CORRIGÉ – CHAPITRE 9

MATRICES

Opérations sur les matrices

EXERCICE 1 ⋆

1. L'addition et la multiplication externe se font coefficient par coefficient :

$$\boxed{A+B=\begin{pmatrix}4&3\\2&-1\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad 2A-3B=\begin{pmatrix}-7&1\\-6&-2\end{pmatrix}}$$

2. Le coefficient en haut à gauche de AB vaut $1\times 3+2\times 2=7$, et l'on poursuit de même :

$$\boxed{AB=\begin{pmatrix}7&1\\-2&0\end{pmatrix} \qquad \text{tandis que} \qquad BA=\begin{pmatrix}3&5\\2&4\end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\text{Le produit matriciel n'est pas commutatif.}}$$

3. Le produit XY n'est défini que si le nombre de colonnes de X égale le nombre de lignes de Y. Ici A est de taille 2×2, C de taille 2×3 et D de taille 3×2.

$$\boxed{CD \text{ est } 2\times 2 \quad ; \quad DC \text{ est } 3\times 3 \quad ; \quad AC \text{ est } 2\times 3 \quad ; \quad CA \text{ n'est pas défini.}}$$

En effet C a trois colonnes et A deux lignes. Les trois autres valent :

$$CD=\begin{pmatrix}0&5\\2&5\end{pmatrix} \qquad DC=\begin{pmatrix}5&2&1\\2&1&0\\5&3&-1\end{pmatrix} \qquad AC=\begin{pmatrix}5&2&1\\-2&-1&0\end{pmatrix}$$

4. On calcule :

$$A^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2 \qquad \text{d'où} \qquad A^3=A^2A=A$$

$$\boxed{A^2=I_2 \text{ : la matrice } A \text{ est inversible et } A^{-1}=A.}$$

C'est la matrice d'une *symétrie*, au sens du chapitre 7.

EXERCICE 2 ⋆

1. Le produit vaut bien la matrice nulle, et pourtant aucun des deux facteurs ne l'est.

$$\boxed{\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ possède des diviseurs de zéro : cet anneau n'est pas intègre.}}$$

2. On effectue le produit :

$$N^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{N^2=0}$$

3. Plusieurs réponses conviennent, par exemple :

$$\boxed{M=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad M=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}}$$

Vérification pour la seconde : $M^2 = \begin{pmatrix} 1-1 & -1+1 \\ 1-1 & -1+1 \end{pmatrix} = 0$ ✓

4. On calcule $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{AB = AC \text{ alors que } B \neq C : \text{on ne peut pas simplifier par } A.}$$

La simplification n'est licite que si le facteur commun est *inversible* : on multiplie alors par son inverse. Ici A ne l'est pas.

EXERCICE 3 ⋆⋆

1. On calcule :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N^3 = 0$$

À chaque multiplication par N, la diagonale de coefficients non nuls se décale d'un cran vers la droite, jusqu'à sortir de la matrice.

2. La formule du binôme exige que les deux termes *commutent*. Or I_3 commute avec toute matrice.

$$\boxed{\text{Le binôme s'applique à } A^k = (I_3 + N)^k.}$$

3. Comme $N^j = 0$ dès que $j \geqslant 3$, la somme se réduit à trois termes :

$$A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} N^j = I_3 + kN + \frac{k(k-1)}{2} N^2$$

$$\boxed{A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & \dfrac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

4. Pour $k = 2$, la formule donne $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et pour $k = 3$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: le calcul direct confirme ✓

EXERCICE 4 ⋆⋆

1. Ce sont les six matrices de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ n'ayant qu'un seul coefficient non nul, égal à 1 :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. *Caractère générateur.* Toute matrice $A = (a_{i,j})$ s'écrit $A = \sum_{i,j} a_{i,j} E_{i,j}$, par définition des opérations coefficient par coefficient.

Liberté. Si $\sum_{i,j} \lambda_{i,j} E_{i,j} = 0$, alors le coefficient d'indice $(i\,;j)$ du membre de gauche vaut $\lambda_{i,j}$, donc tous les $\lambda_{i,j}$ sont nuls.

$$\boxed{\text{La famille des } E_{i,j} \text{ est une base, et } \dim \mathcal{M}_{n,p}(K) = np.}$$

3. Les quatre produits se lisent directement sur la définition :

$$\boxed{E_{1,1}E_{1,2} = E_{1,2} \quad ; \quad E_{1,2}E_{1,1} = 0 \quad ; \quad E_{1,2}E_{2,1} = E_{1,1} \quad ; \quad E_{2,1}E_{1,2} = E_{2,2}}$$

Les deux premiers produits illustrent à nouveau la non-commutativité, les deux derniers aussi.

4. On conjecture, puis on démontre :

$$\boxed{E_{i,j}E_{k,l} = \begin{cases} E_{i,l} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Démonstration. Le coefficient d'indice $(p\,;q)$ du produit vaut $\sum_m (E_{i,j})_{p,m}(E_{k,l})_{m,q}$. Le premier facteur n'est non nul que si $p = i$ et $m = j$, le second que si $m = k$ et $q = l$. Le produit n'est donc non nul que si $j = k$, et vaut alors 1 à la seule position $(i\,;l)$.

EXERCICE 5 ⋆⋆

1. On calcule les deux produits :

$$AE_{1,1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad E_{1,1}A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'égalité impose $b = 0$ (coefficient en haut à droite) et $c = 0$ (coefficient en bas à gauche).

$$\boxed{b = c = 0}$$

2. La matrice s'écrit désormais $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, et :

$$AE_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad E_{1,2}A = \begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{a = d}$$

3. Les deux questions précédentes se combinent :

$$\boxed{A = a\,I_2 \text{ : c'est une matrice scalaire.}}$$

4. Réciproquement, pour tout $\lambda \in K$ et toute matrice M :

$$(\lambda I_2)M = \lambda M = M(\lambda I_2)$$

$$\boxed{\text{Les matrices commutant avec toutes les autres sont exactement les } \lambda I_2.}$$

On retrouve le *centre* de l'anneau, notion introduite au chapitre 3 : ici, il se réduit aux homothéties.

Matrice d'une application linéaire

EXERCICE 6 ⋆

On applique la règle : *les colonnes sont les images des vecteurs de la base de départ*, exprimées dans la base d'arrivée.

1. $u(1\,;0\,;0) = (1\,;1)$, $u(0\,;1\,;0) = (1\,;-1)$ et $u(0\,;0\,;1) = (1\,;0)$:

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

2. $u(1\,;0) = (1\,;1\,;2)$ et $u(0\,;1) = (-1\,;1\,;0)$:

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}$$

3. Les trois images se lisent sur les coefficients :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

4. $u(1\,;0) = (0\,;1)$ et $u(0\,;1) = (1\,;0)$:

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Piège : la matrice d'une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ a *deux* lignes et *trois* colonnes. Le nombre de colonnes est la dimension de l'espace de départ, celui des lignes la dimension de l'espace d'arrivée.

EXERCICE 7 ⋆

1. On lit les extrémités des deux flèches sur le quadrillage :

$$\boxed{u(e_1) = (2\,;1) \qquad \text{et} \qquad u(e_2) = (-1\,;1)}$$

2. Ces deux vecteurs forment les deux colonnes :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

3. La première ligne donne la première coordonnée, la seconde la seconde :

$$\boxed{u(x\,;y) = (2x - y\,;\, x + y)} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{u(3\,;-2) = (8\,;1)}$$

4. On résout $2x - y = 0$ et $x + y = 0$: la seconde donne $y = -x$, la première $3x = 0$.

$$\boxed{\operatorname{Ker} u = \{0_E\} : u \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}^2.}$$

D'après le chapitre 8, l'injectivité suffit puisque les deux espaces ont la même dimension.

EXERCICE 8 ⋆

Le nombre de colonnes donne la dimension de départ, le nombre de lignes celle d'arrivée, et chaque ligne fournit une coordonnée de l'image.

1. Matrice 2×2 : $\boxed{u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad u(x\,;y) = (2x - y\,;\, x + 3y)}$

2. Matrice 2×3 : $\boxed{u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad u(x\,;y\,;z) = (x + 2z\,;\, -x + y)}$

3. Matrice 3×2 : $\boxed{u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad u(x\,;y) = (x + y\,;\, 2y\,;\, 3x - y)}$

4. Matrice 2×2 : $\boxed{u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad u(x\,;y) = (-y\,;\, x)}$

Pour la dernière, on reconnaît la matrice R_θ du cours avec $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, puisque $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin\frac{\pi}{2} = 1$:

$$\boxed{\text{C'est la rotation d'angle } \frac{\pi}{2}.}$$

EXERCICE 9 ⋆⋆

1. La dérivée d'un polynôme de degré au plus 3 est de degré au plus 2, donc appartient encore à $\mathbb{R}_3[X]$; et la dérivation est linéaire. Ses images sur la base valent $D(1) = 0$, $D(X) = 1$, $D(X^2) = 2X$ et $D(X^3) = 3X^2$:

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

2. On calcule :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^4 = 0$$

Dériver quatre fois un polynôme de degré au plus 3 donne toujours le polynôme nul.

3. La première colonne de M est nulle : le premier vecteur de base, à savoir le polynôme constant 1, est envoyé sur 0. Les trois autres colonnes engendrent $\mathrm{Vect}(e_1\,;e_2\,;e_3)$, c'est-à-dire les polynômes de degré au plus 2.

$$\boxed{\operatorname{Ker} D = \mathrm{Vect}(1) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} D = \mathbb{R}_2[X]}$$

4. Les trois dernières colonnes sont libres, donc $\mathrm{rg} M = 3$, et :

$$\boxed{\dim \mathbb{R}_3[X] = 4 = 1 + 3 = \dim(\operatorname{Ker} D) + \mathrm{rg}(D)}$$

EXERCICE 10 ⋆⋆

1. Les colonnes sont les images des vecteurs des bases canoniques :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

2. On compose directement :

$$(v \circ u)(x\,;y\,;z) = v(x+y\,;\,y+z) = \big(2(x+y)-(y+z)\,;\,(x+y)+(y+z)\big) = (2x+y-z\,;\,x+2y+z)$$

$$\boxed{\mathrm{Mat}(v \circ u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

3. Le produit BA donne exactement la même matrice, conformément au théorème 1. Quant à AB, il n'est pas défini : A possède trois colonnes et B deux lignes.

$$\boxed{\mathrm{Mat}(v \circ u) = BA, \text{ et le produit } AB \text{ n'a pas de sens.}}$$

C'est cohérent avec la composition : $u \circ v$ n'a pas de sens non plus, l'arrivée de v étant $\mathbb{R}^2$ et le départ de u étant $\mathbb{R}^3$.

4. On développe le produit :

$$R_\theta R_{\theta'} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' & -\cos\theta\sin\theta' - \sin\theta\cos\theta' \\ \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' & -\sin\theta\sin\theta' + \cos\theta\cos\theta' \end{pmatrix}$$

Or le théorème 1 donne $R_\theta R_{\theta'} = \mathrm{Mat}(r_\theta \circ r_{\theta'}) = \mathrm{Mat}(r_{\theta+\theta'}) = R_{\theta+\theta'}$. En identifiant les coefficients :

$$\boxed{\cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \qquad \sin(\theta+\theta') = \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'}$$

EXERCICE 11 ⋆⋆

1. Les colonnes sont les images de e_1 et e_2 :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

2. Si $\lambda(1\,;1) + \mu(1\,;-1) = (0\,;0)$, alors $\lambda + \mu = 0$ et $\lambda - \mu = 0$, donc $\lambda = \mu = 0$. C'est une famille libre de deux vecteurs dans un espace de dimension 2.

$$\boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}^2.}$$

3. Chacun des deux vecteurs est simplement multiplié par un scalaire :

$$u(1\,;1) = (3\,;3) = 3 \times (1\,;1) \qquad \text{et} \qquad u(1\,;-1) = (1\,;-1) = 1 \times (1\,;-1)$$

$$\boxed{D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ : la matrice est } \textit{diagonale}.}$$

4. Chaque vecteur de $\mathcal{B}'$ est simplement multiplié par un scalaire :

$$\boxed{u^k(1\,;1) = 3^k(1\,;1) \qquad \text{et} \qquad u^k(1\,;-1) = (1\,;-1)}$$

5. On décompose $(x\,;y) = \dfrac{x+y}{2}(1\,;1) + \dfrac{x-y}{2}(1\,;-1)$, puis on applique u^k :

$$\boxed{u^k(x\,;y) = \left(\frac{3^k(x+y)+(x-y)}{2}\,;\,\frac{3^k(x+y)-(x-y)}{2}\right)}$$

À retenir : dans la base canonique, calculer A^k serait pénible ; dans la base $\mathcal{B}'$, la matrice est diagonale et la puissance k-ième est immédiate. Trouver une telle base est précisément l'objet de la *diagonalisation*, annoncée par la remarque finale du cours.

MATRICES INVERSIBLES

EXERCICE 12 ⋆

On résout à chaque fois le système $AX = Y$, d'inconnues x et y.

1. Le système $2x + y = a$, $x + y = b$ donne, par soustraction, $x = a - b$, puis $y = b - x = 2b - a$.

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

Vérification : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & -2+2 \\ 1-1 & -1+2 \end{pmatrix} = I_2$ ✓

2. Le système $x + 3y = a$, $2x + 5y = b$ donne, par $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $-y = b - 2a$, soit $y = 2a - b$, puis $x = a - 3y = -5a + 3b$.

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}$$

3. La deuxième ligne est le double de la première : le système $x + 2y = a$, $2x + 4y = b$ n'a de solution que si $b = 2a$.

$$\boxed{\text{La matrice n'est pas inversible.}}$$

4. Le système $y = a$, $x = b$ donne immédiatement la solution.

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A}$$

Cette matrice est celle de la symétrie $(x\,;y) \mapsto (y\,;x)$ de l'exercice 6 : elle est bien sa propre réciproque.

EXERCICE 13 ⋆⋆

1. On développe les deux produits :

$$A\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ cd-dc & -cb+da \end{pmatrix} = (ad-bc)\,I_2$$

et le calcul de $\widetilde{A}A$ donne le même résultat.

$$\boxed{A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = (ad-bc)\,I_2}$$

2. Si $ad - bc \neq 0$, on peut diviser :

$$A \times \frac{1}{ad-bc}\widetilde{A} = \frac{1}{ad-bc}\widetilde{A} \times A = I_2$$

$$\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

3. Supposons $ad - bc = 0$ et A inversible. La question 1 donne $A\widetilde{A} = 0$, et en multipliant à gauche par A^{-1} :

$$\widetilde{A} = A^{-1} \times 0 = 0$$

donc $a = b = c = d = 0$, c'est-à-dire $A = 0$. Or la matrice nulle n'est pas inversible : contradiction.

4. Les deux questions précédentes se rassemblent :

$$\boxed{A \text{ est inversible si et seulement si } ad - bc \neq 0.}$$

On retrouve l'exercice 12 : les déterminants valent respectivement $2-1=1$, $5-6=-1$, $4-4=0$ et $0-1=-1$, ce qui confirme que seule la troisième matrice n'est pas inversible.

EXERCICE 14 ⋆⋆

1. Les égalités $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ montrent que A est un inverse de A^{-1}. L'inverse étant unique :

$$\boxed{\left(A^{-1}\right)^{-1} = A}$$

2. On calcule, en utilisant l'associativité :

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = I_n$$

et de même dans l'autre ordre. Pour le contre-exemple, prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{tandis que} \qquad A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \text{ et non } A^{-1}B^{-1}.}$$

3. En multipliant par A^{-1} du bon côté :

$$\boxed{AX = B \iff X = A^{-1}B \qquad \text{et} \qquad XA = B \iff X = BA^{-1}}$$

Ces deux solutions ne coïncident pas en général, le produit n'étant pas commutatif.

4. En multipliant l'égalité $M^2 = M$ à gauche par M^{-1} :

$$M^{-1}M^2 = M^{-1}M \qquad \text{soit} \qquad \boxed{M = I_n}$$

Autrement dit, le seul projecteur inversible est l'identité, comme au chapitre 7.

5. L'égalité $M \times M = I_n$ est exactement la définition de l'inversibilité, avec $B = M$.

$$\boxed{M \text{ est inversible et } M^{-1} = M.}$$

EXERCICE 15 ⋆⋆

1. Les colonnes sont les images des vecteurs de la base canonique :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

2. Le système $AX = Y$ s'écrit $x + y = a$, $y + z = b$, $x + z = c$. En additionnant les trois lignes :

$$2(x + y + z) = a + b + c \qquad \text{donc} \qquad x + y + z = \frac{a + b + c}{2}$$

En retranchant successivement chacune des trois équations, il vient :

$$z = \frac{-a + b + c}{2} \qquad x = \frac{a - b + c}{2} \qquad y = \frac{a + b - c}{2}$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

3. La matrice de u étant inversible, la proposition 3 s'applique :

$$\boxed{u \text{ est un automorphisme, et } u^{-1}(a\,;b\,;c) = \left(\frac{a - b + c}{2}\,;\,\frac{a + b - c}{2}\,;\,\frac{-a + b + c}{2}\right)}$$

4. On a $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et le vecteur $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, non nul, vérifie $BX = 0$.
Si B était inversible, on aurait $X = B^{-1}(BX) = B^{-1} \times 0 = 0$, ce qui est faux.

$$\boxed{B \text{ n'est pas inversible.}}$$

5. La proposition 3 conclut :

$$\boxed{v \text{ n'est pas un automorphisme de } \mathbb{R}^3.}$$

On retrouve le chapitre 8 : cette application a pour noyau $\text{Vect}((1\,;1\,;1))$ et pour rang 2, elle n'est donc ni injective ni surjective.

Méthode du pivot de Gauss

EXERCICE 16 ⋆

1. On effectue chaque opération séparément, à partir de A :

$$L_1 \leftrightarrow L_2 \ : \ \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow 3L_2 \ : \ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 12 & 15 & 18 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \ : \ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Chaque matrice E s'obtient en effectuant l'opération sur I_3 :

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Justification. La i-ième ligne de EA est la combinaison des lignes de A dictée par la i-ième ligne de E. Prendre pour E le résultat de l'opération sur I_3 revient donc exactement à effectuer cette opération sur A. On vérifie par exemple $SA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ✓

3. Chacune est inversible, et son inverse réalise l'opération réciproque :

$$\boxed{\begin{array}{lll} P^{-1} = P & \text{qui réalise} & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ M^{-1} = \operatorname{diag}\left(1\,;\,\frac{1}{3}\,;\,1\right) & \text{qui réalise} & L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \\ S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{qui réalise} & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}}$$

On retrouve la remarque du cours : toute opération élémentaire est *réversible*, parce que la matrice associée est inversible.

4. Si $\lambda = 0$, la matrice associée serait $\operatorname{diag}(1\,;0\,;1)$, dont la deuxième ligne est nulle : elle n'est pas inversible.

L'opération serait irréversible : la ligne effacée ne pourrait pas être reconstituée.

EXERCICE 17 ⋆

Matrice A. On part de la matrice augmentée $(A \mid I_3)$ et l'on mène la descente, puis la remontée.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Comparaison avec l'exercice 15. Le résultat est identique, mais la démarche diffère : là-bas il fallait avoir l'idée d'additionner les trois équations, ici l'algorithme se déroule sans aucune astuce. C'est tout l'intérêt du pivot.

Matrice B. Le pivot naturel de la première colonne est 2 ; on préfère amener un 1 en échangeant deux lignes.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow -\frac{1}{4} L_3]{L_2 \leftarrow -L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - L_3]{L_2 \leftarrow L_2 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right)$$

$$\boxed{B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}}$$

Matrice C. La deuxième ligne est le double de la première, ce que la première opération révèle aussitôt :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Une ligne entière de la moitié gauche est nulle : l'algorithme s'arrête.

$$\boxed{C \text{ n'est pas inversible.}}$$

À retenir : il n'a pas fallu supposer l'inversibilité au départ. L'algorithme la *décide* en cours de route, ce que la méthode par résolution de système ne fait pas aussi nettement.

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. La moitié gauche est déjà triangulaire supérieure, avec des pivots égaux à 1 : la descente est inutile. Il suffit de la remontée, menée de haut en bas puisque chaque opération utilise une ligne située en dessous et encore intacte :

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_4$$

Ces mêmes opérations, appliquées à I_4, donnent :

$$\boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Vérification. La première ligne de MM^{-1} vaut $(1\,;\,-1+1\,;\,-1+1\,;\,-1+1) = (1\,;0\,;0\,;0)$, et l'on obtient de même I_4 en poursuivant ✓

2. On mène le pivot sur la matrice augmentée du système, dont la moitié droite se réduit à une colonne :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

La dernière ligne donne $z = 3$, la deuxième $y = 5 - 3 = 2$, la première $x = 3 - 2 = 1$.

$$\boxed{(x\,;y\,;z) = (1\,;2\,;3)}$$

3. La matrice du système est exactement la matrice A de l'exercice 17, donc :

$$X = A^{-1}\begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 1 & -1\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3-5+4\\3+5-4\\-3+5+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

On retrouve la même solution.

4. On compare les deux méthodes :

Pour un seul système, le pivot direct est plus court : il évite le calcul de A^{-1}. Pour plusieurs seconds membres, il est plus rentable de calculer A^{-1} une fois, puis d'effectuer un simple produit pour chaque nouveau second membre.

Transposition et matrices remarquables

EXERCICE 19 ⋆

1. On échange lignes et colonnes :

$${}^tA = \begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix} \qquad {}^tB = \begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\\2 & 0\end{pmatrix} \qquad {}^tC = C \qquad {}^tD = -D$$

On notera que B est de taille 2×3 et ${}^tB$ de taille 3×2.

2. On confronte chaque matrice à sa transposée :

C est symétrique ; D est antisymétrique ; A n'est ni l'une ni l'autre.

La matrice B n'étant pas carrée, la question ne se pose même pas pour elle.

3. On vérifie sur A, et l'on démontre en général en revenant aux coefficients :

$$\left({}^t({}^tA)\right)_{i,j} = \left({}^tA\right)_{j,i} = A_{i,j} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{{}^t({}^tA) = A}$$

4. Si ${}^tA = -A$, alors pour tout indice i, le coefficient diagonal vérifie $a_{i,i} = -a_{i,i}$, donc $2a_{i,i} = 0$.

Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls.

C'est visible sur la matrice D, dont la diagonale ne comporte que des zéros.

EXERCICE 20 ⋆⋆

1. On a $AB = \begin{pmatrix}7 & 1\\-2 & 0\end{pmatrix}$ d'après l'exercice 1, donc ${}^t(AB) = \begin{pmatrix}7 & -2\\1 & 0\end{pmatrix}$. Par ailleurs :

$${}^tA\,{}^tB = \begin{pmatrix}1 & 0\\2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 2\\5 & 4\end{pmatrix} \qquad {}^tB\,{}^tA = \begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & -2\\1 & 0\end{pmatrix}$$

C'est la seconde égalité qui est vraie : ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

2. On calcule le coefficient d'indice $(i\,;j)$ des deux membres :

$$\left({}^t(AB)\right)_{i,j} = (AB)_{j,i} = \sum_k a_{j,k}\,b_{k,i} = \sum_k \left({}^tB\right)_{i,k}\left({}^tA\right)_{k,j} = \left({}^tB\,{}^tA\right)_{i,j}$$

$$\boxed{{}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA}$$

3. En transposant l'égalité $AA^{-1} = I_n$ et en utilisant la question 2, sachant que ${}^tI_n = I_n$:

$${}^t\left(A^{-1}\right){}^tA = I_n$$

et de même dans l'autre ordre à partir de $A^{-1}A = I_n$.

$$\boxed{{}^tA \text{ est inversible, et } \left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)}$$

4. La comparaison est immédiate :

$$\boxed{\text{Les deux opérations renversent l'ordre du produit.}}$$

C'est l'image des chaussettes et des chaussures du chapitre 3 : pour défaire une composition, on défait en dernier ce qui a été fait en premier.

EXERCICE 21 ⋆⋆

1. La matrice nulle est symétrique et antisymétrique. Et pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et deux matrices M, N, la proposition 4 donne :

$${}^t(\lambda M + N) = \lambda\,{}^tM + {}^tN$$

Si M et N sont symétriques, ce membre vaut $\lambda M+N$; si elles sont antisymétriques, il vaut $-(\lambda M+N)$.

$$\boxed{\mathcal{S}_n \text{ et } \mathcal{A}_n \text{ sont des sous-espaces vectoriels de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

2. Si M est à la fois symétrique et antisymétrique, alors $M = {}^tM = -M$, donc $2M = 0$.

$$\boxed{\mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n = \{0\}}$$

3. On applique la proposition 4 et la question 3 de l'exercice 19 :

$${}^t\left(\frac{M + {}^tM}{2}\right) = \frac{{}^tM + M}{2} \qquad \text{et} \qquad {}^t\left(\frac{M - {}^tM}{2}\right) = \frac{{}^tM - M}{2} = -\frac{M - {}^tM}{2}$$

La première est donc symétrique, la seconde antisymétrique, et leur somme vaut M.

4. L'intersection est réduite à zéro et la somme vaut $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tout entier :

$$\boxed{\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n}$$

5. Une matrice symétrique de taille 2 s'écrit $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, une antisymétrique $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$:

$$\boxed{\mathcal{S}_2 = \text{Vect}(E_{1,1}\,;\,E_{2,2}\,;\,E_{1,2}+E_{2,1}) \qquad \mathcal{A}_2 = \text{Vect}(E_{1,2}-E_{2,1})}$$

$$\boxed{\dim \mathcal{S}_2 + \dim \mathcal{A}_2 = 3 + 1 = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$$

6. On applique la question 3 :

$$\boxed{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & \frac{5}{2}\\ \frac{5}{2} & 4\end{pmatrix}}_{\text{symétrique}} + \underbrace{\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}}_{\text{antisymétrique}}}$$

Comparaison avec le chapitre 6. La décomposition est exactement celle des fonctions en partie paire et partie impaire, la transposition jouant le rôle de $f \mapsto (x \mapsto f(-x))$. Dans les deux cas, on décompose selon une *symétrie* au sens du chapitre 7, en séparant les éléments invariants de ceux qui sont changés en leur opposé.

EXERCICE 22 ⋆⋆

1. La matrice nulle est triangulaire supérieure, et si A et B le sont, alors pour $i > j$ le coefficient $(\lambda A + B)_{i,j} = \lambda a_{i,j} + b_{i,j}$ est nul. Une base est donnée par les $E_{i,j}$ avec $i \leqslant j$, dont le nombre est celui des couples $(i\,;j)$ tels que $i \leqslant j$.

$$\boxed{\dim \mathcal{T}_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

2. Soient A, $B \in \mathcal{T}_n$ et $i > j$. Alors :

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, b_{k,j}$$

Pour $k < i$, le coefficient $a_{i,k}$ est nul ; pour $k \geqslant i$, on a $k > j$, donc $b_{k,j}$ est nul. Tous les termes de la somme sont nuls.

Pour la diagonale, le même découpage laisse subsister le seul terme $k = i$:

$$\boxed{AB \in \mathcal{T}_n, \text{ et } (AB)_{i,i} = a_{i,i}\, b_{i,i}}$$

3. L'ensemble $\mathcal{T}_n$ contient I_n, qui est triangulaire supérieure, il est stable par différence d'après la question 1 et par produit d'après la question 2.

$$\boxed{\mathcal{T}_n \text{ est un sous-anneau de } \mathcal{M}_n(K).}$$

4. On effectue le produit :

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 7 & 1\\ 0 & -3 & -3\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

Le produit est bien triangulaire supérieur, et sa diagonale $(2\,;-3\,;-2)$ vaut $(1\times 2\,;-1\times 3\,;2\times(-1))$ ✓

5. Le critère de l'exercice 13 donne $ad - b \times 0 = ad$:

$$\boxed{\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & d\end{pmatrix} \text{ est inversible si et seulement si } ad \neq 0, \text{ et alors } \begin{pmatrix}a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad}\begin{pmatrix}d & -b\\ 0 & a\end{pmatrix}}$$

L'inverse est encore triangulaire supérieur, ce qui n'a rien d'un hasard : le sous-anneau $\mathcal{T}_n$ est stable par passage à l'inverse.

Exercices de synthèse

EXERCICE 23 : VRAI OU FAUX

1. **Vraie** L'exemple du cours et l'exercice 1 donnent $AB \neq BA$. Le produit ne devient commutatif que pour $n = 1$, où il se réduit à celui des scalaires.

2. **Fausse** L'exercice 2 exhibe deux matrices non nulles de produit nul : l'anneau $\mathcal{M}_n(K)$ possède des diviseurs de zéro.

3. **Vraie** C'est la définition même de la matrice d'une application linéaire, et la seule règle à mémoriser.

4. **Fausse** Le théorème 1 donne $\mathrm{Mat}(v \circ u) = \mathrm{Mat}(v) \times \mathrm{Mat}(u)$: l'application qui agit en premier a sa matrice à *droite*. L'exercice 10 le vérifie, et montre au passage que l'autre produit peut même ne pas être défini.

5. **Vraie** C'est la proposition 3, utilisée à l'exercice 15.

6. **Fausse** La proposition 2 donne $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, et l'exercice 14 fournit un contre-exemple explicite.

7. **Vraie** C'est la remarque qui suit la définition des opérations élémentaires, démontrée à l'exercice 16 : la matrice associée s'obtient en effectuant l'opération sur I_n.

8. **Vraie** C'est la dernière phrase de la méthode du cours, illustrée par la matrice C de l'exercice 17. L'algorithme décide de l'inversibilité en cours de route.

9. **Fausse** La définition exige $\lambda \neq 0$. Sinon l'opération n'est pas réversible, comme le montre la question 4 de l'exercice 16.

10. **Vraie** C'est la proposition 4, démontrée à l'exercice 20.

EXERCICE 24 ⋆⋆⋆

1. Chaque ligne de A fournit une coordonnée de l'image :

$$\boxed{u(x\,;y\,;z) = \left(\frac{2x-y-z}{3}\,;\,\frac{-x+2y-z}{3}\,;\,\frac{-x-y+2z}{3}\right)}$$

2. On calcule le produit, le facteur $\frac{1}{9}$ se plaçant devant :

$$A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A$$

$$\boxed{A^2 = A,\ \text{donc } u \circ u = u : \text{l'endomorphisme } u \text{ est un projecteur.}}$$

3. Le système $AX = 0$ s'écrit $2x - y - z = 0$, $-x + 2y - z = 0$ et $-x - y + 2z = 0$. En soustrayant les deux premières lignes, $3x - 3y = 0$, donc $x = y$; la première donne alors $z = x$.

Pour l'image, les colonnes de A sont $\frac{1}{3}(2\,;-1\,;-1)$, $\frac{1}{3}(-1\,;2\,;-1)$ et $\frac{1}{3}(-1\,;-1\,;2)$. La somme des coordonnées de chacune est nulle, et deux d'entre elles ne sont pas colinéaires.

$$\boxed{\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Vect}\big((1\,;1\,;1)\big) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\, u = \big\{(a\,;b\,;c) \mid a+b+c=0\big\}}$$

4. Un vecteur $(t\,;t\,;t)$ appartenant à $\mathrm{Im}\, u$ vérifie $3t = 0$, donc $t = 0$: l'intersection est réduite au vecteur nul. Et $1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, donc le théorème 2 du chapitre 8 conclut.

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u, \text{ et } u \text{ est la projection sur le plan d'équation } x+y+z=0 \\ \text{parallèlement à la droite } \mathrm{Vect}\big((1\,;1\,;1)\big).\end{array}}$$

C'est exactement le projecteur des chapitres 7 et 8, retrouvé ici par le calcul matriciel.

5. On soustrait l'identité au double de A :

$$S = 2A - I_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} - I_3 = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

Un calcul direct donne $S^2 = I_3$. On peut aussi l'obtenir sans calcul, en développant dans l'anneau $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$S^2 = (2A - I_3)^2 = 4A^2 - 4A + I_3 = 4A - 4A + I_3 = I_3$$

6. La réponse est négative :

$$\boxed{A \text{ n'est pas inversible.}}$$

Deux justifications : d'une part $\operatorname{Ker} u \neq \{0_E\}$, donc u n'est pas un automorphisme et la proposition 3 s'applique ; d'autre part le système $AX = 0$ admet la solution non nulle $(1\,;1\,;1)$, ce qui est impossible pour une matrice inversible.

EXERCICE 25 ⋆⋆⋆

1. Par définition de X_n et de la relation de récurrence :

$$AX_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ -6u_n + 5u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

Récurrence. L'égalité $X_0 = A^0 X_0$ est vraie. Si $X_n = A^n X_0$, alors $X_{n+1} = AX_n = A^{n+1}X_0$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0}$$

2. On calcule les deux produits :

$$AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{AP = PD}$$

Les deux colonnes de P sont donc simplement multipliées par 2 et par 3 : ce sont les directions que u laisse invariantes, comme à l'exercice 11.

3. Le critère de l'exercice 13 donne $3 - 2 = 1 \neq 0$:

$$\boxed{P \text{ est inversible, et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

4. De $AP = PD$ on tire, en multipliant à droite par P^{-1}, que $A = PDP^{-1}$. Par récurrence, les facteurs intermédiaires se télescopent :

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PD\underbrace{P^{-1}P}_{=I_2}DP^{-1}\cdots = PD^nP^{-1}$$

$$\boxed{A^n = PD^nP^{-1}}$$

5. Comme D est diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$, d'où :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 3^n \\ 2\times 2^n & 3\times 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 3\times 2^n - 2\times 3^n & 3^n - 2^n \\ 6\times 2^n - 6\times 3^n & 3^{n+1} - 2^{n+1} \end{pmatrix}}$$

6. La première coordonnée de $X_n = A^n X_0$ donne :

$$\boxed{u_n = (3\times 2^n - 2\times 3^n)u_0 + (3^n - 2^n)u_1}$$

Pour $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$:

$$\boxed{u_n = 3\times 2^n - 2\times 3^n}$$

Vérification : $u_0 = 3 - 2 = 1$ et $u_1 = 6 - 6 = 0$ ✓

C'est exactement la suite trouvée à l'exercice 20 du chapitre 6, obtenue là-bas en cherchant une base de l'espace des solutions. Le calcul matriciel y parvient sans jamais parler de base : il suffit de savoir calculer A^n, et l'égalité $A = PDP^{-1}$ y pourvoit. C'est le principe de la *diagonalisation*, dont le cours annonce qu'elle sera l'enjeu de la suite du programme.