On vérifie ensuite :

- $1\star(x\,;y) = (x\,;y)$: l'axiome **N** est vérifié ;
- $(\lambda\mu)\star(x\,;y) = (\lambda\mu x\,;\,y) = \lambda\star(\mu\star(x\,;y))$: l'axiome **A** est vérifié ;
- $\lambda\star((x\,;y)+(x'\,;y')) = (\lambda(x+x')\,;\,y+y') = \lambda\star(x\,;y)+\lambda\star(x'\,;y')$: la distributivité sur l'addition des vecteurs est vérifiée.

En revanche, avec $\lambda = \mu = 1$ et $(x\,;y) = (0\,;1)$:

$$(1+1)\star(0\,;1) = (0\,;1) \qquad \text{tandis que} \qquad 1\star(0\,;1)+1\star(0\,;1) = (0\,;2)$$

$$\boxed{\text{Non : la distributivité sur l'addition des } \textit{scalaires} \text{ échoue.}}$$

2. La loi $\boxplus$ est bien interne, commutative et associative, mais elle n'admet aucun neutre : pour tout couple $(e\,;f)$, on a $(x\,;y)\boxplus(e\,;f) = (x+e\,;\,0)$, qui ne vaut $(x\,;y)$ que si $y = 0$.

$$\boxed{\text{Non : } (\mathbb{R}^2\,;\boxplus) \text{ n'est pas un groupe, l'axiome } \mathbf{A} \text{ échoue.}}$$

3. Les axiomes **N** et **A** sont vérifiés, puisque $1^2 = 1$ et $(\lambda\mu)^2 = \lambda^2\mu^2$, ainsi que la distributivité sur l'addition des vecteurs. Mais avec $\lambda = \mu = 1$ et $u = (1\,;0)$:

$$(1+1)\star u = (4\,;0) \qquad \text{tandis que} \qquad 1\star u + 1\star u = (2\,;0)$$

En effet $(\lambda+\mu)^2 - (\lambda^2+\mu^2) = 2\lambda\mu$, qui n'est pas nul en général.

$$\boxed{\text{Non : le même axiome qu'à la question 1 échoue.}}$$

Remarque : les questions 1 et 3 échouent toutes deux sur la distributivité par rapport à l'addition des scalaires. C'est l'axiome que l'on oublie le plus volontiers de vérifier, parce qu'il fait intervenir les *deux* additions à la fois — celle de K à gauche, celle de E à droite.

Sous-espaces vectoriels

EXERCICE 4 ⋆

Le réflexe est celui du cours : un sous-espace vectoriel contient toujours 0_E.

(a) La droite passe par l'origine, et elle est stable par addition et par multiplication externe : additionner deux vecteurs portés par une même droite, ou en étirer un, ne fait pas sortir de la droite.

$$\boxed{\text{C'est un sous-espace vectoriel.}}$$

(b) La réunion contient l'origine, mais elle n'est pas stable : en additionnant un vecteur non nul de chaque droite, on obtient un vecteur qui n'appartient à aucune des deux.

$$\boxed{\text{Ce n'est pas un sous-espace vectoriel.}}$$

C'est exactement la figure du cours illustrant que la réunion de deux sous-espaces n'en est presque jamais un.

(c) La droite ne passe pas par l'origine.

$$\boxed{\text{Ce n'est pas un sous-espace vectoriel : } 0_E \notin F.}$$

(d) Le demi-plan contient l'origine et est stable par addition, mais pas par multiplication externe : le vecteur $(0\,;1)$ y appartient, alors que $(-1)\cdot(0\,;1) = (0\,;-1)$ n'y appartient pas.

$$\boxed{\text{Ce n'est pas un sous-espace vectoriel.}}$$

Piège : contenir 0_E et être stable par addition ne suffit pas. Le dernier exemple montre qu'il faut aussi tester la multiplication par un scalaire *négatif*.

EXERCICE 5 ⋆⋆

1. Le couple $(0\,;0)$ appartient à F si et seulement si $c = 0$. Réciproquement, lorsque $c = 0$, soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x\,;y)$, $(x'\,;y')$ dans F :

$$a(\lambda x + x') + b(\lambda y + y') = \lambda(ax + by) + (ax' + by') = 0$$

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel si et seulement si } c = 0.}$$

2. L'équation est linéaire et homogène, et le même calcul s'applique.

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3.}$$

3. On a $0 + 0 + 3 \times 0 = 0 \neq 2$.

$$\boxed{\text{Ce n'est pas un sous-espace vectoriel : } 0_E \notin F.}$$

4. Les vecteurs $(1\,;0)$ et $(0\,;1)$ appartiennent à F, mais leur somme $(1\,;1)$ vérifie $xy = 1 \neq 0$.

$$\boxed{\text{Ce n'est pas un sous-espace vectoriel : } F \text{ n'est pas stable par addition.}}$$

5. La suite nulle converge. Et si (x_n) et (y_n) convergent, il en va de même de $\lambda(x_n) + (y_n)$, par linéarité de la limite.

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{S}(\mathbb{R}).}$$

6. La suite nulle converge vers 0, et non vers α si $\alpha \neq 0$. Réciproquement, si $\alpha = 0$, l'ensemble des suites de limite nulle est stable par combinaison linéaire.

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel si et seulement si } \alpha = 0.}$$

7. La suite nulle ne tend pas vers $+\infty$. De plus, si (x_n) tend vers $+\infty$, alors $(-1)\cdot(x_n)$ tend vers $-\infty$.

$$\boxed{\text{Ce n'est pas un sous-espace vectoriel.}}$$

8. La suite nulle vérifie la relation. Et si (x_n) et (y_n) la vérifient, alors pour tout n :

$$(\lambda x + y)_{n+2} = \lambda x_{n+2} + y_{n+2} = \lambda(5x_{n+1} - 2x_n) + (5y_{n+1} - 2y_n) = 5(\lambda x + y)_{n+1} - 2(\lambda x + y)_n$$

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{S}(\mathbb{C}).}$$

9. La fonction nulle convient, et pour f, g dans F :

$$(\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda\pi f(1) + \pi g(1) = \pi\,(\lambda f + g)(1)$$

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{F}([0\,;1]\,;\mathbb{R}).}$$

Piège : les questions 1, 3, 6 et 7 échouent toutes pour la même raison — une condition *non homogène*, qui exclut le vecteur nul. C'est le premier test à effectuer.

EXERCICE 6 ⋆

1. La fonction nulle est paire, et si f et g le sont, alors $(\lambda f + g)(-x) = \lambda f(-x) + g(-x) = \lambda f(x) + g(x) = (\lambda f + g)(x)$. Sous-espace vectoriel.

2. Le même calcul, avec un signe $-$ des deux côtés, s'applique. Sous-espace vectoriel.

3. La fonction $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ est croissante, mais $(-1)\cdot\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ est décroissante. Non.

4. La fonction nulle est bornée, et si $|f| \leqslant M$ et $|g| \leqslant M'$, alors $|\lambda f + g| \leqslant |\lambda|M + M'$. Sous-espace vectoriel.

5. La fonction constante égale à 1 est positive, mais son opposée ne l'est pas. Non.

6. La fonction nulle convient, et $(\lambda f + g)(1) = \lambda f(1) + g(1) = 0$. Sous-espace vectoriel.

7. La fonction nulle ne vérifie pas $f(1) = 1$. Non.

8. Cet ensemble n'est autre que $\mathrm{Vect}(x \mapsto 1\,;\, x \mapsto x\,;\, x \mapsto x^2)$, donc un sous-espace vectoriel d'après l'exercice 7. Sous-espace vectoriel.

Piège de la question 8 : l'ensemble des fonctions polynomiales de degré *exactement* 2 n'en serait pas un — il ne contient pas la fonction nulle, et la somme de $x \mapsto x^2$ et de $x \mapsto -x^2 + x$ est de degré 1.

EXERCICE 7 ⋆⋆

1. On a $\mathrm{Vect}(u\,;v) \subset E$, et $0_E = 0_K \cdot u + 0_K \cdot v$ en appartient. Soient ensuite $\lambda \in K$ et deux éléments $au + bv$ et $a'u + b'v$:

$$\lambda(au + bv) + (a'u + b'v) = (\lambda a + a')\,u + (\lambda b + b')\,v \in \mathrm{Vect}(u\,;v)$$

Enfin, tout élément de $\mathrm{Vect}(u\,;v)$ est par définition une combinaison linéaire de u et v.

$$\boxed{\mathrm{Vect}(u\,;v) \text{ est un sous-espace vectoriel de } E, \text{ dont } (u\,;v) \text{ est une famille génératrice.}}$$

2. Soit W un sous-espace vectoriel contenant u et v, et soit $\lambda u + \mu v$ un élément de $\mathrm{Vect}(u\,;v)$. Comme W est stable par multiplication externe, $\lambda u \in W$ et $\mu v \in W$; comme il est stable par addition, leur somme y appartient.

$$\boxed{\mathrm{Vect}(u\,;v) \subset W}$$

Autrement dit, $\mathrm{Vect}(u\,;v)$ est le *plus petit* sous-espace vectoriel contenant u et v.

3. On calcule la combinaison générale :

$$\lambda\,(1\,;0\,;1) + \mu\,(0\,;1\,;1) = (\lambda\,;\,\mu\,;\,\lambda + \mu)$$

Un tel vecteur vérifie $z = x + y$. Réciproquement, si $z = x + y$, le choix $\lambda = x$ et $\mu = y$ convient.

$$\boxed{\mathrm{Vect}\big((1\,;0\,;1)\,;(0\,;1\,;1)\big) = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x + y\}}$$

C'est donc un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

4. On remarque que $(2\,;4\,;6) = 2 \times (1\,;2\,;3)$: le second vecteur est colinéaire au premier, et n'apporte rien.

$$\boxed{\mathrm{Vect}\big((1\,;2\,;3)\,;(2\,;4\,;6)\big) = \mathrm{Vect}\big((1\,;2\,;3)\big) = \{(t\,;2t\,;3t) \mid t \in \mathbb{R}\}}$$

Deux vecteurs peuvent donc n'engendrer qu'une droite : le nombre de vecteurs d'une famille génératrice ne dit rien de la « taille » de l'espace engendré. C'est précisément ce que la notion de famille libre viendra corriger.

Opérations sur les sous-espaces

EXERCICE 8 ⋆

1. Les ensembles F et H sont définis par une équation linéaire homogène : le calcul de l'exercice 5 s'applique. Quant à G, c'est un Vect, donc un sous-espace d'après l'exercice 7.

$$\boxed{F,\ G \text{ et } H \text{ sont des sous-espaces vectoriels de } \mathbb{R}^3.}$$

2. Un élément de G s'écrit $(t\,;t\,;t)$. Il appartient à F si et seulement si $3t = 0$, c'est-à-dire $t = 0$. Pour $F \cap H$, on résout le système $x + y + z = 0$ et $z = 0$, qui donne $y = -x$.

$$\boxed{F \cap G = \{(0\,;0\,;0)\} \qquad \text{et} \qquad F \cap H = \text{Vect}\big((1\,;-1\,;0)\big)}$$

3. Le vecteur $(1\,;-1\,;0)$ appartient à F et $(1\,;1\,;1)$ appartient à G. Leur somme vaut $(2\,;0\,;1)$, dont la somme des coordonnées vaut $3 \neq 0$: elle n'appartient pas à F. Et elle n'est pas colinéaire à $(1\,;1\,;1)$, donc n'appartient pas à G.

$$\boxed{F \cup G \text{ n'est pas stable par addition : ce n'est pas un sous-espace vectoriel.}}$$

4. Soit $(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$. Posons $s = \dfrac{x+y+z}{3}$ et écrivons :

$$(x\,;y\,;z) = \underbrace{(x-s\,;\ y-s\,;\ z-s)}_{\in F} + \underbrace{(s\,;s\,;s)}_{\in G}$$

Le premier vecteur appartient bien à F, puisque la somme de ses coordonnées vaut $x+y+z-3s = 0$.

$$\boxed{F + G = \mathbb{R}^3}$$

EXERCICE 9 ⋆⋆

1. Soit $x \in F$. Comme $0_E \in G$, on peut écrire $x = x + 0_E$ avec $x \in F$ et $0_E \in G$, donc $x \in F + G$. Le raisonnement est symétrique pour G.

$$\boxed{F \subset F + G \qquad \text{et} \qquad G \subset F + G}$$

2. Soit $x \in F + G$: il existe $a \in F$ et $b \in G$ tels que $x = a + b$. Comme $F \subset H$ et $G \subset H$, on a $a \in H$ et $b \in H$; et H étant un sous-espace vectoriel, il est stable par addition.

$$\boxed{F + G \subset H}$$

3. L'ensemble $F+G$ est un sous-espace vectoriel d'après la proposition 2, il contient $F \cup G$ d'après la question 1, et tout sous-espace contenant $F \cup G$ le contient d'après la question 2.

$$\boxed{F + G \text{ est le plus petit sous-espace vectoriel de } E \text{ contenant } F \cup G.}$$

4. Si $F + G = F$, alors $G \subset F + G = F$ d'après la question 1. Réciproquement, si $G \subset F$, la question 2 appliquée avec $H = F$ donne $F + G \subset F$, et l'inclusion réciproque vient de la question 1.

$$\boxed{F + G = F \iff G \subset F}$$

EXERCICE 10 ⋆⋆⋆

1. *Première inclusion.* On a $F \subset H$ par hypothèse et $F \subset F+G$, donc $F \subset (F+G)\cap H$. De même $G\cap H \subset G \subset F+G$ et $G\cap H \subset H$, donc $G\cap H \subset (F+G)\cap H$. Comme $(F+G)\cap H$ est un sous-espace vectoriel, l'exercice 9 donne $F+(G\cap H)\subset (F+G)\cap H$.

Seconde inclusion. Soit $x \in (F+G)\cap H$. Il existe $f\in F$ et $g\in G$ tels que $x=f+g$, et de plus $x\in H$. Or $f\in F\subset H$, donc :

$$g = x - f \in H \qquad \text{d'où} \qquad g \in G\cap H$$

et $x=f+g$ appartient à $F+(G\cap H)$.

$$\boxed{F\subset H \implies (F+G)\cap H = F+(G\cap H)}$$

2. *Si* $F\subset H$, alors $F\cap H = F$, et la question 1 donne directement $(*)$. De plus $F+H=H$, donc :

$$(F+G)\cap(F+H) = (F+G)\cap H = F+(G\cap H)$$

ce qui est $(**)$.

Si $G\subset H$, on applique la question 1 en échangeant les rôles de F et G, la somme étant commutative :

$$(F+G)\cap H = (G+F)\cap H = G+(F\cap H) = (G\cap H)+(F\cap H)$$

ce qui est $(*)$. Pour $(**)$: on a $G\cap H = G$, donc le membre de gauche vaut $F+G$; et $F+H$ contient F et $H\supset G$, donc contient $F+G$, d'où $(F+G)\cap(F+H)=F+G$.

$$\boxed{\text{Les deux identités } (*) \text{ et } (**) \text{ sont vérifiées.}}$$

3. Sans hypothèse, on a toujours $F\cap H\subset F\subset F+G$ et $F\cap H\subset H$, donc $F\cap H\subset (F+G)\cap H$; de même pour $G\cap H$. Le membre de droite étant un sous-espace vectoriel, il contient la somme.

De même, $F\subset F+G$ et $F\subset F+H$; et $G\cap H\subset G\subset F+G$, $G\cap H\subset H\subset F+H$.

$$\boxed{(F\cap H)+(G\cap H)\subset (F+G)\cap H \qquad \text{et} \qquad F+(G\cap H)\subset (F+G)\cap(F+H)}$$

4. Prenons dans $\mathbb{R}^2$ trois droites vectorielles deux à deux distinctes :

$$F=\text{Vect}\big((1\,;0)\big) \qquad G=\text{Vect}\big((0\,;1)\big) \qquad H=\text{Vect}\big((1\,;1)\big)$$

Ces droites étant deux à deux distinctes, chacune des intersections $F\cap H$ et $G\cap H$ est réduite à $\{0_E\}$, alors que $F+G=\mathbb{R}^2$. Donc :

$$(F+G)\cap H = \mathbb{R}^2\cap H = H \qquad \text{tandis que} \qquad (F\cap H)+(G\cap H)=\{0_E\}$$

$$F+(G\cap H)=F+\{0_E\}=F \qquad \text{tandis que} \qquad (F+G)\cap(F+H)=\mathbb{R}^2\cap\mathbb{R}^2=\mathbb{R}^2$$

$$\boxed{\text{Les deux inclusions sont strictes : ni } (*) \text{ ni } (**) \text{ ne vaut sans hypothèse.}}$$

EXERCICE 11 ⋆

1. L'exercice 8 a établi $F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = \mathbb{R}^3$. La proposition 3 donne alors que la somme est directe.

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = F \oplus G \text{ : les sous-espaces } F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires.}}$$

2. Ici $s = \dfrac{1+2+6}{3} = 3$, donc :

$$\boxed{(1\,;2\,;6) = \underbrace{(-2\,;-1\,;3)}_{\in F} + \underbrace{(3\,;3\,;3)}_{\in G}}$$

Vérification : $-2-1+3=0$, donc le premier vecteur appartient bien à F ✓

3. L'exercice 8 a établi $F \cap H = \text{Vect}\big((1\,;-1\,;0)\big)$, qui n'est pas réduit au vecteur nul : la somme n'est pas directe.

$$\boxed{F \text{ et } H \text{ ne sont pas supplémentaires dans } \mathbb{R}^3.}$$

Ils vérifient pourtant $F + H = \mathbb{R}^3$: par exemple $(0\,;0\,;1) = (-1\,;0\,;1) + (1\,;0\,;0)$, le premier vecteur étant dans F et le second dans H. C'est bien l'unicité de la décomposition qui fait défaut, et non son existence.

EXERCICE 12 ⋆⋆

1. Soit $f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$. Pour tout réel x, on a à la fois $f(-x) = f(x)$ et $f(-x) = -f(x)$, donc $f(x) = -f(x)$, puis $2f(x) = 0$ et $f(x) = 0$.

$$\boxed{\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\}}$$

2. Pour tout réel x :

$$p(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = p(x) \qquad \text{et} \qquad i(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -i(x)$$

donc $p \in \mathcal{P}$ et $i \in \mathcal{I}$. Enfin :

$$p(x) + i(x) = \frac{f(x)+f(-x)+f(x)-f(-x)}{2} = f(x)$$

$$\boxed{f = p + i \text{ avec } p \in \mathcal{P} \text{ et } i \in \mathcal{I}}$$

3. Les ensembles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels (exercice 6), leur intersection est réduite à la fonction nulle, et leur somme vaut $\mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$ tout entier d'après la question 2.

$$\boxed{\mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}}$$

4. On applique la question 2 à $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$:

$$\boxed{\mathrm{e}^x = \underbrace{\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}}_{\text{paire}} + \underbrace{\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}}_{\text{impaire}}}$$

On reconnaît le cosinus et le sinus hyperboliques : leur définition n'est rien d'autre que cette décomposition.

EXERCICE 13 ⋆⋆

1. La fonction nulle appartient à F, et si f, $g \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad (\lambda f + g)(1) = \lambda f(1) + g(1) = 0$$

Quant à G, il s'écrit $G = \text{Vect}\big(x \mapsto x\,;\, x \mapsto 1\big)$, donc c'est un sous-espace vectoriel d'après l'exercice 7.

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont des sous-espaces vectoriels de } \mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R}).}$$

2. Soit $f \in F \cap G$: il existe $(a\,;b)$ tel que $f(x) = ax + b$ pour tout x, avec $f(0) = f(1) = 0$. La première condition donne $b = 0$, la seconde $a + b = 0$, donc $a = 0$.

$$\boxed{F \cap G = \{0\} \text{ : les sous-espaces } F \text{ et } G \text{ sont en somme directe.}}$$

3. On veut $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$, c'est-à-dire :

$$h(0) - b = 0 \qquad \text{et} \qquad h(1) - (a + b) = 0$$

$$\boxed{b = h(0) \qquad \text{et} \qquad a = h(1) - h(0)}$$

4. Soit $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$ quelconque. En posant $g : x \mapsto \big(h(1) - h(0)\big)x + h(0)$, qui appartient à G, la question 3 montre que $f = h - g$ appartient à F. Ainsi $h = f + g \in F + G$.

$$\boxed{\mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R}) = F \oplus G}$$

EXERCICE 14 ⋆⋆

1. La fonction nulle est dérivable et vérifie les deux conditions. Soient f, $g \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: la fonction $\lambda f + g$ est dérivable, de dérivée $\lambda f' + g'$, et :

$$(\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad (\lambda f + g)'(0) = \lambda f'(0) + g'(0) = 0$$

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{D}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R}).}$$

2. Posons $G = \big\{x \mapsto ax + b \;\big|\; (a\,;b) \in \mathbb{R}^2\big\}$, l'ensemble des fonctions affines, qui est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$ puisque toute fonction affine est dérivable.

Somme directe. Soit $f \in F \cap G$, disons $f(x) = ax + b$. Alors $f(0) = b = 0$ et $f'(0) = a = 0$, donc $f = 0$.

Somme égale à $\mathcal{D}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$. Soit h une fonction dérivable. Posons :

$$g : x \longmapsto h'(0)\,x + h(0) \qquad \text{et} \qquad f = h - g$$

La fonction g appartient à G, la fonction f est dérivable, et :

$$f(0) = h(0) - h(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f'(0) = h'(0) - h'(0) = 0$$

donc $f \in F$ et $h = f + g$.

$$\boxed{\mathcal{D}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R}) = F \oplus G, \text{ où } G \text{ est l'ensemble des fonctions affines.}}$$

Remarque : la fonction g n'est autre que la *tangente* au graphe de h au point d'abscisse 0. Décomposer h, c'est donc séparer sa partie affine tangente de ce qui reste — un reste qui, par construction, s'annule ainsi que sa dérivée en 0.

EXERCICE 15 ⋆

1. *Liberté.* Soient λ et μ tels que $\lambda u + \mu v = 0_E$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \lambda - \mu = 0 \\ 2\lambda + 4\mu = 0 \\ 3\lambda + 6\mu = 0 \end{cases}$$

La première ligne donne $\lambda = \mu$, et la deuxième $6\lambda = 0$, donc $\lambda = \mu = 0$.

Caractère générateur. Tout vecteur $\lambda u + \mu v = (\lambda - \mu\,;\, 2\lambda + 4\mu\,;\, 3\lambda + 6\mu)$ vérifie :

$$3y - 2z = 3(2\lambda + 4\mu) - 2(3\lambda + 6\mu) = 0$$

Or le vecteur $(0\,;0\,;1)$ ne vérifie pas cette relation, puisque $3 \times 0 - 2 \times 1 = -2 \neq 0$.

$$\boxed{\text{La famille est libre, mais non génératrice de } \mathbb{R}^3.}$$

Elle engendre exactement le plan d'équation $3y - 2z = 0$.

2. *Liberté.* Le système $\lambda u + \mu v + \nu w = 0_E$ s'écrit :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ 2\lambda = 0 \\ -\lambda + \mu + \nu = 0 \end{cases}$$

La deuxième ligne donne $\lambda = 0$, la première $\mu = 0$, la troisième $\nu = 0$.

Caractère générateur. Pour $(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$, le même système avec second membre se résout en :

$$\lambda = \frac{y}{2} \qquad \mu = x - \frac{y}{2} \qquad \nu = -x + y + z$$

$$\boxed{\text{La famille est libre et génératrice : c'est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

3. On cherche une relation. Le système $\lambda u + \mu v + \nu w = 0_E$ s'écrit :

$$\begin{cases} \lambda + \mu - \nu = 0 \\ 2\lambda + 2\nu = 0 \\ -\lambda + \mu - 3\nu = 0 \end{cases}$$

La deuxième ligne donne $\lambda = -\nu$, la première $\mu = 2\nu$, et la troisième est alors automatiquement vérifiée. En prenant $\nu = 1$:

$$-u + 2v + w = -(1\,;2\,;-1) + 2\,(1\,;0\,;1) + (-1\,;2\,;-3) = (0\,;0\,;0)$$

$$\boxed{\text{La famille est liée.}}$$

EXERCICE 16 ⋆⋆

1. Supposons $a + bx + cx^2 = 0$ pour tout réel x. En évaluant en 0, puis en 1 et en -1 :

$$a = 0 \qquad a + b + c = 0 \qquad a - b + c = 0$$

Les deux dernières donnent, par somme et différence, $c = 0$ et $b = 0$. $\boxed{\text{Famille libre.}}$

2. Supposons $a\cos(x) + b\sin(x) = 0$ pour tout réel x. En $x = 0$ on obtient $a = 0$, en $x = \frac{\pi}{2}$ on obtient $b = 0$. $\boxed{\text{Famille libre.}}$

3. Supposons $a\,\mathrm{e}^{x} + b\,\mathrm{e}^{2x} = 0$ pour tout réel x. En $x = 0$: $a + b = 0$. En $x = \ln(2)$: $2a + 4b = 0$. En reportant $a = -b$, il vient $2b = 0$, donc $b = 0$ puis $a = 0$. $\boxed{\text{Famille libre.}}$

4. Supposons $a|x| + bx = 0$ pour tout réel x. En $x = 1$: $a + b = 0$. En $x = -1$: $a - b = 0$. Donc $a = b = 0$. Famille libre.

5. La formule de duplication $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ fournit, pour tout réel x :

$$1 \times 1 + 1 \times \cos(2x) + (-2) \times \cos^2(x) = 1 + \left(2\cos^2(x) - 1\right) - 2\cos^2(x) = 0$$

C'est une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls. Famille liée.

Méthode : pour une famille de fonctions, l'égalité $\sum \lambda_k f_k = 0$ porte sur *toutes* les valeurs de x. On peut donc en évaluer autant qu'on veut, et c'est le choix des points qui rend le système facile à résoudre.

EXERCICE 17 ⋆⋆

1. Soient λ, μ, ν tels que $\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = 0_E$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \lambda + \nu = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \\ \mu + \nu = 0 \end{cases}$$

Les deux premières donnent $\nu = -\lambda$ et $\mu = -\lambda$, et la troisième devient $-2\lambda = 0$, d'où $\lambda = 0$, puis $\mu = \nu = 0$.

La famille $(e_1\,;e_2\,;e_3)$ est libre.

2. Soit $(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$. On résout :

$$\begin{cases} \lambda + \nu = x \\ \lambda + \mu = y \\ \mu + \nu = z \end{cases}$$

En additionnant les trois lignes : $2(\lambda + \mu + \nu) = x + y + z$. Posons $s = \dfrac{x + y + z}{2}$. En retranchant successivement chaque ligne :

$$\mu = s - x \qquad \nu = s - y \qquad \lambda = s - z$$

Ce triplet existe toujours : la famille est génératrice.

3. Libre et génératrice, la famille est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour le vecteur $(1\,;2\,;3)$, on a $s = \dfrac{1+2+3}{2} = 3$, d'où $\lambda = 3 - 3 = 0$, $\mu = 3 - 1 = 2$ et $\nu = 3 - 2 = 1$.

$$(1\,;2\,;3) = 0 \cdot e_1 + 2\,e_2 + 1\,e_3$$

Vérification : $2\,(0\,;1\,;1) + (1\,;0\,;1) = (1\,;2\,;3)$ ✓

4. Dans la base canonique, les coordonnées d'un vecteur sont ses composantes.

Les coordonnées sont 1, 2 et 3.

Un même vecteur a donc des coordonnées différentes selon la base choisie — ici $(0\,;2\,;1)$ et $(1\,;2\,;3)$. La base canonique n'a rien de privilégié mathématiquement, comme le souligne le cours.

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. L'ensemble $(\mathbb{C}\,;+)$ est un groupe abélien. La multiplication des complexes fournit une application de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, et sa restriction une application de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Dans les deux cas, les axiomes **D**, **A** et **N** sont des règles de calcul dans le corps $\mathbb{C}$.

$\mathbb{C}$ est à la fois un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. *Liberté.* Si $\lambda \cdot 1 = 0$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $\lambda = 0$. *Caractère générateur.* Tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit $z = z \cdot 1$.

(1) est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

3. *Liberté.* Soient a et b *réels* tels que $a \cdot 1 + b \cdot \mathrm{i} = 0$. L'unicité de la forme algébrique donne $a = b = 0$.

Caractère générateur. Tout complexe z s'écrit $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b réels.

$$\boxed{(1\,;\mathrm{i}) \text{ est une base du } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel } \mathbb{C}.}$$

4. Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, les coefficients sont autorisés à être complexes, et :

$$\mathrm{i} \cdot 1 + (-1) \cdot \mathrm{i} = \mathrm{i} - \mathrm{i} = 0$$

avec $(\mathrm{i}\,;-1) \neq (0\,;0)$.

$$\boxed{\text{La famille } (1\,;\mathrm{i}) \text{ est liée sur } \mathbb{C}, \text{ alors qu'elle est libre sur } \mathbb{R}.}$$

Conclusion : la liberté d'une famille n'est pas une propriété des seuls vecteurs. Elle dépend du corps des scalaires, exactement comme l'injectivité d'une application dépendait de son ensemble de départ au chapitre 2.

Exercices de synthèse

EXERCICE 19 : VRAI OU FAUX

1. **Vraie** C'est la conséquence immédiate de la proposition 1, obtenue en prenant $\lambda = -1_K$ et $x = y$. Le cours en fait le premier réflexe de vérification.

2. **Fausse** Deux droites vectorielles distinctes du plan en fournissent un contre-exemple (exercice 4). La proposition 2 précise que la réunion n'est un sous-espace que si l'un des deux contient l'autre.

3. **Vraie** C'est le premier point de la proposition 2, valable pour une famille quelconque.

4. **Vraie** C'est le troisième point de la proposition 2. L'exercice 9 précise que c'est même le plus petit sous-espace contenant les deux.

5. **Fausse** Il faut de plus que leur somme soit E tout entier. Deux droites vectorielles distinctes de $\mathbb{R}^3$ ont une intersection réduite au vecteur nul, sans être supplémentaires.

6. **Vraie** Si $x_1 = 0_E$, la combinaison $1_K \cdot x_1 + 0_K \cdot x_2 + \cdots = 0_E$ est nulle sans que tous les coefficients le soient.

7. **Fausse** La famille $((1\,;0\,;0))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$, mais n'engendre qu'une droite. L'exercice 15 en donne un autre exemple, avec deux vecteurs.

8. **Vraie** C'est la propriété caractéristique d'une base, signalée dans la remarque du cours : le caractère générateur donne l'existence, la liberté l'unicité.

9. **Fausse** Elle ne contient pas le vecteur nul. C'est l'exemple D' du cours, repris au panneau (c) de l'exercice 4.

10. **Vraie** C'est exactement la proposition 1 : non-vacuité et stabilité par $\lambda x + y$.

EXERCICE 20 ⋆⋆⋆

1. L'ensemble E est une partie de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, et la suite nulle vérifie la relation. Soient u, $v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(\lambda u + v)_{n+2} = \lambda u_{n+2} + v_{n+2} = \lambda(5u_{n+1} - 6u_n) + (5v_{n+1} - 6v_n) = 5(\lambda u + v)_{n+1} - 6(\lambda u + v)_n$$

$$\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{S}(\mathbb{R}).}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$5 \times 2^{n+1} - 6 \times 2^n = (10 - 6) \times 2^n = 4 \times 2^n = 2^{n+2}$$

$$5 \times 3^{n+1} - 6 \times 3^n = (15 - 6) \times 3^n = 9 \times 3^n = 3^{n+2}$$

$$\boxed{a \in E \qquad \text{et} \qquad b \in E}$$

3. Soient λ et μ tels que $\lambda a + \mu b = 0$, c'est-à-dire $\lambda 2^n + \mu 3^n = 0$ pour tout n. En prenant $n = 0$ puis $n = 1$:

$$\lambda + \mu = 0 \qquad \text{et} \qquad 2\lambda + 3\mu = 0$$

En reportant $\lambda = -\mu$ dans la seconde, il vient $\mu = 0$, puis $\lambda = 0$.

$$\boxed{\text{La famille } (a\,;b) \text{ est libre.}}$$

4. Le système $\lambda + \mu = u_0$, $2\lambda + 3\mu = u_1$ se résout en soustrayant deux fois la première ligne à la seconde :

$$\boxed{\mu = u_1 - 2u_0 \qquad \text{et} \qquad \lambda = 3u_0 - u_1}$$

et cette solution est unique. Posons alors $v = \lambda a + \mu b$, qui appartient à E d'après la question 1. Par construction $v_0 = u_0$ et $v_1 = u_1$.

Montrons par récurrence double que $u_n = v_n$ pour tout n. C'est vrai aux rangs 0 et 1. Si c'est vrai aux rangs n et $n+1$, alors :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n = 5v_{n+1} - 6v_n = v_{n+2}$$

les deux suites vérifiant la même relation de récurrence.

$$\boxed{u = \lambda a + \mu b \text{ : la famille } (a\,;b) \text{ est génératrice de } E.}$$

5. Libre d'après la question 3 et génératrice d'après la question 4 :

$$\boxed{(a\,;b) \text{ est une base de } E.}$$

Pour $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$, la question 4 donne $\lambda = 3$ et $\mu = -2$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 3 \times 2^n - 2 \times 3^n}$$

Vérification : $u_0 = 3 - 2 = 1$ et $u_1 = 6 - 6 = 0$ ✓

EXERCICE 21 ⋆⋆⋆

1. L'ensemble $(\mathbb{R}\,;+)$ est un groupe abélien, et la multiplication fournit une application de $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les quatre axiomes sont des règles de calcul dans le corps $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\mathbb{R} \text{ est un } \mathbb{Q}\text{-espace vectoriel.}}$$

2. Soient a et b deux *rationnels* tels que $a \times 1 + b\sqrt{2} = 0$. Si $b \neq 0$, alors :

$$\sqrt{2} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$$

ce qui contredit l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Donc $b = 0$, puis $a = 0$.

$$\boxed{\text{La famille } \left(1\,;\sqrt{2}\right) \text{ est libre dans le } \mathbb{Q}\text{-espace vectoriel } \mathbb{R}.}$$

3. Par définition, $\text{Vect}\left(1\,;\sqrt{2}\right)$ est l'ensemble des $a \times 1 + b\sqrt{2}$ avec a et b rationnels, ce qui est exactement la définition de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ donnée au chapitre 5.

$$\boxed{\text{Vect}\left(1\,;\sqrt{2}\right) = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]}$$

4. Supposons $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$ avec $(a\,;b) \in \mathbb{Q}^2$. En élevant au carré :

$$3 = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2}$$

Si $ab \neq 0$, on en tire $\sqrt{2} = \dfrac{3 - a^2 - 2b^2}{2ab} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde. Donc $a = 0$ ou $b = 0$.

- Si $b = 0$, alors $\sqrt{3} = a \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde.
- Si $a = 0$, alors $\sqrt{3} = b\sqrt{2}$, donc en multipliant par $\sqrt{2}$: $\sqrt{6} = 2b \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde.

$$\boxed{\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}[\sqrt{2}]}$$

5. Si la famille $(1\,;\sqrt{2})$ était génératrice de $\mathbb{R}$, on aurait $\mathbb{R} = \text{Vect}(1\,;\sqrt{2}) = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Or $\sqrt{3}$ est un réel qui n'appartient pas à cet ensemble.

$$\boxed{\text{La famille } (1\,;\sqrt{2}) \text{ n'est pas génératrice de } \mathbb{R}.}$$

6. La réponse est négative :

$$\boxed{\text{Non : le } \mathbb{Q}\text{-espace vectoriel } \mathbb{R} \text{ n'admet aucune famille génératrice finie.}}$$

Le procédé de la question 4 se généralise : quelle que soit la famille finie choisie, on peut construire un réel qui lui échappe. La démonstration complète relève de la théorie de la dimension, mais l'idée se résume ainsi : à partir d'une famille de n vecteurs, on n'atteint que les sommes $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ à coefficients rationnels, dont l'ensemble reste « de la taille » de $\mathbb{Q}^n$ — bien trop petit pour épuiser $\mathbb{R}$.

Cet exemple mérite d'être retenu : tous les espaces vectoriels rencontrés jusqu'ici admettaient une base finie, mais ce n'est nullement la règle générale. Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$ est dans le même cas.