CORRIGÉ – CHAPITRE 7

ENDOMORPHISMES

Applications linéaires

EXERCICE 1 ⋆

Le premier réflexe est de tester $f(0_E) = 0_F$; lorsque ce test passe, on applique la caractérisation de la proposition 1.

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et deux vecteurs $u = (x\,;y)$, $u' = (x'\,;y')$:

$$f(\lambda u + u') = (2(\lambda x + x') - (\lambda y + y')\,;\,(\lambda x + x') + 3(\lambda y + y')) = \lambda f(u) + f(u')$$

Linéaire.

2. On a $f(0\,;0) = (1\,;0) \neq (0\,;0)$. Non linéaire.

3. On a $f(2 \cdot (1\,;1)) = f(2\,;2) = 4$, alors que $2\,f(1\,;1) = 2$. Non linéaire.

4. C'est l'exemple traité dans le cours. Linéaire.

5. On a $f(2 \cdot (1\,;0)) = (4\,;0)$, alors que $2\,f(1\,;0) = (2\,;0)$. Non linéaire.

6. On a $f(-1) = 1$, alors que $-f(1) = -1$. Non linéaire.

7. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et deux fonctions g, h : $(\lambda g + h)(0) = \lambda g(0) + h(0)$. Linéaire.

8. La dérivation vérifie $(\lambda g + h)' = \lambda g' + h'$. Linéaire.

9. Le décalage se lit terme à terme : $(\lambda u + v)_{n+1} = \lambda u_{n+1} + v_{n+1}$. Linéaire.

10. On a $f(2u) = (4u_n^2)$, alors que $2f(u) = (2u_n^2)$. Non linéaire.

Piège : le test du vecteur nul *élimine* mais ne *valide* pas. Les questions 3, 5, 6 et 10 vérifient toutes $f(0_E) = 0_F$ sans être linéaires pour autant.

EXERCICE 2 ⋆

	Nature	Justification
1.	endomorphisme de $\mathbb{R}^2$	Même espace au départ et à l'arrivée.
4.	aucun des deux	Départ $\mathbb{R}^3$, arrivée $\mathbb{R}^2$: espaces différents, et l'arrivée n'est pas le corps.
7.	forme linéaire sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$	L'espace d'arrivée est $\mathbb{R}$, le corps des scalaires.
8.	aucun des deux	Départ $\mathcal{D}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$, arrivée $\mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$.
9.	endomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$	Même espace au départ et à l'arrivée.

Cas de la première application. Déterminons son noyau :

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ x + 6x = 0 \end{cases} \iff x = y = 0$$

Donc $\operatorname{Ker} f = \{(0\,;0)\}$ et f est injective d'après le théorème 1. Pour la surjectivité, soit $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$; on résout :

$$\begin{cases} 2x - y = a \\ x + 3y = b \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{3a+b}{7} \\ y = \dfrac{2b-a}{7} \end{cases}$$

$$\boxed{f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}^2.}$$

EXERCICE 3 ⋆⋆

1. Posons $a = f(1)$. Pour tout réel x, l'homogénéité donne :

$$f(x) = f(x \cdot 1) = x\, f(1) = ax$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax \quad \text{avec} \quad a = f(1)}$$

2. Si $a = 0$, alors $f = 0$, dont le noyau est $\mathbb{R}$ tout entier : f n'est pas injective. Si $a \neq 0$, l'application $y \mapsto \dfrac{y}{a}$ est une réciproque.

$$\boxed{f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } a \neq 0.}$$

3. Notons $(e_1\,;e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et posons $a = \varphi(e_1)$, $b = \varphi(e_2)$. Tout vecteur s'écrit $(x\,;y) = x\,e_1 + y\,e_2$, d'où par linéarité :

$$\varphi(x\,;y) = x\,\varphi(e_1) + y\,\varphi(e_2) = ax + by$$

$$\boxed{\varphi(x\,;y) = ax + by}$$

4. Le même raisonnement, avec la base canonique $(e_1\,;\ldots\,;e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et $a_k = \varphi(e_k)$, donne :

$$\boxed{\varphi(x_1\,;\ldots\,;x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k}$$

Les formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ sont donc exactement les expressions linéaires homogènes en les coordonnées.

EXERCICE 4 ⋆⋆

1. Soit $x \in E$. Comme $(e_1\,;e_2)$ est une base, il existe $(\lambda\,;\mu)$ tel que $x = \lambda e_1 + \mu e_2$. Par linéarité de f puis de g :

$$f(x) = \lambda f(e_1) + \mu f(e_2) = \lambda g(e_1) + \mu g(e_2) = g(x)$$

$$\boxed{f = g}$$

Une application linéaire est donc entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base.

2. *Existence.* Pour $x \in E$, la décomposition $x = \lambda e_1 + \mu e_2$ est *unique*, puisque $(e_1\,;e_2)$ est une base. On peut donc poser sans ambiguïté :

$$f(x) = \lambda y_1 + \mu y_2$$

Cette application est linéaire : si $x = \lambda e_1 + \mu e_2$ et $x' = \lambda' e_1 + \mu' e_2$, alors $\alpha x + x' = (\alpha\lambda + \lambda')e_1 + (\alpha\mu + \mu')e_2$, d'où :

$$f(\alpha x + x') = (\alpha\lambda + \lambda')y_1 + (\alpha\mu + \mu')y_2 = \alpha f(x) + f(x')$$

Enfin $f(e_1) = y_1$ et $f(e_2) = y_2$, en prenant respectivement $(\lambda\,;\mu) = (1\,;0)$ et $(0\,;1)$.

Unicité. C'est la question 1.

$$\boxed{\text{Il existe une unique } f \in \mathcal{L}(E\,;F) \text{ telle que } f(e_1) = y_1 \text{ et } f(e_2) = y_2.}$$

3. *C'est une base.* La famille est libre : $\lambda(1\,;1) + \mu(1\,;-1) = (0\,;0)$ donne $\lambda + \mu = 0$ et $\lambda - \mu = 0$, donc $\lambda = \mu = 0$. Elle est génératrice : pour $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$, on résout $\lambda + \mu = x$ et $\lambda - \mu = y$, ce qui donne :

$$\lambda = \frac{x+y}{2} \qquad \text{et} \qquad \mu = \frac{x-y}{2}$$

L'endomorphisme. D'après la question 2 :

$$f(x\,;y) = \lambda\,(2\,;0) + \mu\,(0\,;2) = (2\lambda\,;\,2\mu)$$

$$\boxed{f(x\,;y) = (x+y\,;\,x-y)}$$

Vérification : $f(1\,;1) = (2\,;0)$ et $f(1\,;-1) = (0\,;2)$ ✓

EXERCICE 5 ⋆⋆

1. Chaque coordonnée de $r_\theta(x\,;y)$ est une expression linéaire homogène en x et y : la linéarité se vérifie coordonnée par coordonnée, comme à l'exercice 1.

$$\boxed{r_\theta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$$

2. Posons $(X\,;Y) = r_{\theta'}(x\,;y)$. La première coordonnée de $r_\theta(X\,;Y)$ vaut :

$$\begin{aligned} X\cos\theta - Y\sin\theta &= (x\cos\theta' - y\sin\theta')\cos\theta - (x\sin\theta' + y\cos\theta')\sin\theta \\ &= x\big(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'\big) - y\big(\sin\theta'\cos\theta + \cos\theta'\sin\theta\big) \\ &= x\cos(\theta+\theta') - y\sin(\theta+\theta') \end{aligned}$$

Le calcul de la seconde coordonnée est identique et donne $x\sin(\theta+\theta') + y\cos(\theta+\theta')$.

$$\boxed{r_\theta \circ r_{\theta'} = r_{\theta+\theta'}}$$

3. En prenant $\theta' = -\theta$, il vient $r_\theta \circ r_{-\theta} = r_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$, et de même dans l'autre ordre.

$$\boxed{r_\theta \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}^2, \text{ de réciproque } r_{-\theta}.}$$

4. Une application bijective a un noyau réduit au vecteur nul et une image égale à l'espace d'arrivée.

$$\boxed{\operatorname{Ker} r_\theta = \{(0\,;0)\} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} r_\theta = \mathbb{R}^2}$$

5. D'après la question 2, $r_\theta \circ r_\theta = r_{2\theta}$, et cette application vaut Id si et seulement si $\cos(2\theta) = 1$ et $\sin(2\theta) = 0$, c'est-à-dire $2\theta \equiv 0\ [2\pi]$.

$$\boxed{r_\theta \text{ est une symétrie si et seulement si } \theta \equiv 0\ [\pi].}$$

On obtient alors $r_\theta = \mathrm{Id}$ si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, et $r_\theta = -\mathrm{Id}$ si $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$: la symétrie centrale.

Noyau et image

EXERCICE 6 ⋆

1. *Noyau.* On résout $x+y+z=0$ et $x-y=0$, soit $x=y$ puis $z=-2x$:

$$\operatorname{Ker} f = \{(t\,;t\,;-2t) \mid t\in\mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}((1\,;1\,;-2))$$

Image. On a $f(1\,;0\,;0)=(1\,;1)$ et $f(0\,;1\,;0)=(1\,;-1)$. Ces deux vecteurs sont non colinéaires, donc engendrent $\mathbb{R}^2$.

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((1\,;1\,;-2)) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2}$$

2. *Noyau.* Les équations $x-y=0$ et $x+y=0$ donnent $x=y=0$.

Image. Elle est engendrée par $f(1\,;0)=(1\,;1\,;2)$ et $f(0\,;1)=(-1\,;1\,;0)$. Ces deux vecteurs vérifient tous deux $a+b-c=0$, et ils ne sont pas colinéaires : ils engendrent donc le plan d'équation $a+b-c=0$.

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \{(0\,;0)\} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} f = \{(a\,;b\,;c)\in\mathbb{R}^3 \mid a+b-c=0\}}$$

3. *Noyau.* Le système $x+y=0$, $y+z=0$, $z+x=0$ donne $y=-x$, $z=-y=x$, puis $z+x=2x=0$, d'où $x=y=z=0$.

Image. L'application est injective ; pour la surjectivité, on résout $x+y=a$, $y+z=b$, $z+x=c$. En additionnant, $2(x+y+z)=a+b+c$, puis en retranchant chaque ligne on obtient une solution pour tout $(a\,;b\,;c)$.

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \{(0\,;0\,;0)\} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3}$$

4. *Noyau.* Les équations $x=y$, $y=z$ et $z=x$ donnent $x=y=z$.

Image. La somme des trois coordonnées de $f(x\,;y\,;z)$ vaut $(x-y)+(y-z)+(z-x)=0$: l'image est donc contenue dans le plan $\mathcal{P}$ d'équation $a+b+c=0$. Or $f(1\,;0\,;0)=(1\,;0\,;-1)$ et $f(0\,;1\,;0)=(-1\,;1\,;0)$ appartiennent à $\mathcal{P}$ et ne sont pas colinéaires.

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((1\,;1\,;1)) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} f = \{(a\,;b\,;c)\in\mathbb{R}^3 \mid a+b+c=0\}}$$

EXERCICE 7 ⋆

Le théorème 1 ramène l'injectivité à la seule condition $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$, et la surjectivité à $\operatorname{Im} f = F$.

	Injective	**Surjective**	$\dim \operatorname{Ker} f$	$\dim \operatorname{Im} f$	**Somme**
1. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$	non	**oui**	1	2	3
2. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$	**oui**	non	0	2	2
3. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$	**oui**	**oui**	0	3	3
4. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$	non	non	1	2	3

Dans chaque cas, $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$ vaut la dimension de l'espace de *départ*.

C'est la remarque du cours : ce n'est pas une coïncidence, mais le théorème du rang, qui sera démontré au chapitre suivant. On notera que la troisième application est bijective : c'est le seul cas où l'espace de départ et l'espace d'arrivée ont la même dimension *et* le noyau est trivial.

EXERCICE 8 ⋆⋆

1. Les deux applications se lisent terme à terme. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et deux suites u, v :

$$\delta(\lambda u + v)_n = (\lambda u + v)_{n+1} = \lambda u_{n+1} + v_{n+1} = \big(\lambda\,\delta(u) + \delta(v)\big)_n$$

et le calcul est analogue pour τ, dont le terme d'indice 0 vaut 0 dans les deux membres.

$$\boxed{\delta \text{ et } \tau \text{ sont des endomorphismes de } \mathcal{S}(\mathbb{R}).}$$

2. *Pour δ :* on a $\delta(u) = 0$ si et seulement si $u_{n+1} = 0$ pour tout $n \geqslant 0$, c'est-à-dire $u_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$, le terme u_0 restant libre. Pour l'image, soit $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$; la suite $u = (0\,;v_0\,;v_1\,;\dots)$ vérifie $\delta(u) = v$.

Pour τ : on a $\tau(u) = 0$ si et seulement si $u_n = 0$ pour tout n. Et toute suite de la forme $\tau(u)$ a son premier terme nul ; réciproquement, si $v_0 = 0$, la suite $u = (v_1\,;v_2\,;\dots)$ vérifie $\tau(u) = v$.

$$\boxed{\operatorname{Ker}\delta = \operatorname{Vect}\big((1\,;0\,;0\,;\dots)\big) \qquad \operatorname{Im}\delta = \mathcal{S}(\mathbb{R})}$$

$$\boxed{\operatorname{Ker}\tau = \{0\} \qquad \operatorname{Im}\tau = \big\{v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \;\big|\; v_0 = 0\big\}}$$

3. La question précédente se relit ainsi, à l'aide du théorème 1 :

$$\boxed{\delta \text{ est surjectif et non injectif ; } \tau \text{ est injectif et non surjectif.}}$$

4. Pour toute suite u :

$$(\delta \circ \tau)(u) = \delta(0\,;u_0\,;u_1\,;\dots) = (u_0\,;u_1\,;\dots) = u$$

$$(\tau \circ \delta)(u) = \tau(u_1\,;u_2\,;\dots) = (0\,;u_1\,;u_2\,;\dots)$$

$$\boxed{\delta \circ \tau = \mathrm{Id} \qquad \text{tandis que} \qquad \tau \circ \delta \neq \mathrm{Id}}$$

L'application τ admet donc un inverse à gauche sans être inversible, ce qui confirme une fois de plus que $\mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}))$ n'est pas commutatif.

5. On en tire la conclusion générale :

> En dimension infinie, un endomorphisme peut être injectif sans être surjectif, ou surjectif sans être injectif.

Au chapitre 4, on avait démontré qu'un endomorphisme injectif d'un groupe *fini* est automatiquement surjectif. C'est la finitude qui portait tout l'argument, et elle fait ici défaut.

EXERCICE 9 ⋆⋆

1. L'application φ est linéaire d'après l'exercice 3, et son ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$: c'est bien une forme linéaire. Son noyau est l'ensemble des $(x\,;y\,;z)$ tels que $x + 2y - z = 0$, un plan vectoriel, engendré par exemple par $(1\,;0\,;1)$ et $(0\,;1\,;2)$. Enfin $\varphi(1\,;0\,;0) = 1$.

$$\boxed{\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Vect}\big((1\,;0\,;1)\,;(0\,;1\,;2)\big) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}}$$

2. Soit F un sous-espace vectoriel de K non réduit à $\{0_K\}$, et soit $a \in F$ non nul. Pour tout $\lambda \in K$, le corps K fournit a^{-1}, et :

$$\lambda = \big(\lambda a^{-1}\big) \cdot a \in F$$

puisque F est stable par multiplication externe.

$$\boxed{\text{Les seuls sous-espaces vectoriels de } K \text{ sont } \{0_K\} \text{ et } K.}$$

3. D'après la proposition 2, $\operatorname{Im}\varphi$ est un sous-espace vectoriel de K. Si $\varphi \neq 0$, alors $\operatorname{Im}\varphi \neq \{0_K\}$, donc $\operatorname{Im}\varphi = K$ d'après la question 2.

$$\boxed{\text{Toute forme linéaire non nulle est surjective.}}$$

4. Une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée nulle est constante.

$$\boxed{\operatorname{Ker} D = \{\text{fonctions constantes}\}}$$

Ce noyau n'est pas réduit à la fonction nulle, donc $\boxed{D \text{ n'est pas injective.}}$

EXERCICE 10 ⋆⋆⋆

1. Soit $x \in \operatorname{Ker} f$. Alors $f(x) = 0_F$, donc $(g \circ f)(x) = g(0_F) = 0_G$, la dernière égalité venant de la linéarité de g.

Soit $z \in \operatorname{Im}(g \circ f)$. Il existe $x \in E$ tel que $z = g(f(x))$, donc z est l'image par g du vecteur $f(x) \in F$.

$$\boxed{\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g}$$

2. On enchaîne les équivalences :

$$g \circ f = 0 \iff \forall x \in E,\ g(f(x)) = 0_G \iff \forall x \in E,\ f(x) \in \operatorname{Ker} g \iff \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$$

$$\boxed{g \circ f = 0 \iff \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g}$$

3. *Injectivité.* Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. En appliquant g, il vient $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$, donc $x = y$.

Surjectivité. Soit $z \in G$. Comme $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $g(f(x)) = z$. Le vecteur $y = f(x)$ de F vérifie $g(y) = z$.

$$\boxed{g \circ f \text{ injective} \Rightarrow f \text{ injective} \qquad \text{et} \qquad g \circ f \text{ surjective} \Rightarrow g \text{ surjective}}$$

C'est exactement l'exercice 12 du chapitre 4 : une application linéaire est en particulier un morphisme de groupes.

4. La question 2, appliquée avec $g = f$, donne :

$$\boxed{f \circ f = 0 \iff \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f}$$

Exemple. Posons $f(x\,;y) = (y\,;0)$ sur $\mathbb{R}^2$. Alors f est linéaire, non nulle, et :

$$(f \circ f)(x\,;y) = f(y\,;0) = (0\,;0)$$

On a ici $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big((1\,;0)\big) = \operatorname{Ker} f$: l'inclusion est même une égalité.

Structure de l'ensemble des endomorphismes

EXERCICE 11 ⋆

1. Soient $\alpha \in K$ et $(x\,;y) \in E^2$. En utilisant successivement la définition des opérations point par point, puis la linéarité de f et de g :

$$\begin{aligned}(\lambda f + g)(\alpha x + y) &= \lambda\, f(\alpha x + y) + g(\alpha x + y)\\ &= \lambda(\alpha f(x) + f(y)) + \alpha g(x) + g(y)\\ &= \alpha(\lambda f(x) + g(x)) + (\lambda f(y) + g(y))\\ &= \alpha\,(\lambda f + g)(x) + (\lambda f + g)(y)\end{aligned}$$

$$\boxed{\lambda f + g \in \mathcal{L}(E\,;F)}$$

2. On a $\mathcal{L}(E\,;F) \subset \mathcal{F}(E\,;F)$, l'application nulle est linéaire, et la question 1 donne la stabilité par $\lambda f + g$: c'est la caractérisation du chapitre 6.

$$\boxed{\mathcal{L}(E\,;F) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{F}(E\,;F).}$$

3. On additionne coordonnée par coordonnée :

$$(f+g)(x\,;y) = (x\,;0) + (0\,;y) = (x\,;y) \qquad \text{donc} \qquad \boxed{f + g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}}$$

$$(2f - 3g)(x\,;y) = 2\,(x\,;0) - 3\,(0\,;y) = \boxed{(2x\,;\,-3y)}$$

4. On compose dans les deux sens :

$$(f \circ g)(x\,;y) = f(0\,;y) = (0\,;0) \qquad \text{et} \qquad (g \circ f)(x\,;y) = g(x\,;0) = (0\,;0)$$

$$\boxed{f \circ g = g \circ f = 0, \text{ alors que } f \neq 0 \text{ et } g \neq 0.}$$

$$\boxed{\text{L'anneau } \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \text{ possède des diviseurs de zéro : il n'est pas intègre.}}$$

EXERCICE 12 ⋆⋆

1. La dérivation est linéaire, et pour M : $M(\lambda P + Q)(x) = x(\lambda P(x) + Q(x)) = \lambda\, M(P)(x) + M(Q)(x)$. De plus, le produit d'un polynôme par x reste un polynôme.

On calcule alors, pour toute fonction polynomiale P :

$$(D \circ M)(P) = \big(x \mapsto xP(x)\big)' = P + \big(x \mapsto xP'(x)\big) \qquad \text{et} \qquad (M \circ D)(P) = \big(x \mapsto xP'(x)\big)$$

$$\boxed{D \circ M - M \circ D = \mathrm{Id}}$$

2. On compose dans les deux sens :

$$(f \circ g)(x\,;y) = f(x\,;0) = (0\,;0) \qquad \text{et} \qquad (g \circ f)(x\,;y) = g(y\,;0) = (y\,;0)$$

$$\boxed{f \circ g = 0 \neq g \circ f}$$

Ces deux exemples montrent que l'anneau $\mathcal{L}(E)$ n'est pas commutatif, conformément à la proposition 3.

3. En développant dans l'anneau $\mathcal{L}(E)$:

$$\boxed{(f+g) \circ (f+g) = f \circ f + f \circ g + g \circ f + g \circ g}$$

$$\boxed{\text{On retrouve } f^2 + 2\,f \circ g + g^2 \text{ si et seulement si } f \circ g = g \circ f.}$$

C'est exactement la situation rencontrée au chapitre 5 : les identités remarquables ne valent que pour des éléments qui commutent.

EXERCICE 13 ⋆⋆

1. Soient $\lambda \in K$ et $(y\,;y') \in E^2$. Posons $x = f^{-1}(y)$ et $x' = f^{-1}(y')$. Par linéarité de f :

$$f(\lambda x + x') = \lambda f(x) + f(x') = \lambda y + y'$$

En appliquant f^{-1} aux deux membres :

$$f^{-1}(\lambda y + y') = \lambda x + x' = \lambda f^{-1}(y) + f^{-1}(y')$$

$$\boxed{f^{-1} \text{ est linéaire.}}$$

2. On a $\mathrm{GL}(E) \subset \mathcal{S}(E)$, et Id_E est un automorphisme. Soient f, $g \in \mathrm{GL}(E)$. D'après la question 1, g^{-1} est linéaire, et elle est bijective ; la proposition 3 donne alors que $f \circ g^{-1}$ est linéaire, et c'est une bijection.

$$\boxed{\mathrm{GL}(E) \text{ est un sous-groupe de } \mathcal{S}(E).}$$

3. Il suffit de vérifier que $f^{-1} \circ g^{-1}$ se comporte comme la réciproque de $g \circ f$:

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_E$$

et le calcul dans l'autre ordre est analogue.

$$\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$$

4. L'exercice 2 a établi que cette application est un automorphisme, avec :

$$\boxed{f \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2) \qquad \text{et} \qquad f^{-1}(a\,;b) = \left(\frac{3a+b}{7}\,;\,\frac{2b-a}{7}\right)}$$

Vérification : $f^{-1}(f(1\,;0)) = f^{-1}(2\,;1) = \left(\frac{7}{7}\,;\,\frac{0}{7}\right) = (1\,;0)$ ✓

EXERCICE 14 ⋆⋆

1. Pour $\alpha \in K$ et $(x\,;y) \in E^2$:

$$h_\lambda(\alpha x + y) = \lambda \cdot (\alpha x + y) = \alpha\,(\lambda \cdot x) + \lambda \cdot y = \alpha\, h_\lambda(x) + h_\lambda(y)$$

et l'axiome **A** de la loi externe donne :

$$(h_\lambda \circ h_\mu)(x) = \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x = h_{\lambda\mu}(x)$$

$$\boxed{h_\lambda \in \mathcal{L}(E) \qquad \text{et} \qquad h_\lambda \circ h_\mu = h_{\lambda\mu}}$$

2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $x \in E$, l'homogénéité de f donne :

$$(h_\lambda \circ f)(x) = \lambda \cdot f(x) = f(\lambda \cdot x) = (f \circ h_\lambda)(x)$$

$$\boxed{h_\lambda \text{ commute avec tout endomorphisme de } E.}$$

3. Si $\lambda = 0$, alors $h_0 = 0$. Sinon, la question 1 donne $h_\lambda \circ h_{1/\lambda} = h_1 = \mathrm{Id}_E$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } \lambda = 0 \ : \ \mathrm{Ker}\, h_0 = E \text{ et } \mathrm{Im}\, h_0 = \{0_E\}.\\ \text{Si } \lambda \neq 0 \ : \ \mathrm{Ker}\, h_\lambda = \{0_E\},\ \mathrm{Im}\, h_\lambda = E,\ \text{et } h_\lambda \in \mathrm{GL}(E) \text{ avec } h_\lambda^{-1} = h_{1/\lambda}.\end{array}}$$

4. On suppose $E \neq \{0_E\}$. L'égalité $h_\lambda \circ h_\lambda = h_{\lambda^2}$ donne :

$$h_\lambda \text{ projecteur} \iff \lambda^2 = \lambda \iff \lambda \in \{0\,;1\}$$

$$h_\lambda \text{ symétrie} \iff \lambda^2 = 1 \iff \lambda \in \{-1\,;1\}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Les seules homothéties qui sont des projecteurs sont } 0 \text{ et } \mathrm{Id}_E.\\ \text{Les seules qui sont des symétries sont } \mathrm{Id}_E \text{ et } -\mathrm{Id}_E.\end{array}}$$

Projecteurs et symétries

EXERCICE 15 ⋆

1. On lit directement sur le quadrillage :

$$\boxed{x = (3\,;4) \qquad u = (4\,;2) \qquad v = (5\,;0)}$$

2. L'image d'un projecteur sur D est contenue dans D. Or $u = (4\,;2) = 2 \times (2\,;1)$ appartient à D, tandis que $v = (5\,;0)$ n'y appartient pas.

On vérifie de plus que $x - u = (-1\,;2)$ dirige Δ : le vecteur u est bien obtenu à partir de x en se déplaçant parallèlement à Δ jusqu'à rencontrer D.

$$\boxed{u = p(x) \qquad \text{et} \qquad v = s(x)}$$

3. On applique la relation aux coordonnées lues :

$$2\,p(x) - x = 2\,(4\,;2) - (3\,;4) = (8-3\,;\,4-4) = (5\,;0) = s(x)$$

$$\boxed{\text{La relation } s = 2p - \mathrm{Id} \text{ est bien vérifiée.}}$$

4. Le noyau d'un projecteur est la direction parallèlement à laquelle il projette, et son image est le sous-espace sur lequel il projette. La proposition 4 identifie ensuite les deux sous-espaces caractéristiques de s.

$$\boxed{\operatorname{Ker} p = \Delta = \operatorname{Vect}\big((-1\,;2)\big) \qquad \operatorname{Im} p = D = \operatorname{Vect}\big((2\,;1)\big)}$$

$$\boxed{\operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}) = \operatorname{Im} p = D \qquad \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}) = \operatorname{Ker} p = \Delta}$$

EXERCICE 16 ⋆

A. Projecteurs.

1. $p(p(x\,;y\,;z)) = p(x\,;y\,;0) = (x\,;y\,;0) = p(x\,;y\,;z)$: c'est un projecteur. Son noyau est l'ensemble des $(0\,;0\,;z)$, son image le plan $z = 0$.

$$\boxed{\operatorname{Ker} p = \operatorname{Vect}\big((0\,;0\,;1)\big) \qquad \operatorname{Im} p = \operatorname{Vect}\big((1\,;0\,;0)\,;(0\,;1\,;0)\big)}$$

Ces deux sous-espaces sont bien supplémentaires : $(x\,;y\,;z) = (x\,;y\,;0) + (0\,;0\,;z)$, de façon unique.

2. $p(p(x\,;y)) = p\left(\dfrac{x+y}{2}\,;\,\dfrac{x+y}{2}\right) = \left(\dfrac{x+y}{2}\,;\,\dfrac{x+y}{2}\right) = p(x\,;y)$: c'est un projecteur.

$$\boxed{\operatorname{Ker} p = \operatorname{Vect}\big((1\,;-1)\big) \qquad \operatorname{Im} p = \operatorname{Vect}\big((1\,;1)\big)}$$

Deux droites distinctes du plan sont supplémentaires ✓

3. $p(p(x\,;y\,;z)) = p(x+z\,;\,y+z\,;\,0) = (x+z\,;\,y+z\,;\,0) = p(x\,;y\,;z)$: c'est un projecteur.

Son noyau est donné par $x + z = 0$ et $y + z = 0$, soit $(x\,;y\,;z) = t\,(-1\,;-1\,;1)$.

$$\boxed{\operatorname{Ker} p = \operatorname{Vect}\big((1\,;1\,;-1)\big) \qquad \operatorname{Im} p = \{(a\,;b\,;c) \mid c = 0\}}$$

Vérification du théorème 2 : $(x\,;y\,;z) = (x+z\,;\,y+z\,;\,0) + z\,(-1\,;-1\,;1)$, le second terme appartenant à $\operatorname{Ker} p$ ✓

4. $f(f(x\,;y)) = f(x\,;2y) = (x\,;4y)$, qui diffère de $f(x\,;y) = (x\,;2y)$ dès que $y \neq 0$.

$$\boxed{f \text{ n'est pas un projecteur.}}$$

B. Symétries.

1. $s\big(s(x\,;y)\big) = s(y\,;x) = (x\,;y)$: c'est une symétrie. Les invariants vérifient $y = x$, les vecteurs opposés à leur image vérifient $y = -x$.

$$\boxed{\operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}) = \operatorname{Vect}\big((1\,;1)\big) \qquad \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}) = \operatorname{Vect}\big((1\,;-1)\big)}$$

2. $s\big(s(x\,;y\,;z)\big) = s(x\,;y\,;-z) = (x\,;y\,;z)$: c'est une symétrie. Les invariants vérifient $-z = z$, donc $z = 0$; les autres vérifient $x = -x$ et $y = -y$.

$$\boxed{\operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}) = \{(x\,;y\,;0)\} \qquad \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}) = \operatorname{Vect}\big((0\,;0\,;1)\big)}$$

3. $s\big(s(x\,;y)\big) = s(x + 2y\,;\,-y) = \big(x + 2y - 2y\,;\,y\big) = (x\,;y)$: c'est une symétrie. Les invariants vérifient $-y = y$, donc $y = 0$; les autres vérifient $x + 2y = -x$, soit $y = -x$.

$$\boxed{\operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}) = \operatorname{Vect}\big((1\,;0)\big) \qquad \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}) = \operatorname{Vect}\big((1\,;-1)\big)}$$

4. $g\big(g(x\,;y)\big) = g(2x\,;-y) = (4x\,;y)$, qui diffère de $(x\,;y)$ dès que $x \neq 0$.

$$\boxed{g \text{ n'est pas une symétrie.}}$$

EXERCICE 17 ⋆⋆

1. On développe dans l'anneau $\mathcal{L}(E)$, en utilisant $p \circ p = p$:

$$q \circ q = (\mathrm{Id} - p) \circ (\mathrm{Id} - p) = \mathrm{Id} - p - p + p \circ p = \mathrm{Id} - 2p + p = \mathrm{Id} - p = q$$

$$\boxed{q \text{ est un projecteur.}}$$

2. *Noyau de q.* On a $q(x) = 0_E$ si et seulement si $x = p(x)$, c'est-à-dire si x est invariant par p. Or le théorème 2 identifie l'ensemble des vecteurs invariants par p à $\operatorname{Im} p$.

Image de q. Pour tout x, $p\big(q(x)\big) = p(x) - p\big(p(x)\big) = 0_E$, donc $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Ker} p$. Réciproquement, si $x \in \operatorname{Ker} p$, alors $q(x) = x - 0_E = x$, donc $x \in \operatorname{Im} q$.

$$\boxed{\operatorname{Ker} q = \operatorname{Im} p \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} q = \operatorname{Ker} p}$$

3. On développe, en utilisant à nouveau $p \circ p = p$:

$$p \circ q = p \circ (\mathrm{Id} - p) = p - p \circ p = p - p = 0$$

et le calcul dans l'autre ordre donne le même résultat.

$$\boxed{p \circ q = q \circ p = 0}$$

4. L'interprétation est immédiate :

$$\boxed{\text{Si } p \text{ projette sur } D \text{ parallèlement à } \Delta, \text{ alors } q \text{ projette sur } \Delta \text{ parallèlement à } D.}$$

L'égalité $p(x) + q(x) = x$ n'est autre que la décomposition de x sur les deux sous-espaces supplémentaires : p en fournit une composante, q l'autre.

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. On développe, en utilisant $s \circ s = \mathrm{Id}$:

$$p \circ p = \frac{1}{4}(s + \mathrm{Id}) \circ (s + \mathrm{Id}) = \frac{1}{4}(s \circ s + 2s + \mathrm{Id}) = \frac{1}{4}(2s + 2\,\mathrm{Id}) = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}) = p$$

$$\boxed{p \text{ est un projecteur.}}$$

2. D'après le théorème 2, $\mathrm{Im}\, p$ est l'ensemble des vecteurs invariants par p. Or :

$$p(x) = x \iff \frac{1}{2}(s(x) + x) = x \iff s(x) = x \iff x \in \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id})$$

Et pour le noyau :

$$p(x) = 0_E \iff s(x) + x = 0_E \iff s(x) = -x \iff x \in \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id})$$

$$\boxed{\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id})}$$

3. Le théorème 2 donne $E = \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Im}\, p$, et la question 2 identifie ces deux sous-espaces.

$$\boxed{E = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id})}$$

Autrement dit, tout vecteur se décompose de façon unique en une partie invariante et une partie changée en son opposé. La décomposition paires/impaires du chapitre 6 en est le cas particulier $s : f \mapsto (x \mapsto f(-x))$.

4. On vérifie d'abord : $s(s(x\,;y\,;z)) = s(z\,;y\,;x) = (x\,;y\,;z)$, donc s est bien une symétrie.

Vecteurs invariants. L'égalité $(z\,;y\,;x) = (x\,;y\,;z)$ équivaut à $z = x$, la coordonnée y restant libre :

$$\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}) = \{(a\,;b\,;a)\} = \mathrm{Vect}\big((1\,;0\,;1)\,;(0\,;1\,;0)\big)$$

Vecteurs opposés à leur image. L'égalité $(z\,;y\,;x) = (-x\,;-y\,;-z)$ équivaut à $z = -x$ et $y = 0$:

$$\mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\big((1\,;0\,;-1)\big)$$

Supplémentarité. Le vecteur $(1\,;0\,;-1)$ ne vérifie pas $z = x$, donc l'intersection des deux sous-espaces est réduite au vecteur nul. Et pour tout $(x\,;y\,;z)$:

$$(x\,;y\,;z) = \underbrace{\left(\frac{x+z}{2}\,;\,y\,;\,\frac{x+z}{2}\right)}_{\in \mathrm{Ker}\,(s-\mathrm{Id})} + \underbrace{\left(\frac{x-z}{2}\,;\,0\,;\,-\frac{x-z}{2}\right)}_{\in \mathrm{Ker}\,(s+\mathrm{Id})}$$

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}) \text{ : un plan et une droite.}}$$

EXERCICE 19 ⋆⋆⋆

1. Les sous-espaces F et G étant supplémentaires, tout vecteur x de E s'écrit $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$, et cette écriture est *unique*. Le vecteur x_F est donc déterminé sans ambiguïté par x.

$$\boxed{p \text{ est bien définie.}}$$

2. Soient $\lambda \in K$ et x, $y \in E$, de décompositions $x = x_F + x_G$ et $y = y_F + y_G$. Alors :

$$\lambda x + y = \underbrace{(\lambda x_F + y_F)}_{\in F} + \underbrace{(\lambda x_G + y_G)}_{\in G}$$

puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels. Par unicité de la décomposition, c'est *la* décomposition de $\lambda x + y$, d'où :

$$p(\lambda x + y) = \lambda x_F + y_F = \lambda\, p(x) + p(y)$$

$$\boxed{p \text{ est linéaire.}}$$

3. Soit $x \in E$. Le vecteur $p(x) = x_F$ appartient à F, donc sa décomposition est $x_F + 0_E$, avec $0_E \in G$. Par conséquent :

$$p(p(x)) = x_F = p(x) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{p \circ p = p}$$

4. Par construction $\operatorname{Im} p \subset F$; et tout $x \in F$ vérifie $p(x) = x$, donc $F \subset \operatorname{Im} p$. Par ailleurs $p(x) = 0_E$ équivaut à $x_F = 0_E$, c'est-à-dire $x = x_G \in G$.

$$\boxed{\operatorname{Im} p = F \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Ker} p = G}$$

5. On peut donc énoncer la correspondance :

> À tout projecteur p correspond le couple de supplémentaires $(\operatorname{Im} p\,;\operatorname{Ker} p)$, et à tout couple de supplémentaires $(F\,;G)$ correspond la projection sur F parallèlement à G. Ces deux constructions sont réciproques l'une de l'autre.

6. Le chapitre 6 a établi la décomposition, avec $s = \dfrac{x+y+z}{3}$:

$$(x\,;y\,;z) = \underbrace{(x-s\,;\,y-s\,;\,z-s)}_{\in F} + \underbrace{(s\,;s\,;s)}_{\in G}$$

Le projecteur cherché est donc $p(x\,;y\,;z) = (x-s\,;\,y-s\,;\,z-s)$, soit :

$$\boxed{p(x\,;y\,;z) = \left(\frac{2x-y-z}{3}\,;\,\frac{-x+2y-z}{3}\,;\,\frac{-x-y+2z}{3}\right)}$$

On retrouvera exactement cette application à l'exercice 21, obtenue cette fois par un tout autre chemin.

Exercices de synthèse

EXERCICE 20 : VRAI OU FAUX

1. **Vraie** C'est la remarque qui suit la proposition 1, obtenue en prenant $\lambda = -1_K$ et $y = x$ dans la caractérisation.

2. **Fausse** L'application $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ envoie 0 sur 0 sans être linéaire (exercice 1). Le test du vecteur nul élimine, il ne valide pas.

3. **Vraie** C'est la proposition 2.

4. **Fausse** L'image est un sous-espace vectoriel de F, l'espace d'*arrivée*. L'exercice 6 en donne plusieurs illustrations, où E et F ne sont même pas de même nature.

5. **Vraie** C'est le théorème 1, et c'est lui que l'on utilise en pratique.

6. **Fausse** L'exercice 12 fournit deux contre-exemples, dont le couple $(D\,;M)$ pour lequel $D \circ M - M \circ D = \mathrm{Id}$.

7. **Vraie** C'est le deuxième point de la proposition 3.

8. **Vraie** C'est la seconde affirmation du théorème 2, dont la démonstration du cours établit les deux inclusions.

9. **Fausse** Un projecteur bijectif aurait un noyau réduit au vecteur nul, donc $E = \operatorname{Im} p$ et $p = \mathrm{Id}_E$. Tous les autres projecteurs, comme ceux de l'exercice 16, ne sont pas injectifs.

10. **Vraie** L'égalité $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ montre que s est bijective et qu'elle est sa propre réciproque, exactement comme les involutions du chapitre 3.

EXERCICE 21 ⋆⋆⋆

1. Chaque coordonnée de $f(x\,;y\,;z)$ est une expression linéaire homogène en x, y et z : la linéarité se vérifie coordonnée par coordonnée.

$$\boxed{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$$

2. On résout le système $f(x\,;y\,;z) = (0\,;0\,;0)$:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

En soustrayant la deuxième ligne à la première : $3x - 3y = 0$, donc $x = y$. La première devient alors $2x - x - z = 0$, soit $z = x$. La troisième est alors automatiquement vérifiée : $-x - x + 2x = 0$.

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\big((1\,;1\,;1)\big)}$$

Ce noyau n'est pas réduit au vecteur nul : $\boxed{f \text{ n'est pas injective.}}$

3. La somme des trois coordonnées de $f(x\,;y\,;z)$ vaut :

$$(2x - y - z) + (-x + 2y - z) + (-x - y + 2z) = 0$$

donc $\operatorname{Im} f \subset \mathcal{P}$, où $\mathcal{P}$ est le plan d'équation $a + b + c = 0$. Réciproquement, $f(1\,;0\,;0) = (2\,;-1\,;-1)$ et $f(0\,;1\,;0) = (-1\,;2\,;-1)$ appartiennent à $\mathcal{P}$ et ne sont pas colinéaires : ils engendrent donc le plan tout entier.

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \big\{(a\,;b\,;c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b + c = 0\big\}}$$

4. On reconnaît exactement les deux sous-espaces $G = \operatorname{Vect}\big((1\,;1\,;1)\big)$ et $F = \{x + y + z = 0\}$ du chapitre 6, dont l'exercice 11 a établi qu'ils sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f}$$

5. On remarque d'abord que, pour tout $(x\,;y\,;z)$:

$$f(x\,;y\,;z) = 3\,(x\,;y\,;z) - (x + y + z)\,(1\,;1\,;1)$$

En appliquant f et en utilisant que $(1\,;1\,;1)$ appartient au noyau :

$$f\big(f(x\,;y\,;z)\big) = 3\,f(x\,;y\,;z) - \big(\text{somme des coordonnées de } f(x\,;y\,;z)\big)\,(1\,;1\,;1) = 3\,f(x\,;y\,;z)$$

la somme en question étant nulle d'après la question 3.

$$\boxed{f \circ f = 3f}$$

En posant $p = \dfrac{1}{3}f$, il vient alors :

$$p \circ p = \frac{1}{9}\,(f \circ f) = \frac{1}{9} \times 3f = \frac{1}{3}f = p \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{p \text{ est un projecteur.}}$$

6. Comme $p = \frac{1}{3}f$, on a $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} f$.

$$\boxed{\begin{array}{l} p \text{ est la projection sur le plan d'équation } x + y + z = 0, \\ \text{parallèlement à la droite } \operatorname{Vect}\big((1\,;1\,;1)\big). \end{array}}$$

C'est exactement l'application obtenue à la question 6 de l'exercice 19, où elle avait été construite à partir de la décomposition. Les deux chemins — l'un par le théorème 2, l'autre par sa réciproque — mènent au même endomorphisme.

EXERCICE 22 ⋆⋆⋆

1. On développe dans l'anneau $\mathcal{L}(E)$, en utilisant $p \circ p = p$ et $q \circ q = q$:

$$(p+q) \circ (p+q) = p \circ p + p \circ q + q \circ p + q \circ q = p + 0 + 0 + q = p + q$$

$$\boxed{p+q \text{ est un projecteur.}}$$

2. Le même développement, sans hypothèse cette fois, donne :

$$(p+q) \circ (p+q) = p + p \circ q + q \circ p + q$$

Si $p+q$ est un projecteur, ce membre vaut $p+q$, et il reste :

$$\boxed{p \circ q + q \circ p = 0}$$

3. Composons cette égalité à gauche par p, en utilisant $p \circ p = p$:

$$p \circ p \circ q + p \circ q \circ p = 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad p \circ q + p \circ q \circ p = 0 \tag{i}$$

Composons-la maintenant à droite par p :

$$p \circ q \circ p + q \circ p \circ p = 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad p \circ q \circ p + q \circ p = 0 \tag{ii}$$

En soustrayant (ii) à (i), le terme $p \circ q \circ p$ disparaît :

$$\boxed{p \circ q = q \circ p}$$

En reportant dans la question 2, il vient $2\,p \circ q = 0$, et le corps étant $\mathbb{R}$:

$$\boxed{p \circ q = q \circ p = 0}$$

4. Les deux questions précédentes se rassemblent :

$$\boxed{p+q \text{ est un projecteur} \iff p \circ q = q \circ p = 0}$$

5. L'exercice 11 a établi $p \circ q = q \circ p = 0$ pour ces deux applications, et l'on a $p + q = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$, qui est bien un projecteur puisque $\mathrm{Id} \circ \mathrm{Id} = \mathrm{Id}$.

$$\boxed{\text{L'équivalence est vérifiée.}}$$

Géométriquement, p projette sur l'axe des abscisses parallèlement à l'axe des ordonnées, et q fait l'inverse : leurs images sont supplémentaires, et leur somme reconstitue tout vecteur.