EXERCICES – CHAPITRE 9

MATRICES

Opérations sur les matrices

EXERCICE 1 ⋆

On considère les matrices suivantes, à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A + B$, puis $2A - 3B$.
2. Calculer AB et BA. Que constate-t-on ?
3. Parmi les produits CD, DC, AC et CA, lesquels sont définis ? Préciser à chaque fois la taille du résultat, puis calculer ceux qui existent.
4. Calculer A^2, puis A^3. Que peut-on dire de la matrice A ?

EXERCICE 2 ⋆

1. Vérifier l'égalité donnée dans le cours :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Qu'en déduit-on sur l'anneau $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?
2. On pose $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^2. Une telle matrice est dite *nilpotente*.
3. Donner une matrice non nulle M, différente de N, vérifiant $M^2 = 0$.
4. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer AB et AC. Peut-on simplifier une égalité matricielle par un facteur commun ?

EXERCICE 3 ⋆⋆

On pose :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = I_3 + N$$

1. Calculer N^2 et N^3.
2. Justifier que l'on peut appliquer la formule du binôme au calcul de A^k, pour $k \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire une expression de A^k sous forme de matrice.
4. Vérifier le résultat pour $k = 2$ et $k = 3$ par un calcul direct.

EXERCICE 4 ⋆⋆

Pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui d'indice $(i\,;j)$ qui vaut 1.

1. Écrire les six matrices $E_{i,j}$ de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.
2. Démontrer que la famille de toutes les $E_{i,j}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$, et en déduire la dimension de cet espace.
3. Dans $\mathcal{M}_2(K)$, calculer $E_{1,1}E_{1,2}$, $E_{1,2}E_{1,1}$, $E_{1,2}E_{2,1}$ et $E_{2,1}E_{1,2}$.
4. Conjecturer une formule générale pour $E_{i,j}E_{k,l}$, puis la démontrer.

EXERCICE 5 ⋆⋆

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(K)$ commutant avec *toutes* les matrices de $\mathcal{M}_2(K)$.

1. Écrire l'égalité $AE_{1,1} = E_{1,1}A$ et en déduire que $b = c = 0$.
2. Écrire l'égalité $AE_{1,2} = E_{1,2}A$ et en déduire que $a = d$.
3. Conclure qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $A = \lambda I_2$.
4. Réciproquement, vérifier que toute matrice de cette forme convient.

Matrice d'une application linéaire

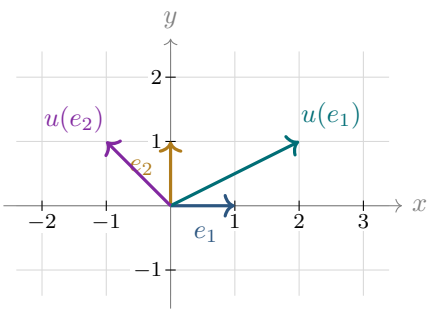
EXERCICE 6 ⋆

Écrire la matrice de chacune des applications linéaires suivantes, les espaces étant munis de leurs bases canoniques.

1. $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (x+y+z\,;\,x-y) \end{array} \right.$
2. $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x-y\,;\,x+y\,;\,2x) \end{array} \right.$
3. $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (x-y\,;\,y-z\,;\,z-x) \end{array} \right.$
4. $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (y\,;\,x) \end{array} \right.$

EXERCICE 7 ⋆

Le dessin ci-dessous représente, dans le plan muni de sa base canonique $(e_1\,;e_2)$, les images de ces deux vecteurs par un endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$.



1. Lire les coordonnées de $u(e_1)$ et $u(e_2)$.
2. En déduire la matrice de u dans la base canonique.
3. Donner l'expression de $u(x\,;y)$, puis calculer $u(3\,;-2)$.
4. L'application u est-elle bijective ? On pourra chercher $\operatorname{Ker} u$.

EXERCICE 8 ⋆

Dans chacun des cas suivants, la matrice donnée est celle d'une application linéaire dans les bases canoniques. Préciser les espaces de départ et d'arrivée, puis donner l'expression de l'application.

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Pour la dernière, reconnaître géométriquement l'application obtenue.

EXERCICE 9 ⋆⋆

On munit $\mathbb{R}_3[X]$ de la base $\mathcal{B} = (1\,;\,X\,;\,X^2\,;\,X^3)$, et l'on note D la dérivation $P \mapsto P'$.

1. Justifier que D est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$, puis écrire sa matrice M dans la base $\mathcal{B}$.
2. Calculer M^2, M^3 et M^4. Interpréter le dernier résultat en termes de dérivations successives.
3. Lire sur la matrice M le noyau et l'image de D.
4. Déterminer le rang de M et vérifier le théorème du rang.

EXERCICE 10 ⋆⋆

1. On pose $u(x\,;y\,;z) = (x+y\,;\,y+z)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, et $v(x\,;y) = (2x-y\,;\,x+y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Écrire les matrices A de u et B de v dans les bases canoniques.
2. Déterminer directement l'expression de $v \circ u$, puis sa matrice.
3. Calculer le produit BA et comparer. Que se passerait-il avec le produit AB ?
4. On rappelle que la matrice de la rotation r_θ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Calculer le produit $R_\theta\, R_{\theta'}$, et retrouver ainsi les formules d'addition du cosinus et du sinus.

EXERCICE 11 ⋆⋆

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $u(x\,;y) = (2x+y\,;\,x+2y)$.

1. Écrire la matrice A de u dans la base canonique.
2. Vérifier que $\mathcal{B}' = \big((1\,;1)\,;(1\,;-1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Calculer $u(1\,;1)$ et $u(1\,;-1)$, puis écrire la matrice D de u dans la base $\mathcal{B}'$. Que remarque-t-on ?
4. En déduire $u^k(1\,;1)$ et $u^k(1\,;-1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
5. En décomposant $(x\,;y)$ dans la base $\mathcal{B}'$, en déduire une expression de $u^k(x\,;y)$.

Une même application admet donc des matrices très différentes selon la base : tout l'enjeu est de trouver celle où elle est la plus simple.

Matrices inversibles

EXERCICE 12 ⋆

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Le cas échéant, déterminer leur inverse par la méthode du cours, en résolvant le système $AX = Y$.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

On vérifiera à chaque fois le résultat par un produit.

EXERCICE 13 ⋆⋆

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(K)$. On pose $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A\widetilde{A}$ et $\widetilde{A}A$.
2. En déduire que si $ad - bc \neq 0$, alors A est inversible, et donner l'expression de A^{-1}.
3. Réciproquement, on suppose $ad - bc = 0$ et A inversible. En multipliant l'égalité $A\widetilde{A} = 0$ par A^{-1}, aboutir à une contradiction.
4. Conclure par une équivalence, puis retrouver les résultats de l'exercice 12.

EXERCICE 14 ⋆⋆

Soient A et B deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(K)$.

1. Démontrer que $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
2. Démontrer que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, puis donner un exemple dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ où $(AB)^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$.
3. Résoudre, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(K)$, les équations $AX = B$ puis $XA = B$. Ces deux solutions coïncident-elles ?
4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $M^2 = M$ et M inversible. Démontrer que $M = I_n$.
5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $M^2 = I_n$. Démontrer que M est inversible et préciser son inverse.

EXERCICE 15 ⋆⋆

1. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $u(x\,;y\,;z) = (x+y\,;\,y+z\,;\,z+x)$. Écrire sa matrice A dans la base canonique.
2. Déterminer A^{-1} en résolvant le système $AX = Y$. On retrouvera ce résultat par une autre voie à l'exercice 20.
3. En déduire, grâce à la proposition 3, que u est un automorphisme, et donner l'expression de $u^{-1}(a\,;b\,;c)$.
4. Soit maintenant $v(x\,;y\,;z) = (x-y\,;\,y-z\,;\,z-x)$, de matrice B. Vérifier que le système $BX = 0$ admet une solution non nulle, et en déduire que B n'est pas inversible.
5. Que peut-on alors dire de v ?

Méthode du pivot de Gauss

EXERCICE 16 ⋆

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ et les trois opérations élémentaires suivantes :

$$L_1 \leftrightarrow L_2 \qquad L_2 \leftarrow 3L_2 \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$

1. Effectuer chacune de ces trois opérations sur A, séparément.
2. Pour chacune, déterminer la matrice $E \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que l'opération revienne à calculer le produit EA. On pourra remarquer que E s'obtient en effectuant l'opération sur I_3.
3. Vérifier que ces trois matrices sont inversibles, et déterminer leur inverse. Quelle opération élémentaire chacun de ces inverses réalise-t-il ?
4. En déduire pourquoi la définition du cours exige $\lambda \neq 0$ dans l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$.

EXERCICE 17 ⋆

Déterminer, par la méthode du pivot de Gauss, si les matrices suivantes sont inversibles, et calculer leur inverse le cas échéant. On présentera les calculs sous forme de matrice augmentée, en indiquant à chaque étape l'opération effectuée.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour la matrice A, comparer le résultat et la longueur du calcul avec ceux de l'exercice 15.

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. Inverser par le pivot de Gauss la matrice suivante, puis vérifier le résultat par un produit :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Le cours signale que le même algorithme permet de résoudre un système linéaire. Résoudre par le pivot le système suivant, en menant les opérations sur la matrice augmentée du système :

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 5 \\ x + z = 4 \end{cases}$$

3. Retrouver cette solution en utilisant l'inverse de la matrice A calculé à l'exercice 17.
4. Comparer les deux méthodes. Laquelle est préférable si l'on doit résoudre plusieurs systèmes de même matrice mais de seconds membres différents ?

Transposition et matrices remarquables

EXERCICE 19 ⋆

1. Déterminer la transposée de chacune des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Parmi ces quatre matrices, lesquelles sont symétriques ? antisymétriques ?
3. Vérifier que ${}^t({}^tA) = A$, et démontrer ce résultat en général.
4. Démontrer que les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont tous nuls.

EXERCICE 20 ⋆⋆

1. Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, calculer ${}^t(AB)$, puis ${}^tA\,{}^tB$ et ${}^tB\,{}^tA$. Laquelle des deux égalités est vraie ?
2. Démontrer en général que ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$, en revenant aux coefficients.
3. Soit A une matrice inversible. Démontrer que ${}^tA$ l'est également, et que $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.
4. Rapprocher la formule de la question 2 de celle donnant l'inverse d'un produit. Que remarque-t-on ?

EXERCICE 21 ⋆⋆

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n$ celui des matrices antisymétriques.

1. Démontrer que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Démontrer que $\mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n = \{0\}$.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Vérifier que les matrices $\dfrac{M + {}^tM}{2}$ et $\dfrac{M - {}^tM}{2}$ appartiennent respectivement à $\mathcal{S}_n$ et à $\mathcal{A}_n$, et que leur somme vaut M.
4. Conclure que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.
5. Dans le cas $n = 2$, donner une base de $\mathcal{S}_2$ et une base de $\mathcal{A}_2$, puis vérifier le compte des dimensions.
6. Décomposer la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ selon cette somme directe.

Comparer avec la décomposition des fonctions en partie paire et partie impaire du chapitre 6.

EXERCICE 22 ⋆⋆

On note $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(K)$, c'est-à-dire celles dont les coefficients $a_{i,j}$ sont nuls dès que $i > j$.

1. Démontrer que $\mathcal{T}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(K)$, et déterminer sa dimension.
2. Démontrer que le produit de deux matrices de $\mathcal{T}_n$ appartient encore à $\mathcal{T}_n$, et que ses coefficients diagonaux sont les produits des coefficients diagonaux correspondants.
3. En déduire que $\mathcal{T}_n$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(K)$.

4. Vérifier la question 2 sur le produit des deux matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Dans $\mathcal{M}_2(K)$, démontrer que $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad \neq 0$, et donner alors son inverse.

Exercices de synthèse

EXERCICE 23 : VRAI OU FAUX

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. Le produit matriciel n'est pas commutatif dès que $n \geqslant 2$.
2. Si $AB = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$.
3. Les colonnes de la matrice d'une application linéaire sont les images des vecteurs de la base de départ.
4. Pour deux applications composables, $\text{Mat}(v \circ u) = \text{Mat}(u) \times \text{Mat}(v)$.
5. Un endomorphisme est un automorphisme si et seulement si sa matrice est inversible.
6. Pour toutes matrices inversibles, $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.
7. Une opération élémentaire sur les lignes revient à multiplier la matrice à gauche par une matrice inversible.
8. Si, au cours du pivot, une ligne entière de la moitié gauche devient nulle, alors la matrice n'est pas inversible.
9. Multiplier une ligne par un scalaire quelconque est une opération élémentaire.
10. Pour toutes matrices de tailles compatibles, ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

EXERCICE 24 ⋆⋆⋆

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Donner l'expression de $u(x\,;y\,;z)$.
2. Calculer A^2. Qu'en déduit-on sur u ?
3. Déterminer $\text{Ker}\, u$ en résolvant le système $AX = 0$, puis $\text{Im}\, u$ en utilisant les colonnes de A.
4. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}\, u \oplus \text{Im}\, u$, et identifier géométriquement u.
5. Déterminer la matrice S de la symétrie $s = 2u - \text{Id}$, et vérifier que $S^2 = I_3$.
6. La matrice A est-elle inversible ? Justifier de deux façons.

EXERCICE 25 ⋆⋆⋆

On considère l'ensemble des suites réelles vérifiant $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$, déjà rencontré aux chapitres 6 et 8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout n, puis démontrer par récurrence que $X_n = A^n X_0$.
2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Vérifier que $AP = PD$.
3. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
4. En déduire que $A = PDP^{-1}$, puis que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Calculer A^n explicitement.
6. En déduire l'expression de u_n en fonction de u_0, u_1 et n, puis retrouver la suite vérifiant $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$.