CORRIGÉ – CHAPITRE 8

DIMENSION FINIE

Dimension et bases

EXERCICE 1 ⋆

Espace	Dimension	Base
$\mathbb{R}^3$	3	Base canonique $((1\,;0\,;0)\,;(0\,;1\,;0)\,;(0\,;0\,;1))$.
$\mathbb{R}^4$	4	Base canonique, à quatre vecteurs.
$\mathbb{R}_2[X]$	3	$(1\,;X\,;X^2)$.
$\mathbb{R}_4[X]$	5	$(1\,;X\,;X^2\,;X^3\,;X^4)$.
$\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$	2	$(1\,;\mathrm{i})$.
$\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$	1	(1).
$\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$	6	Les six matrices n'ayant qu'un coefficient non nul, égal à 1.
$\{0_E\}$	0	La famille vide, par convention.
$\mathrm{Vect}\big((1\,;2\,;3)\,;(2\,;4\,;6)\big)$	1	$((1\,;2\,;3))$, car $(2\,;4\,;6)=2\times(1\,;2\,;3)$.
$\mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$	infinie	Aucune base finie.

Piège de l'avant-dernière ligne : une famille de deux vecteurs peut n'engendrer qu'une droite. Le nombre de vecteurs d'une famille génératrice majore la dimension, sans jamais la donner.

Justification de la dernière ligne : pour tout n, la famille $(1\,;X\,;\ldots\,;X^n)$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$. Si cet espace était de dimension finie d, la proposition 1 imposerait $n+1\leqslant d$ pour tout n, ce qui est impossible.

EXERCICE 2 ⋆

On applique la proposition 1, en comparant le nombre de vecteurs à la dimension de l'espace.

	$\dim E$	Libre ?	Génératrice ?	Une base ?
1. 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$	3	non	oui	non
2. 2 vecteurs de $\mathbb{R}^3$	3	oui	non	non
3. 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$	3	oui	oui	oui
4. 5 polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$	4	non	oui	non
5. 3 vecteurs de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$	2	non	oui	non
6. 2 vecteurs de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$	1	non	oui	non

Une famille libre compte au plus $\dim E$ vecteurs, une famille génératrice au moins $\dim E$, et une base exactement $\dim E$: les trois colonnes se lisent directement sur la comparaison des deux nombres.

À retenir pour le troisième cas : lorsque le nombre de vecteurs vaut exactement la dimension, les trois propriétés sont *équivalentes*. C'est ce qui rend l'exercice 3 si économique.

EXERCICE 3 ⋆

Chacune de ces familles compte trois vecteurs dans un espace de dimension trois. La proposition 1 permet donc de ne vérifier que la liberté : si elle est acquise, la famille est une base ; sinon, elle ne l'est pas.

1. Le système $\lambda\,(1\,;1\,;0)+\mu\,(0\,;1\,;1)+\nu\,(1\,;0\,;1)=0_E$ s'écrit :

$$\begin{cases}\lambda+\nu=0\\ \lambda+\mu=0\\ \mu+\nu=0\end{cases}$$

Les deux premières lignes donnent $\nu=-\lambda$ et $\mu=-\lambda$, et la troisième devient $-2\lambda=0$.

$$\boxed{\text{Famille libre : c'est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

2. La première coordonnée donne directement $\lambda=0$, la deuxième $2\lambda+\mu=0$ donc $\mu=0$, la troisième $3\lambda+4\mu+5\nu=0$ donc $\nu=0$.

$$\boxed{\text{Famille libre : c'est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

La forme « en escalier » de cette famille rend le calcul immédiat.

3. Le système s'écrit $\lambda+\mu+\nu=0$, $\lambda+2\mu+3\nu=0$ et $\lambda+4\mu+9\nu=0$. En retranchant la première ligne aux deux autres : $\mu+2\nu=0$ et $3\mu+8\nu=0$. En reportant $\mu=-2\nu$ dans la seconde, il vient $2\nu=0$.

$$\boxed{\text{Famille libre : c'est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

4. On a $(2\,;4\,;6)=2\times(1\,;2\,;3)$: les deux premiers vecteurs sont colinéaires.

$$\boxed{\text{Famille liée : ce n'est pas une base.}}$$

Comparaison avec le chapitre 6. La première famille y avait été traitée à l'exercice 17 : il avait fallu vérifier la liberté, *puis* résoudre le système avec un second membre quelconque pour établir le caractère générateur. La proposition 1 rend ici cette seconde moitié entièrement superflue.

EXERCICE 4 ⋆⋆

1. Soient a, b, c réels tels que $a+b(X-1)+c(X-1)^2=0$. En développant :

$$c\,X^2+(b-2c)\,X+(a-b+c)=0$$

Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients le sont : $c=0$, puis $b=0$, puis $a=0$.

$$\boxed{\text{La famille } (P_0\,;P_1\,;P_2) \text{ est libre.}}$$

2. C'est une famille libre de trois vecteurs dans $\mathbb{R}_2[X]$, qui est de dimension 3.

$$\boxed{\text{C'est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$$

3. On cherche a, b, c tels que $a+b(X-1)+c(X-1)^2=X^2+X+1$. En identifiant les coefficients du développement ci-dessus :

$$c=1 \qquad b-2c=1 \qquad a-b+c=1$$

d'où $c = 1$, puis $b = 3$, puis $a = 3$.

$$\boxed{\text{Les coordonnées de } X^2 + X + 1 \text{ sont } (3\,;3\,;1).}$$

Vérification : $3 + 3(X-1) + (X-1)^2 = 3 + 3X - 3 + X^2 - 2X + 1 = X^2 + X + 1$ ✓

4. Avec $P = X^2 + X + 1$, on a $P(1) = 3$, $P'(X) = 2X + 1$ donc $P'(1) = 3$, et $P''(X) = 2$ donc $\dfrac{P''(1)}{2} = 1$.

$$\boxed{P = P(1) + P'(1)\,(X-1) + \frac{P''(1)}{2}\,(X-1)^2}$$

On reconnaît la *formule de Taylor* au point 1. Les coordonnées dans la base $\left(1\,;(X-1)\,;(X-1)^2\right)$ ne sont donc rien d'autre que les coefficients de Taylor.

EXERCICE 5 ⋆⋆

1. Le chapitre 6 a établi que $(1\,;\mathrm{i})$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, et que (1) est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

$$\boxed{\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2 \qquad \text{et} \qquad \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1}$$

Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, la famille $(1\,;\mathrm{i})$ compte deux vecteurs dans un espace de dimension 1 : elle ne peut pas être libre, ce que confirme la relation $\mathrm{i} \cdot 1 + (-1) \cdot \mathrm{i} = 0$.

2. Une base de E compte deux vecteurs.

$$\boxed{\dim E = 2}$$

3. *Linéarité.* Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et u, $v \in E'$:

$$\Phi(\lambda u + v) = (\lambda u_0 + v_0\,;\, \lambda u_1 + v_1) = \lambda\,\Phi(u) + \Phi(v)$$

Injectivité. Soit $u \in \operatorname{Ker}\Phi$, c'est-à-dire $u_0 = u_1 = 0$. Montrons par récurrence double que $u_n = 0$ pour tout n : c'est vrai aux rangs 0 et 1, et si $u_n = u_{n+1} = 0$, alors $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n = 0$.

Surjectivité. Soit $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$. La suite définie par $u_0 = a$, $u_1 = b$ et la relation de récurrence appartient à E' et vérifie $\Phi(u) = (a\,;b)$.

$$\boxed{\Phi \text{ est un isomorphisme de } E' \text{ sur } \mathbb{R}^2.}$$

4. L'image d'une base par un isomorphisme est une base : deux espaces isomorphes ont donc la même dimension.

$$\boxed{\dim E' = \dim \mathbb{R}^2 = 2}$$

Cet argument ne demande aucune base explicite. Il s'applique à *toute* récurrence linéaire d'ordre 2, y compris lorsque les racines de l'équation caractéristique sont irrationnelles — ce qui est le cas ici, avec le nombre d'or.

Sous-espaces et dimension

EXERCICE 6 ⋆

1. L'équation $x + y + z + t = 0$ permet d'exprimer $t = -x - y - z$, les trois autres coordonnées restant libres :

$$(x\,;y\,;z\,;t) = x\,(1\,;0\,;0\,;-1) + y\,(0\,;1\,;0\,;-1) + z\,(0\,;0\,;1\,;-1)$$

Ces trois vecteurs forment une famille libre, comme le montrent leurs trois premières coordonnées.

$$\boxed{\dim F = 3,\ \text{de base } \left((1\,;0\,;0\,;-1)\,;(0\,;1\,;0\,;-1)\,;(0\,;0\,;1\,;-1)\right)}$$

2. Un élément de G s'écrit $(x\,;x\,;z\,;z) = x\,(1\,;1\,;0\,;0) + z\,(0\,;0\,;1\,;1)$.

$$\boxed{\dim G = 2,\ \text{de base } \big((1\,;1\,;0\,;0)\,;(0\,;0\,;1\,;1)\big)}$$

3. Les trois équations donnent $y = -x$, $z = 0$ et $t = 0$, d'où $(x\,;-x\,;0\,;0) = x\,(1\,;-1\,;0\,;0)$.

$$\boxed{\dim H = 1,\ \text{de base } \big((1\,;-1\,;0\,;0)\big)}$$

4. On remarque que $(1\,;1\,;1\,;1) = (1\,;0\,;1\,;0) + (0\,;1\,;0\,;1)$: le troisième vecteur est superflu. Les deux premiers ne sont pas colinéaires.

$$\boxed{\dim L = 2,\ \text{de base } \big((1\,;0\,;1\,;0)\,;(0\,;1\,;0\,;1)\big)}$$

EXERCICE 7 ⋆

1. L'ensemble F est un sous-espace vectoriel de G, qui est de dimension finie. La proposition 2, appliquée dans l'espace G, donne :

$$\dim F = \dim G \iff F = G$$

$$\boxed{F = G}$$

C'est un outil économique : il remplace la double inclusion par une seule inclusion et un comptage.

2. *Inclusion.* On vérifie que $1 - 1 + 0 = 0$ et $0 - 1 + 1 = 0$: les deux vecteurs générateurs de F appartiennent à G. Comme G est un sous-espace vectoriel, il contient toutes leurs combinaisons linéaires, donc $F \subset G$.

Dimensions. Les vecteurs $(1\,;1\,;0)$ et $(0\,;1\,;1)$ ne sont pas colinéaires, donc $\dim F = 2$. Par ailleurs $G = \{(x\,;y\,;y-x)\} = \text{Vect}\big((1\,;0\,;-1)\,;(0\,;1\,;1)\big)$, donc $\dim G = 2$.

$$\boxed{F = G}$$

3. Les droites $\text{Vect}\big((1\,;0)\big)$ et $\text{Vect}\big((0\,;1)\big)$ sont toutes deux de dimension 1 et ne sont pas égales.

$$\boxed{\text{C'est l'hypothèse d'inclusion } F \subset G \text{ qui fait défaut.}}$$

Piège : l'égalité des dimensions seule ne prouve jamais l'égalité de deux sous-espaces. L'inclusion reste indispensable.

EXERCICE 8 ⋆⋆

1. L'espace $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, donc la proposition 2 donne $\dim F \leqslant 3$. Comme une dimension est un entier naturel :

$$\boxed{\dim F \in \{0\,;1\,;2\,;3\}}$$

2. On décrit chaque cas.

- $\dim F = 0$: $F = \{0_E\}$, réduit au vecteur nul.
- $\dim F = 1$: $F = \text{Vect}(u)$ avec $u \neq 0_E$, une *droite vectorielle*.
- $\dim F = 2$: $F = \text{Vect}(u\,;v)$ avec $(u\,;v)$ libre, un *plan vectoriel*.
- $\dim F = 3$: d'après la proposition 2, $F = \mathbb{R}^3$.

3. La proposition 2 impose l'unicité dans les deux cas extrêmes :

$$\boxed{\text{Un seul de dimension 3 (l'espace } \mathbb{R}^3 \text{ lui-même), et un seul de dimension 0 } (\{0_E\}).}$$

4. Le même raisonnement, avec $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, donne :

$$\boxed{\text{Les sous-espaces de } \mathbb{R}^2 \text{ sont } \{0_E\},\ \text{les droites vectorielles, et } \mathbb{R}^2.}$$

EXERCICE 9 ⋆⋆

1. On a $F \subset \mathbb{R}_3[X]$, le polynôme nul vérifie $P(1) = 0$, et pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et P, $Q \in F$:

$$(\lambda P + Q)(1) = \lambda\, P(1) + Q(1) = 0$$

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_3[X].}$$

2. Chaque polynôme $(X-1)^k$ s'annule en 1, donc appartient à F. Soient a, b, c tels que :

$$a(X-1) + b(X-1)^2 + c(X-1)^3 = 0$$

Le coefficient de X^3 du membre de gauche vaut c, donc $c = 0$; le coefficient de X^2 vaut alors b, donc $b = 0$; il reste $a(X-1) = 0$, donc $a = 0$.

$$\boxed{\text{La famille est libre, et contenue dans } F.}$$

3. D'une part, F contient une famille libre de trois vecteurs, donc $\dim F \geqslant 3$ d'après la proposition 1.

D'autre part, F est un sous-espace de $\mathbb{R}_3[X]$, qui est de dimension 4 : donc $\dim F \leqslant 4$. Mais l'égalité entraînerait $F = \mathbb{R}_3[X]$ d'après la proposition 2, ce qui est faux puisque le polynôme constant 1 ne s'annule pas en 1. Donc $\dim F \leqslant 3$.

$$\boxed{\dim F = 3}$$

4. La famille est libre et compte trois vecteurs dans un espace de dimension trois : c'est une base. Pour les coordonnées de $X^3 - 1$, posons $Y = X - 1$, de sorte que $X = Y + 1$:

$$X^3 - 1 = (Y+1)^3 - 1 = Y^3 + 3Y^2 + 3Y$$

$$\boxed{X^3 - 1 = 3\,(X-1) + 3\,(X-1)^2 + (X-1)^3, \text{ soit les coordonnées } (3\,;3\,;1).}$$

Remarque : on retrouve le triplet $(3\,;3\,;1)$ de l'exercice 4, ce qui n'est pas fortuit : là encore, ce sont les coefficients de Taylor de $X^3 - 1$ au point 1.

Formule de Grassmann et supplémentaires

EXERCICE 10 ⋆

1. D'une part $G \subset F + G$, donc $\dim(F+G) \geqslant \dim G = 5$. D'autre part $F + G \subset E$, donc $\dim(F+G) \leqslant 6$.

$$\boxed{\dim(F+G) \in \{5\,;6\}}$$

2. La formule de Grassmann donne $\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F+G) = 9 - \dim(F+G)$.

$$\boxed{\dim(F \cap G) \in \{3\,;4\}}$$

3. Dans les deux cas, $\dim(F \cap G) \geqslant 3 > 0$.

$$\boxed{F \cap G \neq \{0_E\}}$$

4. Comme $F + G$ est un sous-espace de E, on a $\dim(F+G) \leqslant \dim E$, d'où par Grassmann :

$$\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F+G) \geqslant \dim F + \dim G - \dim E > 0$$

$$\boxed{\dim F + \dim G > \dim E \implies F \cap G \neq \{0_E\}}$$

Autrement dit, deux sous-espaces « trop gros » se rencontrent nécessairement ailleurs qu'en 0_E.

EXERCICE 11 ⋆

1. Chacun des deux ensembles est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^3$, donc un plan vectoriel. On peut aussi le voir directement :

$$F = \text{Vect}\big((1\,;-1\,;0)\,;(1\,;0\,;-1)\big) \qquad \text{et} \qquad G = \text{Vect}\big((1\,;1\,;0)\,;(0\,;0\,;1)\big)$$

$$\boxed{\dim F = \dim G = 2}$$

2. Un vecteur de $F \cap G$ vérifie $x = y$ et $x + y + z = 0$, donc $z = -2x$:

$$\boxed{F \cap G = \text{Vect}\big((1\,;1\,;-2)\big),\ \text{de dimension 1.}}$$

3. La formule de Grassmann donne :

$$\dim(F + G) = 2 + 2 - 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

et la proposition 2 permet de conclure.

$$\boxed{F + G = \mathbb{R}^3}$$

4. Les deux critères du théorème 2 échouent :

$$\boxed{\text{Non : } F \cap G \neq \{0_E\},\ \text{et par ailleurs } \dim F + \dim G = 4 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3.}$$

C'est la figure du cours : deux plans distincts de $\mathbb{R}^3$ engendrent tout l'espace, sans être supplémentaires pour autant. La somme n'est pas directe, et la décomposition d'un vecteur n'est pas unique.

EXERCICE 12 ⋆

1. Dans les deux configurations, P est un plan et D une droite. En **(a)**, la droite perce le plan : elles n'ont que l'origine en commun. En **(b)**, la droite est contenue dans le plan, donc $P \cap D = D$.

$$\boxed{\textbf{(a)}\ :\ \dim P = 2,\ \dim D = 1,\ \dim(P \cap D) = 0}$$

$$\boxed{\textbf{(b)}\ :\ \dim P = 2,\ \dim D = 1,\ \dim(P \cap D) = 1}$$

2. La formule de Grassmann donne :

$$\textbf{(a)}\ :\ \dim(P + D) = 2 + 1 - 0 = 3 \qquad\qquad \textbf{(b)}\ :\ \dim(P + D) = 2 + 1 - 1 = 2$$

$$\boxed{\textbf{(a)}\ :\ P + D = \mathbb{R}^3 \text{ et } P \cap D = \{0_E\} : P \text{ et } D \text{ sont supplémentaires.}}$$

$$\boxed{\textbf{(b)}\ :\ P + D = P : \text{ils ne le sont pas.}}$$

3. On a $P = \text{Vect}\big((0\,;1\,;0)\,;(0\,;0\,;1)\big)$, donc $\dim P = 2$, et $\dim D = 1$. Un vecteur de D s'écrit $(t\,;0\,;0)$, et appartient à P si et seulement si $t = 0$: donc $P \cap D = \{0_E\}$. Comme $\dim P + \dim D = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, le théorème 2 conclut.

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = P \oplus D,\ \text{avec la décomposition } (x\,;y\,;z) = (0\,;y\,;z) + (x\,;0\,;0).}$$

4. Le comptage des dimensions répond immédiatement :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Deux droites : } 1 + 1 = 2 \neq 3,\ \text{jamais supplémentaires dans } \mathbb{R}^3.\\ \text{Deux plans : } 2 + 2 = 4 \neq 3,\ \text{jamais supplémentaires non plus.}\end{array}}$$

Le seul appariement possible dans $\mathbb{R}^3$ est donc « un plan et une droite », et encore faut-il que la droite ne soit pas contenue dans le plan.

EXERCICE 13 ⋆⋆

1. On a $F = \text{Vect}(1\,;\,X^2)$ et $G = \text{Vect}(X\,;\,X^3)$: ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X]$. Chacune de ces deux familles est libre, les degrés des polynômes qui la composent étant distincts.

$$\boxed{\dim F = \dim G = 2}$$

2. Soit $P \in F \cap G$. Il s'écrit $P = a + cX^2$ et $P = bX + dX^3$. En identifiant les coefficients de ces deux écritures, il vient $a = b = c = d = 0$.

$$\boxed{F \cap G = \{0\}}$$

3. On a $\dim F + \dim G = 2 + 2 = 4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$ et $F \cap G = \{0\}$: le critère du théorème 2 s'applique.

$$\boxed{\mathbb{R}_3[X] = F \oplus G}$$

On notera qu'il n'a pas été nécessaire de démontrer que $F + G = \mathbb{R}_3[X]$: le comptage des dimensions l'a fourni gratuitement.

4. On sépare les monômes de degré pair de ceux de degré impair :

$$\boxed{X^3 + 2X^2 - X + 5 = \underbrace{(2X^2 + 5)}_{\in F} + \underbrace{(X^3 - X)}_{\in G}}$$

Rang et théorème du rang

EXERCICE 14 ⋆

Le rang d'une famille est la dimension de l'espace qu'elle engendre.

1. On a $(2\,;4\,;6) = 2 \times (1\,;2\,;3)$: la famille engendre une droite. $\boxed{\text{rg} = 1}$

2. On a $(1\,;1\,;2) = (1\,;0\,;1) + (0\,;1\,;1)$: le troisième vecteur est superflu, et les deux premiers ne sont pas colinéaires. $\boxed{\text{rg} = 2}$

3. La famille est libre d'après l'exercice 3, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$. $\boxed{\text{rg} = 3}$

4. On a $(1\,;1\,;1\,;1) = (1\,;0\,;0\,;1) + (0\,;1\,;1\,;0)$, et les deux premiers vecteurs ne sont pas colinéaires. $\boxed{\text{rg} = 2}$

Méthode : on cherche d'abord les relations évidentes entre les vecteurs, ce qui fait chuter le rang ; on vérifie ensuite que les vecteurs restants forment une famille libre.

EXERCICE 15 ⋆

1. Le noyau est donné par $x+y+z = 0$ et $x-y = 0$, soit $x = y$ et $z = -2x$: c'est $\text{Vect}\big((1\,;1\,;-2)\big)$, de dimension 1. Le théorème du rang donne $\text{rg}(u) = 3 - 1 = 2$. Or $\text{Im}\, u$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$, lui aussi de dimension 2 : la proposition 2 donne $\text{Im}\, u = \mathbb{R}^2$.

$$\boxed{u \text{ est surjective, non injective.}}$$

2. Le noyau est donné par $x - y = 0$ et $x + y = 0$, donc réduit au vecteur nul. Le théorème du rang donne $\text{rg}(u) = 2 - 0 = 2 < 3$.

$$\boxed{u \text{ est injective, non surjective.}}$$

3. Le noyau est donné par $x = -y$ et $z = -t$, soit $\text{Vect}\big((1\,;-1\,;0\,;0)\,;(0\,;0\,;1\,;-1)\big)$, de dimension 2. Le théorème du rang donne $\text{rg}(u) = 4 - 2 = 2 = \dim \mathbb{R}^2$.

$$\boxed{u \text{ est surjective, non injective.}}$$

4. Le noyau est donné par $x = y = z$, soit $\text{Vect}((1\,;1\,;1))$, de dimension 1. Le théorème du rang donne $\text{rg}(u) = 3 - 1 = 2 < 3$.

$$\boxed{u \text{ n'est ni injective, ni surjective.}}$$

5. Le noyau de la dérivation est l'ensemble des polynômes constants, de dimension 1. Comme $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$, le théorème du rang donne $\text{rg}(D) = 4 - 1 = 3 < 4$.

$$\boxed{D \text{ n'est ni injective, ni surjective.}}$$

Méthode : dans les cinq cas, l'image n'a jamais été calculée. Le noyau se détermine par un système linéaire, et le théorème du rang fournit ensuite la dimension de l'image ; la proposition 2 permet enfin de conclure à la surjectivité lorsque cette dimension égale celle de l'espace d'arrivée.

EXERCICE 16 ⋆⋆

1. Le système $x + y = 0$, $y + z = 0$, $z + x = 0$ donne $y = -x$, puis $z = -y = x$, et la troisième équation devient $2x = 0$.

$$\text{Ker}\, u = \{0_E\}$$

L'application u est donc injective. Comme u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, espace de dimension finie, la proposition 3 s'applique.

$$\boxed{u \text{ est bijective.}}$$

Il n'a pas été nécessaire de résoudre le système avec un second membre quelconque.

2. Soit $P \in \text{Ker}\, u$, c'est-à-dire $P + P' = 0$. Supposons $P \neq 0$, et notons $d \leqslant 2$ son degré. Le polynôme P' est de degré $d-1$ si $d \geqslant 1$, et nul si $d = 0$: dans tous les cas, $P + P'$ a le même coefficient dominant que P, donc est de degré d, donc non nul. C'est absurde.

$$\text{Ker}\, u = \{0\} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{u \text{ est bijective.}}$$

3. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3\,;\mathbb{R}^2)$. Le rang de u est la dimension d'un sous-espace de $\mathbb{R}^2$, donc $\text{rg}(u) \leqslant 2$. Le théorème du rang donne alors :

$$\dim(\text{Ker}\, u) = 3 - \text{rg}(u) \geqslant 3 - 2 = 1 > 0$$

$$\boxed{\text{Non : une application linéaire de } \mathbb{R}^3 \text{ dans } \mathbb{R}^2 \text{ n'est jamais injective.}}$$

4. Le rang d'une telle application vérifie $\text{rg}(u) \leqslant \dim \mathbb{R}^2 = 2 < 3$, donc $\text{Im}\, u \neq \mathbb{R}^3$.

$$\boxed{\text{Non : une application linéaire de } \mathbb{R}^2 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \text{ n'est jamais surjective.}}$$

5. On peut alors énoncer :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si les deux espaces ont la } \textit{même} \text{ dimension finie, la proposition 3 s'applique :}\\ \text{injectivité, surjectivité et bijectivité deviennent équivalentes.}\end{array}}$$

Les questions 3 et 4 montrent que cette hypothèse d'égalité des dimensions est indispensable : sans elle, l'une des deux propriétés peut même être impossible.

EXERCICE 17 ⋆⋆

1. L'image $\text{Im}\, u$ est un sous-espace vectoriel de F, donc $\text{rg}(u) \leqslant \dim F$ d'après la proposition 2. Et le théorème du rang donne :

$$\text{rg}(u) = \dim E - \dim(\text{Ker}\, u) \leqslant \dim E$$

$$\boxed{\text{rg}(u) \leqslant \min\left(\dim E\,;\, \dim F\right)}$$

2. Tout élément de $\operatorname{Im}(v \circ u)$ s'écrit $v(u(x))$: c'est l'image par v d'un vecteur de F, donc un élément de $\operatorname{Im} v$. La proposition 2 donne alors l'inégalité des dimensions.

$$\boxed{\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v \qquad \text{donc} \qquad \operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg}(v)}$$

3. Par définition, $\operatorname{Im}(v \circ u) = \{v(u(x)) \mid x \in E\}$, ce qui est exactement l'ensemble des images par v des éléments de $\operatorname{Im} u$. Autrement dit, $\operatorname{Im}(v \circ u)$ est l'image de la restriction de v à $\operatorname{Im} u$.

Appliquons le théorème du rang à cette restriction, définie sur $\operatorname{Im} u$ qui est de dimension finie :

$$\operatorname{rg}(v \circ u) = \dim(\operatorname{Im} u) - \dim\left(\operatorname{Ker} v \cap \operatorname{Im} u\right) \leqslant \dim(\operatorname{Im} u) = \operatorname{rg}(u)$$

$$\boxed{\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg}(u)}$$

4. Les questions 2 et 3 se rassemblent :

$$\boxed{\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \min\left(\operatorname{rg}(u)\,;\,\operatorname{rg}(v)\right)}$$

Exemple d'inégalité stricte. Sur $\mathbb{R}^2$, posons $u(x\,;y) = (x\,;0)$ et $v(x\,;y) = (0\,;y)$. Alors $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(v) = 1$, tandis que :

$$(v \circ u)(x\,;y) = v(x\,;0) = (0\,;0) \qquad \text{donc} \qquad \operatorname{rg}(v \circ u) = 0 < 1$$

Ce sont les deux endomorphismes de l'exercice 11 du chapitre 7, qui montraient déjà que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ n'est pas intègre.

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. L'image $\operatorname{Im}\varphi$ est un sous-espace vectoriel de K. Or les seuls sous-espaces de K sont $\{0_K\}$ et K (exercice 9 du chapitre 7). Comme $\varphi \neq 0$, on a $\operatorname{Im}\varphi \neq \{0_K\}$.

$$\boxed{\operatorname{Im}\varphi = K \text{ : la forme linéaire } \varphi \text{ est surjective.}}$$

2. La surjectivité donne $\operatorname{rg}(\varphi) = \dim K = 1$, et le théorème du rang s'écrit :

$$n = \dim(\operatorname{Ker}\varphi) + 1$$

$$\boxed{\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = n - 1 \text{ : le noyau de } \varphi \text{ est un hyperplan de } E.}$$

3. L'application $(x\,;y\,;z\,;t) \mapsto x + 2y - z + 3t$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^4$, non nulle puisqu'elle vaut 1 en $(1\,;0\,;0\,;0)$.

$$\boxed{\text{L'ensemble considéré est de dimension } 4 - 1 = 3.}$$

4. *Supplémentarité.* Soit $x \in H \cap \operatorname{Vect}(a)$: il s'écrit $x = \lambda a$. Si $\lambda \neq 0$, alors $a = \lambda^{-1} \cdot x$ appartient à H, ce qui contredit l'hypothèse. Donc $\lambda = 0$ et $x = 0_E$. Comme de plus $\dim H + \dim \operatorname{Vect}(a) = (n-1) + 1 = n$, le théorème 2 conclut :

$$E = H \oplus \operatorname{Vect}(a)$$

Construction de φ. Tout $x \in E$ s'écrit de façon unique $x = h + \lambda a$ avec $h \in H$ et $\lambda \in K$. On pose $\varphi(x) = \lambda$. Cette application est linéaire — c'est le raisonnement de l'exercice 19 du chapitre 7 —, elle vérifie $\varphi(a) = 1$ donc n'est pas nulle, et son noyau est exactement l'ensemble des x dont la composante sur $\operatorname{Vect}(a)$ est nulle, c'est-à-dire H.

$$\boxed{\text{Tout hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.}}$$

5. On cherche $\varphi(x\,;y\,;z) = ax + by + cz$ s'annulant sur les deux vecteurs générateurs :

$$\varphi(1\,;1\,;0) = a + b = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(0\,;1\,;1) = b + c = 0$$

d'où $b = -a$ et $c = a$. En prenant $a = 1$:

$$\boxed{\varphi(x\,;y\,;z) = x - y + z}$$

Vérification. Le noyau de cette forme linéaire non nulle est de dimension 2, et il contient H qui est aussi de dimension 2 : la proposition 2 donne l'égalité. On retrouve d'ailleurs le sous-espace G de l'exercice 7.

Exercices de synthèse

EXERCICE 19 : VRAI OU FAUX

1. **Vraie** C'est le second point du théorème 1, celui qui donne son sens à la notion de dimension.

2. **Vraie** Une famille libre compte au plus $\dim E = 3$ vecteurs (proposition 1).

3. **Vraie** Une famille génératrice compte au moins $\dim E = 3$ vecteurs (proposition 1).

4. **Fausse** Les droites $\mathrm{Vect}\big((1\,;0)\big)$ et $\mathrm{Vect}\big((0\,;1)\big)$ de $\mathbb{R}^2$ sont de dimension 1 et distinctes (exercice 7).

5. **Vraie** C'est la proposition 2 appliquée dans l'espace G. L'inclusion est ici l'hypothèse décisive.

6. **Fausse** Deux droites distinctes de $\mathbb{R}^3$ ont une intersection réduite au vecteur nul, sans être supplémentaires : $1 + 1 \neq 3$. Il manque la condition sur les dimensions.

7. **Vraie** C'est le théorème 3, valable dès que l'espace de départ est de dimension finie.

8. **Vraie** C'est la proposition 3, appliquée avec $E = F$.

9. **Fausse** Le décalage à droite sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, étudié à l'exercice 8 du chapitre 7, est injectif sans être surjectif. La proposition 3 est strictement réservée à la dimension finie.

10. **Fausse** Le rang est la dimension de l'*image*. C'est précisément la quantité qui complète celle du noyau pour atteindre $\dim E$.

EXERCICE 20 ⋆⋆⋆

1. Chaque coordonnée de $u(x\,;y\,;z\,;t)$ est une expression linéaire homogène en x, y, z, t : la linéarité se vérifie coordonnée par coordonnée.

$$\boxed{u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4\,;\mathbb{R}^3)}$$

2. Le système $u(x\,;y\,;z\,;t) = (0\,;0\,;0)$ s'écrit :

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + z - t = 0 \\ x + 2y - t = 0 \end{cases}$$

La troisième ligne est la somme des deux premières : elle n'apporte rien. Les deux premières donnent $z = x + y$ puis $t = y + z = x + 2y$, les inconnues x et y restant libres :

$$(x\,;y\,;z\,;t) = x\,(1\,;0\,;1\,;1) + y\,(0\,;1\,;1\,;2)$$

Ces deux vecteurs forment une famille libre, comme le montrent leurs deux premières coordonnées.

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,u = \mathrm{Vect}\big((1\,;0\,;1\,;1)\,;(0\,;1\,;1\,;2)\big),\ \text{de dimension 2.}}$$

3. Le théorème du rang donne :

$$\boxed{\mathrm{rg}(u) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim(\mathrm{Ker}\,u) = 4 - 2 = 2}$$

4. La troisième coordonnée de $u(x\,;y\,;z\,;t)$ est la somme des deux premières :

$$(x + y - z) + (y + z - t) = x + 2y - t$$

Donc $\operatorname{Im} u \subset \mathcal{P}$, où $\mathcal{P} = \{(a\,;b\,;c) \mid c = a+b\}$ est un plan de $\mathbb{R}^3$, donc de dimension 2. Comme $\operatorname{rg}(u) = 2 = \dim \mathcal{P}$, la proposition 2 donne l'égalité.

$$\boxed{\operatorname{Im} u = \{(a\,;b\,;c) \in \mathbb{R}^3 \mid c = a+b\}}$$

5. Le noyau n'est pas réduit au vecteur nul, et l'image est de dimension $2 < 3$.

$$\boxed{u \text{ n'est ni injective, ni surjective.}}$$

6. *Supplémentarité.* Un vecteur de $\operatorname{Ker} u \cap S$ s'écrit $x\,(1\,;0\,;1\,;1) + y\,(0\,;1\,;1\,;2)$ avec ses deux premières coordonnées nulles, c'est-à-dire $x = y = 0$: c'est le vecteur nul. Comme $\dim(\operatorname{Ker} u) + \dim S = 2 + 2 = 4 = \dim \mathbb{R}^4$, le théorème 2 conclut :

$$\mathbb{R}^4 = \operatorname{Ker} u \oplus S$$

Isomorphisme. La restriction de u à S envoie $(0\,;0\,;z\,;t)$ sur $(-z\,;\,z-t\,;\,-t)$. Son noyau est donné par $-z = 0$ et $-t = 0$, donc réduit au vecteur nul : elle est injective. Son image est contenue dans $\operatorname{Im} u$, et le théorème du rang appliqué à cette restriction donne $\operatorname{rg} = 2 - 0 = 2 = \dim(\operatorname{Im} u)$: la proposition 2 donne alors l'égalité.

$$\boxed{u \text{ induit un isomorphisme de } S \text{ sur } \operatorname{Im} u.}$$

C'est exactement la construction de la démonstration du théorème 3 : ce qui n'est pas écrasé sur 0 se retrouve intégralement dans l'image, et l'égalité $4 = 2 + 2$ n'est que le décompte de cette bijection.

EXERCICE 21 ⋆⋆⋆

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, l'évaluation en un point est linéaire, coordonnée par coordonnée :

$$\Phi(\lambda P + Q) = \big((\lambda P + Q)(a_0)\,;\,\dots\big) = \lambda\,\Phi(P) + \Phi(Q)$$

$$\boxed{\Phi \text{ est linéaire.}}$$

2. Une base de $\mathbb{R}_n[X]$ est $\big(1\,;X\,;\dots\,;X^n\big)$, qui compte $n+1$ vecteurs :

$$\boxed{\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}}$$

Les deux espaces ont donc la même dimension finie : c'est l'hypothèse de la proposition 3.

3. Soit $P \in \operatorname{Ker} \Phi$. Alors $P(a_0) = \dots = P(a_n) = 0$: le polynôme P admet au moins $n+1$ racines distinctes, les a_i étant deux à deux distincts. Or P est de degré au plus n. S'il était non nul, il aurait au plus n racines : c'est absurde.

$$\boxed{\operatorname{Ker} \Phi = \{0\}}$$

4. L'application Φ est linéaire et injective entre deux espaces de même dimension finie.

$$\boxed{\Phi \text{ est bijective, d'après la proposition 3.}}$$

5. On traduit la bijectivité en une phrase :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour tous réels } y_0, \dots, y_n, \text{ il existe un } \textit{unique} \text{ polynôme de degré au plus } n \\ \text{prenant la valeur } y_i \text{ en } a_i \text{ pour tout } i.\end{array}}$$

C'est le théorème d'*interpolation de Lagrange* : par $n+1$ points d'abscisses distinctes passe une courbe polynomiale de degré au plus n, et une seule. La surjectivité donne l'existence, l'injectivité l'unicité.

6. Cherchons $P = aX^2 + bX + c$. Les trois conditions s'écrivent :

$$c = 1 \qquad a + b + c = 3 \qquad 4a + 2b + c = 7$$

La première donne $c = 1$, d'où $a + b = 2$ et $4a + 2b = 6$, soit $2a + b = 3$. En soustrayant, $a = 1$, puis $b = 1$.

$$\boxed{P = X^2 + X + 1}$$

Vérification : $P(0) = 1$, $P(1) = 3$ et $P(2) = 4 + 2 + 1 = 7$ ✓

EXERCICE 22 ⋆⋆⋆

1. La formule de Grassmann donne $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) \leqslant \dim F + \dim G$, puisqu'une dimension est positive. En appliquant deux fois ce résultat, à F et G puis à $F+G$ et H :

$$\dim(F+G+H) \leqslant \dim(F+G) + \dim H \leqslant \dim F + \dim G + \dim H$$

$$\boxed{\dim(F+G+H) \leqslant \dim F + \dim G + \dim H}$$

2. Les trois droites sont deux à deux distinctes. Or deux droites vectorielles distinctes n'ont en commun que le vecteur nul : leurs intersections deux à deux sont donc toutes réduites à $\{0_E\}$.

Par ailleurs $F+G$ contient $(1\,;0)$ et $(0\,;1)$, donc vaut $\mathbb{R}^2$ tout entier.

$$\boxed{F \cap G = G \cap H = F \cap H = \{0_E\} \qquad \text{et} \qquad \dim(F+G+H) = 2}$$

3. La quantité proposée vaut :

$$1 + 1 + 1 - 0 - 0 - 0 + 0 = 3$$

alors que $\dim(F+G+H) = 2$.

$$\boxed{\text{La formule de Grassmann ne se généralise pas à trois sous-espaces.}}$$

Piège à retenir : des intersections deux à deux réduites au vecteur nul ne suffisent pas à faire une somme directe de trois sous-espaces. Ici, la relation $(1\,;1) = (1\,;0) + (0\,;1)$ montre que H est « déjà contenu » dans $F+G$, bien qu'il ne rencontre ni F ni G.

4. La formule de Grassmann donne, avec $\dim F + \dim G = n$:

$$\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F+G) = n - \dim(F+G)$$

Sens direct. Si F et G sont supplémentaires, alors $F + G = E$ par définition.

Réciproque. Si $F+G = E$, alors $\dim(F+G) = n$, donc $\dim(F \cap G) = 0$, c'est-à-dire $F \cap G = \{0_E\}$: la somme est directe, et elle vaut E.

$$\boxed{\text{Sous l'hypothèse } \dim F + \dim G = \dim E \ :\ F \text{ et } G \text{ supplémentaires } \iff F + G = E}$$

Le même raisonnement montre que, sous cette hypothèse de dimensions, $F \cap G = \{0_E\}$ suffit également : c'est exactement le critère du théorème 2.