EXERCICES – CHAPITRE 6

ESPACES VECTORIELS

Espaces vectoriels : généralités

EXERCICE 1 ⋆

Les ensembles suivants, munis des lois indiquées, sont-ils des espaces vectoriels ? Le cas échéant, préciser sur quel corps ; sinon, indiquer quel axiome échoue.

1. $\mathbb{R}^2$, muni des lois usuelles, comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. $\mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$, muni des opérations point par point, comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
3. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, l'ensemble des suites réelles, comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
4. $\mathbb{R}_+$, muni de l'addition et de la multiplication usuelles, comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
5. $\mathbb{Q}$, muni de l'addition et de la multiplication usuelles, comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
6. $\mathbb{R}$, muni de l'addition et de la multiplication usuelles, comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

EXERCICE 2 ⋆

Soit E un K-espace vectoriel, $\lambda \in K$ et $x \in E$.

1. Démontrer que $0_K \cdot x = 0_E$. On pourra partir de $0_K = 0_K + 0_K$.
2. Démontrer que $\lambda \cdot 0_E = 0_E$.
3. Démontrer que $(-1_K) \cdot x = -x$.
4. Démontrer que $\lambda \cdot x = 0_E$ entraîne $\lambda = 0_K$ ou $x = 0_E$. Où l'hypothèse « K est un corps » intervient-elle ?

EXERCICE 3 ⋆⋆

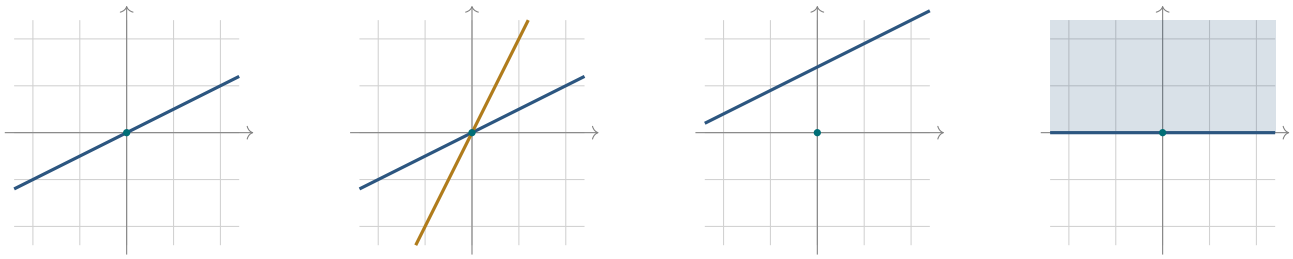
On munit $\mathbb{R}^2$ de lois inhabituelles. Dans chaque cas, déterminer si l'on obtient un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, en identifiant précisément l'axiome qui échoue le cas échéant.

1. L'addition usuelle et la loi externe $\lambda \star (x\,;y) = (\lambda x\,;\,y)$.
2. La loi externe usuelle et l'addition $(x\,;y) \boxplus (x'\,;y') = (x + x'\,;\,0)$.
3. L'addition usuelle et la loi externe $\lambda \star (x\,;y) = (\lambda^2 x\,;\,\lambda^2 y)$.

Sous-espaces vectoriels

EXERCICE 4 ⋆

Les quatre parties de $\mathbb{R}^2$ représentées ci-dessous sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$? Justifier à chaque fois par un argument de nature géométrique.



(a) (b) (c) (d)

Le point bleu pétrole marque l'origine ; le dernier dessin représente le demi-plan $y \geqslant 0$.

EXERCICE 5 ⋆⋆

Dans chacun des cas suivants, l'ensemble F est-il un sous-espace vectoriel de E ?

1. $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{(x\,;y) \in E \mid ax + by + c = 0\}$, où a, b et c sont trois réels fixés.
2. $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x\,;y\,;z) \in E \mid x + y + 3z = 0\}$.
3. $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x\,;y\,;z) \in E \mid x + y + 3z = 2\}$.
4. $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{(x\,;y) \in E \mid xy = 0\}$.
5. $E = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et F est l'ensemble des suites convergentes.
6. $E = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et F est l'ensemble des suites convergeant vers α, où α est un réel fixé.
7. $E = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et F est l'ensemble des suites tendant vers $+\infty$.
8. $E = \mathcal{S}(\mathbb{C})$ et $F = \{(x_n) \in E \mid \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} = 5x_{n+1} - 2x_n\}$.
9. $E = \mathcal{F}([0\,;1]\,;\mathbb{R})$ et $F = \{f \in E \mid f(0) = \pi f(1)\}$.

EXERCICE 6 ⋆

Parmi les parties suivantes de $\mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$, lesquelles sont des sous-espaces vectoriels ?

1. les fonctions paires
2. les fonctions impaires
3. les fonctions croissantes
4. les fonctions bornées
5. les fonctions positives
6. $\{f \mid f(1) = 0\}$
7. $\{f \mid f(1) = 1\}$
8. les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2

EXERCICE 7 ⋆⋆

Soient E un K-espace vectoriel et u, v deux vecteurs de E. On note :

$$\text{Vect}(u\,;v) = \{\lambda u + \mu v \mid (\lambda\,;\mu) \in K^2\}$$

1. Démontrer que $\text{Vect}(u\,;v)$ est un sous-espace vectoriel de E, dont $(u\,;v)$ est une famille génératrice.

2. Démontrer que tout sous-espace vectoriel de E contenant u et v contient $\text{Vect}(u\,;v)$.
3. Dans $\mathbb{R}^3$, décrire $\text{Vect}\big((1\,;0\,;1)\,;(0\,;1\,;1)\big)$ par une équation cartésienne.
4. Dans $\mathbb{R}^3$, décrire $\text{Vect}\big((1\,;2\,;3)\,;(2\,;4\,;6)\big)$. Que remarque-t-on ?

Opérations sur les sous-espaces

EXERCICE 8 ⋆

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les trois parties suivantes :

$$F = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\} \qquad G = \text{Vect}\big((1\,;1\,;1)\big) \qquad H = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=0\}$$

1. Justifier que F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $F \cap G$, puis $F \cap H$.
3. L'ensemble $F \cup G$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? On exhibera un contre-exemple explicite.
4. Démontrer que $F + G = \mathbb{R}^3$, en donnant pour tout $(x\,;y\,;z)$ une décomposition explicite.

EXERCICE 9 ⋆⋆

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E.

1. Démontrer que $F \subset F+G$ et $G \subset F+G$.
2. Soit H un sous-espace vectoriel de E contenant F et G. Démontrer que $F+G \subset H$.
3. Conclure : $F+G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $F \cup G$.
4. En déduire que $F+G=F$ si et seulement si $G \subset F$.

EXERCICE 10 ⋆⋆⋆

Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E.

1. Démontrer que si $F \subset H$, alors $(F+G) \cap H = F + (G \cap H)$.
2. En déduire que si $F \subset H$ ou $G \subset H$, alors :

$$(F+G) \cap H = (F \cap H) + (G \cap H) \quad (*) \qquad \text{et} \qquad F + (G \cap H) = (F+G) \cap (F+H) \quad (**)$$

3. Sans aucune hypothèse d'inclusion, démontrer qu'une inclusion subsiste dans $(*)$ et dans $(**)$, en précisant son sens.
4. Donner, dans $E = \mathbb{R}^2$, un exemple de trois sous-espaces pour lesquels ces deux inclusions sont strictes.

Sommes directes et supplémentaires

EXERCICE 11 ⋆

On reprend les sous-espaces F et G de l'exercice 8.

1. Démontrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. Décomposer explicitement le vecteur $(1\,;2\,;6)$ sur F et G.
3. Les sous-espaces F et H de l'exercice 8 sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$? Justifier.

EXERCICE 12 ⋆⋆

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{I}$ celui des fonctions impaires.

1. Démontrer que $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\}$.
2. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$. Vérifier que les fonctions définies par :

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

   appartiennent respectivement à $\mathcal{P}$ et à $\mathcal{I}$, et que $f = p + i$.
3. Conclure que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$.
4. Décomposer la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ selon cette décomposition.

EXERCICE 13 ⋆⋆

On pose :

$$F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R}) \mid f(0) = f(1) = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \{x \mapsto ax + b \mid (a\,;b) \in \mathbb{R}^2\}$$

1. Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$.
2. Démontrer que F et G sont en somme directe.
3. Soit $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$. Déterminer les réels a et b pour lesquels la fonction $f : x \mapsto h(x) - (ax + b)$ appartient à F.
4. En déduire que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$.

EXERCICE 14 ⋆⋆

On note $\mathcal{D}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et l'on pose :

$$F = \{f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$$

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$, et démontrer que c'en est bien un.

Systèmes et bases

EXERCICE 15 ⋆

Les familles suivantes sont-elles libres dans $\mathbb{R}^3$? Si oui, sont-elles génératrices de $\mathbb{R}^3$?

1. $(u\,;v)$ avec $u = (1\,;2\,;3)$ et $v = (-1\,;4\,;6)$.
2. $(u\,;v\,;w)$ avec $u = (1\,;2\,;-1)$, $v = (1\,;0\,;1)$ et $w = (0\,;0\,;1)$.
3. $(u\,;v\,;w)$ avec $u = (1\,;2\,;-1)$, $v = (1\,;0\,;1)$ et $w = (-1\,;2\,;-3)$.

EXERCICE 16 ⋆⋆

Les familles suivantes de $\mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$ sont-elles libres ? On pourra évaluer une combinaison linéaire nulle en des points bien choisis.

1. $(x \mapsto 1\,;\ x \mapsto x\,;\ x \mapsto x^2)$
2. $(\cos\,;\sin)$
3. $(x \mapsto \mathrm{e}^x\,;\ x \mapsto \mathrm{e}^{2x})$
4. $(x \mapsto |x|\,;\ x \mapsto x)$
5. $(x \mapsto 1\,;\ x \mapsto \cos(2x)\,;\ x \mapsto \cos^2(x))$

EXERCICE 17 ⋆⋆

On pose $e_1 = (1\,;1\,;0)$, $e_2 = (0\,;1\,;1)$ et $e_3 = (1\,;0\,;1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

1. Démontrer que la famille $(e_1\,;e_2\,;e_3)$ est libre.
2. Démontrer qu'elle est génératrice de $\mathbb{R}^3$, en exprimant les coefficients en fonction de $(x\,;y\,;z)$.
3. Conclure, puis déterminer les coordonnées du vecteur $(1\,;2\,;3)$ dans cette base.
4. Quelles sont les coordonnées de ce même vecteur dans la base canonique ?

EXERCICE 18 ⋆⋆

L'ensemble $\mathbb{C}$ peut être vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, ou comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, la loi externe étant dans les deux cas la multiplication des complexes.

1. Justifier que ces deux structures sont bien définies.
2. Démontrer que la famille (1) est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
3. Démontrer que la famille $(1\,;\mathrm{i})$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
4. La famille $(1\,;\mathrm{i})$ est-elle libre dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$? Que conclure ?

Exercices de synthèse

EXERCICE 19 : VRAI OU FAUX

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Dans tout l'exercice, E désigne un K-espace vectoriel.

1. Un sous-espace vectoriel de E contient toujours le vecteur nul.
2. La réunion de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel.
3. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel.
4. La somme de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel.
5. Deux sous-espaces vectoriels dont l'intersection est réduite au vecteur nul sont supplémentaires dans E.
6. Une famille contenant le vecteur nul est liée.
7. Toute famille libre est génératrice.
8. Dans une base, tout vecteur se décompose d'une unique façon.
9. Une droite du plan ne passant pas par l'origine est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
10. Toute partie non vide de E stable par combinaison linéaire est un sous-espace vectoriel.

EXERCICE 20 ⋆⋆⋆

On note E l'ensemble des suites réelles (u_n) vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$$

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
2. Vérifier que les suites $a = \left(2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = \left(3^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à E.
3. Démontrer que la famille $(a\,;b)$ est libre.
4. Soit $u \in E$. Démontrer qu'il existe un unique couple $(\lambda\,;\mu)$ de réels tel que $u_0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = 2\lambda + 3\mu$, puis que $u = \lambda a + \mu b$.

5. Conclure : $(a\,;b)$ est une base de E. Déterminer la suite de E vérifiant $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$.

EXERCICE 21 ⋆⋆⋆

On considère $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. On admet que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$ sont irrationnels.

1. Justifier que $\mathbb{R}$ est bien un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.
2. Démontrer que la famille $(1\,;\sqrt{2})$ est libre.
3. Démontrer que $\text{Vect}(1\,;\sqrt{2}) = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, l'ensemble étudié au chapitre 5.
4. Démontrer que $\sqrt{3}$ n'appartient pas à $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. On pourra supposer $\sqrt{3} = a+b\sqrt{2}$ avec $(a\,;b) \in \mathbb{Q}^2$, élever au carré, et distinguer selon la nullité de ab.
5. En déduire que la famille $(1\,;\sqrt{2})$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}$.
6. Le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$ peut-il admettre une famille génératrice finie ? Commenter.