EXERCICES – CHAPITRE 7

ENDOMORPHISMES

Applications linéaires

EXERCICE 1 ⋆

Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Justifier, en exhibant un contre-exemple le cas échéant.

1. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (2x-y\,;\,x+3y) \end{array}\right.$
2. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x+1\,;\,y) \end{array}\right.$
3. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x\,;y) & \longmapsto & xy \end{array}\right.$
4. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (x-y\,;\,y-z) \end{array}\right.$
5. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x^2\,;\,y) \end{array}\right.$
6. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}\right.$
7. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ g & \longmapsto & g(0) \end{array}\right.$
8. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R}) \\ g & \longmapsto & g' \end{array}\right.$
9. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ (u_n) & \longmapsto & (u_{n+1}) \end{array}\right.$
10. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ (u_n) & \longmapsto & (u_n^2) \end{array}\right.$

EXERCICE 2 ⋆

Reprendre les applications de l'exercice 1 qui sont linéaires, et préciser pour chacune s'il s'agit d'un endomorphisme, d'une forme linéaire, ou d'aucun des deux. Pour la première, démontrer de plus qu'il s'agit d'un automorphisme.

EXERCICE 3 ⋆⋆

1. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, où $\mathbb{R}$ est vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Démontrer qu'il existe un réel a tel que $f(x) = ax$ pour tout x.
2. À quelle condition sur a l'application f est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}$?
3. Soit φ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$. Démontrer qu'il existe $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(x\,;y) = ax + by$ pour tout $(x\,;y)$.
4. Énoncer et démontrer le résultat analogue pour une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.

EXERCICE 4 ⋆⋆

Soient E un K-espace vectoriel muni d'une base $(e_1\,;e_2)$, et F un K-espace vectoriel.

1. Soient f et g dans $\mathcal{L}(E\,;F)$ telles que $f(e_1) = g(e_1)$ et $f(e_2) = g(e_2)$. Démontrer que $f = g$.
2. Soient y_1 et y_2 deux vecteurs de F. Démontrer qu'il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E\,;F)$ telle que $f(e_1) = y_1$ et $f(e_2) = y_2$.
3. Application : déterminer l'unique endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$f(1\,;1) = (2\,;0) \qquad \text{et} \qquad f(1\,;-1) = (0\,;2)$$

On vérifiera d'abord que $\big((1\,;1)\,;(1\,;-1)\big)$ est bien une base de $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 5 ⋆⋆

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on définit la *rotation* d'angle θ par :

$$r_\theta : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x\cos\theta - y\sin\theta\,;\, x\sin\theta + y\cos\theta) \end{array} \right.$$

1. Démontrer que r_θ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que $r_\theta \circ r_{\theta'} = r_{\theta+\theta'}$ pour tous réels θ et θ'.
3. En déduire que r_θ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$, et préciser sa réciproque.
4. Déterminer $\operatorname{Ker} r_\theta$ et $\operatorname{Im} r_\theta$.
5. Pour quelles valeurs de θ l'application r_θ est-elle une symétrie, c'est-à-dire vérifie-t-elle $r_\theta \circ r_\theta = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$?

Noyau et image

EXERCICE 6 ⋆

Pour chacune des applications linéaires suivantes, déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$, en donnant à chaque fois une famille génératrice ou une équation cartésienne.

1. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (x+y+z\,;\,x-y) \end{array} \right.$
2. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x-y\,;\,x+y\,;\,2x) \end{array} \right.$
3. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (x+y\,;\,y+z\,;\,z+x) \end{array} \right.$
4. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (x-y\,;\,y-z\,;\,z-x) \end{array} \right.$

EXERCICE 7 ⋆

Pour chacune des quatre applications de l'exercice 6, dire si elle est injective, surjective, bijective, en appliquant le théorème 1. Vérifier ensuite, sur chacune, la remarque du cours concernant les dimensions du noyau et de l'image.

EXERCICE 8 ⋆⋆

On définit sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ le *décalage à gauche* et le *décalage à droite* :

$$\delta((u_0\,;u_1\,;u_2\,;\dots)) = (u_1\,;u_2\,;u_3\,;\dots) \qquad \tau((u_0\,;u_1\,;u_2\,;\dots)) = (0\,;u_0\,;u_1\,;\dots)$$

1. Démontrer que δ et τ sont des endomorphismes de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $\operatorname{Ker}\delta$ et $\operatorname{Im}\delta$, puis $\operatorname{Ker}\tau$ et $\operatorname{Im}\tau$.
3. En déduire, pour chacun, s'il est injectif et s'il est surjectif.
4. Calculer $\delta\circ\tau$ et $\tau\circ\delta$. Que constate-t-on ?
5. Commenter : que devient, en dimension infinie, le lien entre injectivité et surjectivité observé au chapitre 4 pour les ensembles finis ?

EXERCICE 9 ⋆⋆

1. On pose $\varphi(x\,;y\,;z) = x+2y-z$. Démontrer que φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$, puis déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi$.
2. Démontrer que les seuls sous-espaces vectoriels du K-espace vectoriel K sont $\{0_K\}$ et K.
3. En déduire que toute forme linéaire non nulle est surjective.
4. Déterminer le noyau de la dérivation $D : g \mapsto g'$, de $\mathcal{D}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$. L'application D est-elle injective ?

EXERCICE 10 ⋆⋆⋆

Soient E, F, G trois K-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E\,;F)$ et $g \in \mathcal{L}(F\,;G)$.

1. Démontrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g\circ f)$ et que $\operatorname{Im}(g\circ f) \subset \operatorname{Im} g$.
2. Démontrer que $g\circ f = 0$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.
3. Démontrer que si $g\circ f$ est injective, alors f l'est ; et que si $g\circ f$ est surjective, alors g l'est.
4. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f\circ f = 0$. Que peut-on dire de $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$? Donner un exemple d'un tel endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^2$.

Structure de l'ensemble des endomorphismes

EXERCICE 11 ⋆

1. Soient f, $g \in \mathcal{L}(E\,;F)$ et $\lambda \in K$. Démontrer que $\lambda f + g$ est encore une application linéaire.
2. En déduire que $\mathcal{L}(E\,;F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E\,;F)$.
3. On pose, sur $\mathbb{R}^2$, $f(x\,;y) = (x\,;0)$ et $g(x\,;y) = (0\,;y)$. Calculer $f+g$, puis $2f-3g$.
4. Calculer $f\circ g$ et $g\circ f$. Qu'en déduit-on sur l'anneau $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$?

EXERCICE 12 ⋆⋆

1. On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace des fonctions polynomiales réelles, et l'on pose :

$$D : P \longmapsto P' \qquad \text{et} \qquad M : P \longmapsto \left(x \mapsto x\,P(x)\right)$$

   Démontrer que D et M sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$, puis calculer $D\circ M - M\circ D$.
2. Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $f(x\,;y) = (y\,;0)$ et $g(x\,;y) = (x\,;0)$. Calculer $f\circ g$ et $g\circ f$.
3. Soient f et g deux endomorphismes de E. Développer $(f+g)\circ(f+g)$. À quelle condition retrouve-t-on l'identité remarquable habituelle ?

EXERCICE 13 ⋆⋆

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ bijective. Démontrer que f^{-1} est linéaire.
2. En déduire que $\mathrm{GL}(E)$ est un sous-groupe du groupe $\mathcal{S}(E)$ des bijections de E.
3. Soient f et g deux automorphismes de E. Démontrer que $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$.
4. Application : l'application $f(x\,;y) = (2x-y\,;\,x+3y)$ appartient-elle à $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$? Le cas échéant, expliciter f^{-1}.

EXERCICE 14 ⋆⋆

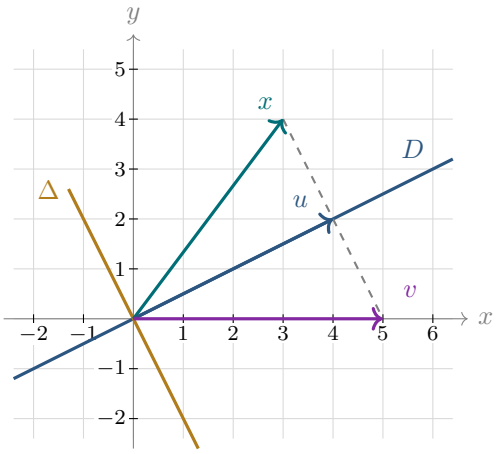
Pour $\lambda \in K$, on appelle *homothétie de rapport* λ l'application $h_\lambda : x \mapsto \lambda \cdot x$ de E dans E.

1. Démontrer que $h_\lambda \in \mathcal{L}(E)$, et que $h_\lambda \circ h_\mu = h_{\lambda\mu}$.
2. Démontrer que $h_\lambda \circ f = f \circ h_\lambda$ pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$.
3. Déterminer $\operatorname{Ker} h_\lambda$ et $\operatorname{Im} h_\lambda$ selon la valeur de λ, puis à quelle condition $h_\lambda \in \mathrm{GL}(E)$.
4. Pour quelles valeurs de λ l'homothétie h_λ est-elle un projecteur ? une symétrie ?

Projecteurs et symétries

EXERCICE 15 ⋆

Le plan ci-dessous est muni de deux droites vectorielles D et Δ. Un vecteur x y est représenté, ainsi que deux vecteurs u et v obtenus à partir de x : l'un par le projecteur p sur D parallèlement à Δ, l'autre par la symétrie s associée.



1. Lire les coordonnées de x, u et v.
2. Identifier lequel de u et v est $p(x)$, et lequel est $s(x)$. Justifier.
3. Vérifier numériquement la relation $s(x) = 2p(x) - x$ de la proposition 4.
4. Déterminer $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$, ainsi que $\operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et $\operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id})$.

EXERCICE 16 ⋆

A. Pour chacune des applications suivantes, vérifier qu'il s'agit d'un projecteur, puis déterminer $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ et vérifier le théorème 2.

1. $p(x\,;y\,;z) = (x\,;\,y\,;\,0)$
2. $p(x\,;y) = \left(\dfrac{x+y}{2}\,;\,\dfrac{x+y}{2}\right)$
3. $p(x\,;y\,;z) = (x+z\,;\,y+z\,;\,0)$
4. $f(x\,;y) = (x\,;\,2y)$

B. Pour chacune des applications suivantes, vérifier qu'il s'agit d'une symétrie, puis déterminer les vecteurs invariants et les vecteurs changés en leur opposé.

1. $s(x\,;y) = (y\,;\,x)$
2. $s(x\,;y\,;z) = (x\,;\,y\,;\,-z)$
3. $s(x\,;y) = (x+2y\,;\,-y)$
4. $g(x\,;y) = (2x\,;\,-y)$

EXERCICE 17 ⋆⋆

Soit p un projecteur d'un K-espace vectoriel E, et l'on pose $q = \mathrm{Id}_E - p$.

1. Démontrer que q est un projecteur.
2. Démontrer que $\operatorname{Ker} q = \operatorname{Im} p$ et que $\operatorname{Im} q = \operatorname{Ker} p$.
3. Démontrer que $p \circ q = q \circ p = 0$.
4. Interpréter géométriquement : que fait q lorsque p est la projection sur D parallèlement à Δ ?

EXERCICE 18 ⋆⋆

Soit s une symétrie d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, et l'on pose $p = \dfrac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$.

1. Vérifier que p est un projecteur, conformément à la proposition 4.
2. Démontrer que $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et que $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.
3. En déduire que $E = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.
4. Application : on pose $s(x\,;y\,;z) = (z\,;\,y\,;\,x)$. Vérifier que s est une symétrie, puis déterminer les deux sous-espaces précédents et vérifier qu'ils sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

EXERCICE 19 ⋆⋆⋆

Le théorème 2 associe à tout projecteur un couple de sous-espaces supplémentaires. Cet exercice établit la réciproque.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Pour $x \in E$, on note $x = x_F + x_G$ son unique décomposition, et l'on pose $p(x) = x_F$.

1. Justifier que p est bien définie.
2. Démontrer que p est linéaire.
3. Démontrer que $p \circ p = p$.
4. Déterminer $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$.
5. Conclure : décrire la correspondance entre projecteurs de E et couples de sous-espaces supplémentaires.
6. Application : dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \{(x\,;y\,;z) \mid x + y + z = 0\}$ et $G = \operatorname{Vect}\big((1\,;1\,;1)\big)$, dont on a montré au chapitre 6 qu'ils sont supplémentaires. Expliciter le projecteur sur F parallèlement à G.

Exercices de synthèse

EXERCICE 20 : VRAI OU FAUX

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Dans tout l'exercice, f désigne une application linéaire de E dans F.

1. Une application linéaire envoie le vecteur nul sur le vecteur nul.
2. Toute application vérifiant $f(0_E) = 0_F$ est linéaire.
3. Le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E.
4. L'image de f est un sous-espace vectoriel de E.
5. L'application f est injective si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul.

6. L'anneau $\mathcal{L}(E)$ est commutatif.
7. La composée de deux applications linéaires est linéaire.
8. Si p est un projecteur, alors $\operatorname{Im} p$ est l'ensemble des vecteurs invariants par p.
9. Tout projecteur est bijectif.
10. Toute symétrie s est bijective, et $s^{-1} = s$.

EXERCICE 21 ⋆⋆⋆

On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x\,;y\,;z) = \big(2x - y - z\,;\ -x + 2y - z\,;\ -x - y + 2z\big)$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $\operatorname{Ker} f$. L'application f est-elle injective ?
3. Démontrer que $\operatorname{Im} f$ est contenue dans le plan d'équation $a+b+c=0$, puis qu'elle lui est égale.
4. Vérifier que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. On pourra invoquer un résultat du chapitre 6.
5. Calculer $f \circ f$ et démontrer que $f \circ f = 3f$. En déduire que $p = \dfrac{1}{3}f$ est un projecteur.
6. Identifier géométriquement p : sur quel sous-espace projette-t-il, et parallèlement à quoi ?

EXERCICE 22 ⋆⋆⋆

Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1. Démontrer que si $p \circ q = q \circ p = 0$, alors $p + q$ est un projecteur.
2. On suppose désormais que $p + q$ est un projecteur. En développant $(p + q) \circ (p + q)$, démontrer que :
$$p \circ q + q \circ p = 0$$
3. En composant cette égalité à gauche par p, puis à droite par p, démontrer successivement que $p \circ q = q \circ p$, puis que $p \circ q = q \circ p = 0$.
4. Conclure par une équivalence.
5. Application : vérifier ce résultat sur les projecteurs $p(x\,;y) = (x\,;0)$ et $q(x\,;y) = (0\,;y)$ de $\mathbb{R}^2$.