EXERCICES – CHAPITRE 8

DIMENSION FINIE

Dimension et bases

EXERCICE 1 ⋆

Donner la dimension de chacun des espaces vectoriels suivants, en exhibant une base lorsqu'elle est finie.

1. $\mathbb{R}^3$, comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel
2. $\mathbb{R}^4$, comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel
3. $\mathbb{R}_2[X]$
4. $\mathbb{R}_4[X]$
5. $\mathbb{C}$, comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel
6. $\mathbb{C}$, comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel
7. $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$
8. $\{0_E\}$
9. $\text{Vect}\big((1\,;2\,;3)\,;(2\,;4\,;6)\big)$ dans $\mathbb{R}^3$
10. $\mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$, comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel

EXERCICE 2 ⋆

Dans chacun des cas suivants, dire *sans aucun calcul* si la famille considérée peut être libre, peut être génératrice, peut être une base. On justifiera par la proposition 1.

1. une famille de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$;
2. une famille de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^3$;
3. une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$;
4. une famille de 5 polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$;
5. une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel ;
6. une famille de 2 vecteurs de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

EXERCICE 3 ⋆

Les familles suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$? On n'en vérifiera qu'une seule des deux propriétés, en justifiant ce choix par la proposition 1.

1. $\big((1\,;1\,;0)\,;(0\,;1\,;1)\,;(1\,;0\,;1)\big)$
2. $\big((1\,;2\,;3)\,;(0\,;1\,;4)\,;(0\,;0\,;5)\big)$
3. $\big((1\,;1\,;1)\,;(1\,;2\,;4)\,;(1\,;3\,;9)\big)$
4. $\big((1\,;2\,;3)\,;(2\,;4\,;6)\,;(0\,;0\,;1)\big)$

La première famille avait été étudiée au chapitre 6 : comparer la longueur des deux démonstrations.

EXERCICE 4 ⋆⋆

On pose $P_0 = 1$, $P_1 = X - 1$ et $P_2 = (X-1)^2$, trois éléments de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Démontrer que la famille $(P_0\,;P_1\,;P_2)$ est libre.
2. En déduire que c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer les coordonnées du polynôme X^2+X+1 dans cette base.
4. Comparer ces coordonnées aux nombres $P(1)$, $P'(1)$ et $\dfrac{P''(1)}{2}$, où $P = X^2+X+1$. Que reconnaît-on ?

EXERCICE 5 ⋆⋆

1. Justifier que $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ et $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$. La famille $(1\,;\mathrm{i})$ est-elle libre dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$?
2. Soit E l'ensemble des suites réelles vérifiant $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a démontré au chapitre 6 que la famille $\big((2^n)\,;(3^n)\big)$ en est une base. En déduire $\dim E$.
3. Soit maintenant E' l'ensemble des suites réelles vérifiant $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que l'application $\Phi : u \mapsto (u_0\,;u_1)$ est un isomorphisme de E' sur $\mathbb{R}^2$.
4. En déduire $\dim E'$, sans avoir eu à exhiber la moindre base.

Sous-espaces et dimension

EXERCICE 6 ⋆

Déterminer la dimension de chacun des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^4$, en exhibant une base.

1. $F = \big\{(x\,;y\,;z\,;t) \in \mathbb{R}^4 \;\big|\; x+y+z+t = 0\big\}$
2. $G = \big\{(x\,;y\,;z\,;t) \in \mathbb{R}^4 \;\big|\; x = y \text{ et } z = t\big\}$
3. $H = \big\{(x\,;y\,;z\,;t) \in \mathbb{R}^4 \;\big|\; x+y = 0,\ z = 0,\ t = 0\big\}$
4. $L = \mathrm{Vect}\big((1\,;0\,;1\,;0)\,;(0\,;1\,;0\,;1)\,;(1\,;1\,;1\,;1)\big)$

EXERCICE 7 ⋆

1. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie tels que $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$. Démontrer que $F = G$.
2. Application : dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \mathrm{Vect}\big((1\,;1\,;0)\,;(0\,;1\,;1)\big)$ et $G = \big\{(x\,;y\,;z) \;\big|\; x-y+z = 0\big\}$. Démontrer que $F \subset G$, calculer les deux dimensions, et conclure.
3. Donner deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ de même dimension et non égaux. Quelle hypothèse de la question 1 est alors mise en défaut ?

EXERCICE 8 ⋆⋆

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

1. Justifier que $\dim F$ appartient à $\{0\,;1\,;2\,;3\}$.
2. Décrire géométriquement F dans chacun des quatre cas.
3. Combien $\mathbb{R}^3$ possède-t-il de sous-espaces de dimension 3 ? de dimension 0 ?
4. Énoncer le résultat analogue pour $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 9 ⋆⋆

On pose $F = \big\{P \in \mathbb{R}_3[X] \;\big|\; P(1) = 0\big\}$.

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Démontrer que la famille $\big((X-1)\,;\,(X-1)^2\,;\,(X-1)^3\big)$ est une famille libre de F.
3. En remarquant que $F \neq \mathbb{R}_3[X]$, démontrer que $\dim F = 3$.
4. En déduire que la famille précédente est une base de F, puis déterminer les coordonnées de $X^3 - 1$ dans cette base.

Formule de Grassmann et supplémentaires

EXERCICE 10 ⋆

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace E de dimension 6, avec $\dim F = 4$ et $\dim G = 5$.

1. Quelles sont les valeurs possibles de $\dim(F+G)$?
2. En déduire les valeurs possibles de $\dim(F \cap G)$.
3. Démontrer que $F \cap G$ n'est pas réduit au vecteur nul.
4. Généraliser : démontrer que si $\dim F + \dim G > \dim E$, alors $F \cap G \neq \{0_E\}$.

EXERCICE 11 ⋆

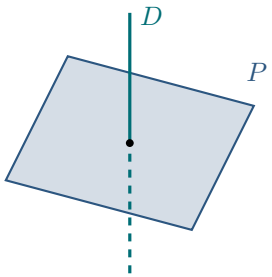
Dans $\mathbb{R}^3$, on pose :

$$F = \{(x\,;y\,;z) \mid x+y+z=0\} \qquad \text{et} \qquad G = \{(x\,;y\,;z) \mid x-y=0\}$$

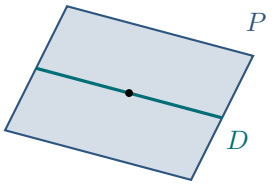
1. Déterminer $\dim F$ et $\dim G$.
2. Déterminer $F \cap G$ et sa dimension.
3. À l'aide de la formule de Grassmann, calculer $\dim(F+G)$, puis identifier $F+G$.
4. Les sous-espaces F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$? Justifier de deux façons.

EXERCICE 12 ⋆

Les deux figures ci-dessous représentent, dans $\mathbb{R}^3$, un plan vectoriel P et une droite vectorielle D.



(a)



(b)

1. Pour chacune des deux configurations, déterminer $\dim P$, $\dim D$ et $\dim(P \cap D)$.
2. En déduire $\dim(P+D)$ dans chaque cas, puis dire si P et D sont supplémentaires.
3. Traduire par le calcul la configuration **(a)** : on prendra $P = \{(x\,;y\,;z) \mid x=0\}$ et $D = \text{Vect}((1\,;0\,;0))$.
4. Deux droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ peuvent-elles être supplémentaires ? Et deux plans ?

EXERCICE 13 ⋆⋆

On note F l'ensemble des polynômes pairs de $\mathbb{R}_3[X]$, c'est-à-dire ceux de la forme $a+cX^2$, et G l'ensemble des polynômes impairs, de la forme $bX+dX^3$.

1. Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X]$, et déterminer leurs dimensions.
2. Démontrer que $F \cap G = \{0\}$.

3. En déduire, par le critère du théorème 2, que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.
4. Décomposer le polynôme $X^3 + 2X^2 - X + 5$ sur F et G.

Rang et théorème du rang

EXERCICE 14 ⋆

Déterminer le rang de chacune des familles de vecteurs suivantes.

1. $\big((1\,;2\,;3)\,;(2\,;4\,;6)\big)$ dans $\mathbb{R}^3$
2. $\big((1\,;0\,;1)\,;(0\,;1\,;1)\,;(1\,;1\,;2)\big)$ dans $\mathbb{R}^3$
3. $\big((1\,;1\,;0)\,;(0\,;1\,;1)\,;(1\,;0\,;1)\big)$ dans $\mathbb{R}^3$
4. $\big((1\,;0\,;0\,;1)\,;(0\,;1\,;1\,;0)\,;(1\,;1\,;1\,;1)\big)$ dans $\mathbb{R}^4$

EXERCICE 15 ⋆

Pour chacune des applications linéaires suivantes, déterminer le noyau, en déduire le rang par le théorème du rang, puis conclure quant à l'injectivité et à la surjectivité — le tout *sans jamais calculer l'image*.

1. $u : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (x+y+z\,;\,x-y) \end{array}\right.$
2. $u : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x-y\,;\,x+y\,;\,2x) \end{array}\right.$
3. $u : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y\,;z\,;t) & \longmapsto & (x+y\,;\,z+t) \end{array}\right.$
4. $u : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (x-y\,;\,y-z\,;\,z-x) \end{array}\right.$
5. $D : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}\right.$

EXERCICE 16 ⋆⋆

1. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $u(x\,;y\,;z) = (x+y\,;\,y+z\,;\,z+x)$. Déterminer $\operatorname{Ker} u$, puis conclure que u est bijective sans aucun autre calcul.
2. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $u(P) = P + P'$. Démontrer que $\operatorname{Ker} u = \{0\}$, puis conclure.
3. Une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ peut-elle être injective ? Justifier par le théorème du rang.
4. Une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ peut-elle être surjective ?
5. Que deviennent ces questions si l'on remplace $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ par deux espaces de même dimension ?

EXERCICE 17 ⋆⋆

Soient E, F et G trois espaces de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E\,;F)$ et $v \in \mathcal{L}(F\,;G)$.

1. Démontrer que $\operatorname{rg}(u) \leqslant \dim E$ et $\operatorname{rg}(u) \leqslant \dim F$.
2. Démontrer que $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$, puis que $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg}(v)$.
3. Démontrer que $\operatorname{Im}(v \circ u)$ est l'image de $\operatorname{Im} u$ par v, et en déduire $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg}(u)$.

4. Conclure, puis donner un exemple dans $\mathbb{R}^2$ où l'inégalité obtenue est stricte.

EXERCICE 18 ⋆⋆

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et φ une forme linéaire non nulle sur E. On appelle *hyperplan* de E tout sous-espace vectoriel de dimension $n-1$.

1. Démontrer que φ est surjective. On pourra reprendre l'exercice 9 du chapitre 7.
2. En déduire, par le théorème du rang, que $\operatorname{Ker}\varphi$ est un hyperplan de E.
3. Application : déterminer la dimension de $\{(x\,;y\,;z\,;t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+2y-z+3t=0\}$.
4. Réciproquement, soit H un hyperplan de E et a un vecteur n'appartenant pas à H. Justifier que $E = H \oplus \operatorname{Vect}(a)$, puis construire une forme linéaire non nulle de noyau H.
5. Application : déterminer une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ dont le noyau est $\operatorname{Vect}\big((1\,;1\,;0)\,;(0\,;1\,;1)\big)$.

Exercices de synthèse

EXERCICE 19 : VRAI OU FAUX

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Les espaces considérés sont des K-espaces vectoriels.

1. Toutes les bases d'un espace de dimension finie comportent le même nombre de vecteurs.
2. Une famille de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ ne peut pas être libre.
3. Une famille de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ ne peut pas être génératrice.
4. Deux sous-espaces vectoriels de même dimension sont égaux.
5. Si $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$, alors $F = G$.
6. Si $F \cap G = \{0_E\}$, alors F et G sont supplémentaires dans E.
7. Pour toute application linéaire u définie sur un espace E de dimension finie, on a $\dim E = \dim(\operatorname{Ker} u) + \operatorname{rg}(u)$.
8. Un endomorphisme injectif d'un espace de dimension finie est bijectif.
9. Un endomorphisme injectif d'un espace de dimension infinie est bijectif.
10. Le rang d'une application linéaire est la dimension de son noyau.

EXERCICE 20 ⋆⋆⋆

On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^4$ par :

$$u(x\,;y\,;z\,;t) = (x+y-z\,;\ y+z-t\,;\ x+2y-t)$$

1. Démontrer que u est une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $\operatorname{Ker} u$ et en donner une base. Quelle est sa dimension ?
3. En déduire $\operatorname{rg}(u)$ par le théorème du rang.
4. Remarquer une relation entre les trois coordonnées de $u(x\,;y\,;z\,;t)$, en déduire une inclusion pour $\operatorname{Im} u$, puis conclure à l'égalité grâce à la question 3.
5. L'application u est-elle injective ? surjective ?
6. Vérifier que $S = \operatorname{Vect}\big((0\,;0\,;1\,;0)\,;(0\,;0\,;0\,;1)\big)$ est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans $\mathbb{R}^4$, puis que la restriction de u à S est un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$. On retrouve ainsi la démonstration du théorème 3.

EXERCICE 21 ⋆⋆⋆

Soient $n \in \mathbb{N}$ et a_0, a_1, …, a_n des réels deux à deux distincts. On considère :

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & \big(P(a_0)\,;\,P(a_1)\,;\,\ldots\,;\,P(a_n)\big) \end{array} \right.$$

1. Démontrer que Φ est linéaire.
2. Comparer les dimensions de $\mathbb{R}_n[X]$ et de $\mathbb{R}^{n+1}$.
3. Démontrer que $\operatorname{Ker}\Phi = \{0\}$. On rappelle qu'un polynôme non nul de degré au plus n admet au plus n racines.
4. En déduire que Φ est bijective, en citant précisément le résultat du cours utilisé.
5. Traduire ce résultat en une phrase, en termes de polynômes passant par des points imposés.
6. Application : déterminer l'unique polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ vérifiant $P(0) = 1$, $P(1) = 3$ et $P(2) = 7$.

EXERCICE 22 ⋆⋆⋆

Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un espace E de dimension finie.

1. Démontrer que $\dim(F + G + H) \leqslant \dim F + \dim G + \dim H$.
2. Dans $E = \mathbb{R}^2$, on pose $F = \operatorname{Vect}\big((1\,;0)\big)$, $G = \operatorname{Vect}\big((0\,;1)\big)$ et $H = \operatorname{Vect}\big((1\,;1)\big)$. Vérifier que ces trois droites sont deux à deux d'intersection réduite au vecteur nul, puis calculer $\dim(F+G+H)$.
3. En déduire que la formule de Grassmann ne se généralise pas à trois sous-espaces : comparer $\dim(F + G + H)$ à la quantité

$$\dim F + \dim G + \dim H - \dim(F \cap G) - \dim(G \cap H) - \dim(F \cap H) + \dim(F \cap G \cap H)$$

4. Soit E de dimension n, et F, G deux sous-espaces tels que $\dim F + \dim G = n$. Démontrer que F et G sont supplémentaires si et seulement si $F + G = E$.