EXERCICES – CHAPITRE 1

DIVISIBILITÉ ET PRIMALITÉ

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

EXERCICE 1 ⋆

1. Sans utiliser de discriminant, déterminer les valeurs de n entier relatif tel que :

   a) $n^2 + n = 20$ b) $n^2 + 2n = 35$

2. Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x; y)$ tels que :

   a) $x^2 = y^2 + 21$ b) $x^2 - 7xy = 17$

EXERCICE 2 ⋆

Le but de l'exercice est de trouver les valeurs du naturel $n > 4$ pour lesquelles la fraction :

$$\frac{n+17}{n-4} \text{ est un entier.}$$

1. Démontrer que $(n-4)$ divise $(n+17)$ équivaut à $(n-4)$ divise 21.
2. Lister les diviseurs de 21.
3. Résoudre le problème.

EXERCICE 3 ⋆

Déterminer les entiers relatifs n tels que :

a) 6 divise $n+5$
b) n divise $n+6$
c) $n+3$ divise $n+10$
d) $n+1$ divise $3n+4$
e) $2n+1$ divise $6n+12$
f) $3n+1$ divise $10n-4$

EXERCICE 4 ⋆

Soient a, b et c trois entiers relatifs non nuls. Dire si chacune des affirmations suivantes est **Vraie** ou **Fausse**, en justifiant par une démonstration ou par un contre-exemple.

1. Si a divise b et b divise c, alors a divise c.
2. Si a divise $b+c$, alors a divise b ou a divise c.
3. Si a divise b et a divise c, alors a divise $2b-3c$.
4. Si a divise bc, alors a divise b ou a divise c.
5. Si a divise b et b divise a, alors $a = b$.
6. Si a divise b, alors a^2 divise b^2.

EXERCICE 5 ⋆

Soit n un entier naturel.

1. Montrer que si n est impair alors n^2 aussi.
2. Montrer que si n est impair, alors $n^2 - 1$ est divisible par 8.
3. Montrer que quel que soit n le nombre $3n^4 + 5n + 1$ est impair, et en déduire qu'il n'est jamais divisible par $n(n + 1)$.
4. Montrer que si n est strictement inférieur à 100, alors en lui soustrayant la somme de ses chiffres on obtient toujours un nombre divisible par 9.
5. Montrer en étudiant trois cas différents que quel que soit n, $n(n^2 + 5)$ est divisible par 3.

EXERCICE 6 ⋆⋆

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

1. 3 divise $4^n - 1$;
2. 7 divise $9^n - 2^n$;
3. 6 divise $n^3 + 5n$;
4. 5 divise $2 \times 4^n + 3 \times 9^n$.

EXERCICE 7 ⋆⋆

Soit n un entier naturel.

1. Montrer que $(n + 1)$ divise $(n^2 + 5n + 4)$ et $(n^2 + 3n + 2)$.
2. Déterminer toutes les valeurs de n pour lesquelles $(n + 1)$ divise $(3n^2 + 15n + 19)$.
3. En déduire que pour tout n, $(3n^2 + 15n + 19)$ n'est pas divisible par $(n^2 + 3n + 2)$.

EXERCICE 8 ⋆⋆

Déterminer les entiers relatifs n tels que :

a) $n - 2$ divise $n^2 + 3$ *(on pourra développer $(n - 2)(n + 2)$)* ;

b) $n + 2$ divise $n^2 + 5n + 11$;

c) $n^2 + 2$ divise $n^4 + 2n^2 + 7$.

DIVISION EUCLIDIENNE

EXERCICE 9 ⋆

Déterminer, sans calculatrice, la division euclidienne de :

a) 320 par 7

b) -187 par 7

c) 3225 par 11

d) 2024 par 17

e) -5000 par 13

f) 12345678 par 9

EXERCICE 10 ⋆

Soit a un entier naturel dont le reste dans la division euclidienne par 7 est égal à 3.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne par 7 de chacun des nombres $2a$, $a + 5$, a^2 et a^3.
2. En déduire que $a^3 + 1$ est divisible par 7.

EXERCICE 11 ⋆

La différence entre deux entiers naturels est 538. Si l'on divise l'un par l'autre le quotient est 13, et le reste 34. Quels sont ces deux entiers naturels ?

EXERCICE 12 ⋆

1. On divise un entier naturel n par 23, ce qui donne pour reste 1, et on divise ensuite n par 17 ce qui donne le même quotient mais pour reste 13. Que vaut n ?
2. On divise un entier naturel n par 152, ce qui donne pour reste 13, et on divise ensuite n par 147 ce qui donne le même quotient mais pour reste 98. Que vaut n ?

EXERCICE 13 ⋆⋆

1. Déterminer les entiers naturels n dont le quotient et le reste dans la division euclidienne par 5 sont égaux.
2. Dans la division euclidienne de 1000 par un entier naturel non nul b, le quotient vaut 37. Déterminer b et le reste de cette division.
3. Déterminer tous les entiers naturels a dont le quotient dans la division euclidienne par 13 vaut 7.

EXERCICE 14 ⋆⋆

1. En distinguant les cas $n = 2k$ et $n = 2k + 1$, montrer que le reste de la division euclidienne de n^2 par 4 vaut 0 ou 1, pour tout entier n.
2. En déduire les restes possibles de la division par 4 d'une somme de deux carrés d'entiers. L'entier 2023 peut-il s'écrire comme la somme de deux carrés d'entiers ?
3. En distinguant quatre cas, montrer que le reste de la division euclidienne de n^2 par 8 vaut 0, 1 ou 4.
4. En déduire qu'un entier dont le reste dans la division par 8 vaut 7 ne peut pas s'écrire comme la somme de trois carrés d'entiers. Est-ce le cas de 2023 ?

Nombres premiers et décomposition en facteurs premiers

EXERCICE 15 ⋆

Sans calculatrice, déterminer si les entiers suivants sont premiers, et si ils ne le sont pas, donner leur décomposition en facteurs premiers :

$$97;\ 109;\ 117;\ 271;\ 317;\ 323;\ 401;\ 419;\ 437;\ 527;\ 719$$

EXERCICE 16 ⋆⋆

1. Décomposer en produit de facteurs premiers les entiers 360, 1001, 2024 et 3600, puis donner le nombre de diviseurs positifs de chacun d'eux.
2. Décomposer 72 en produit de facteurs premiers, puis donner la liste complète de ses diviseurs positifs.
3. Soit $N = p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}$ la décomposition en facteurs premiers d'un entier $N \geqslant 2$. Montrer qu'un entier naturel d divise N si et seulement si d s'écrit :

$$d = p_1^{\beta_1} \times \cdots \times p_k^{\beta_k} \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i \text{ pour tout } i \in [\![1; k]\!].$$

On pourra écrire $N = d \times m$ et utiliser l'unicité de la décomposition.

EXERCICE 17 ⋆⋆

Soit $p > 3$ un nombre premier.

1. Quels sont les restes possibles dans la division euclidienne de p par 12 ?
2. Montrer que $p^2 + 11$ est divisible par 12.

EXERCICE 18 ⋆⋆

Déterminer si chacune des affirmations suivantes est **Vraie** ou **Fausse** :

1. Il existe une valeur $n \in \mathbb{N}$ tel que $2n^2 + n - 10$ est premier.
2. Il existe une valeur $n \in \mathbb{N}$ tel que $2n^2 + 7n + 6$ est premier.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $n^2 - 3n + 10$ n'est pas premier.
4. Pour tout entier n impair, le nombre $N = n + (n + 2) + n(n + 2)$ est un nombre premier.

EXERCICE 19 ⋆

L'entier parmi les nombres inférieurs ou égaux à 50 qui possède le plus de diviseurs en possède précisément 10. Trouver cet entier.

EXERCICE 20 ⋆⋆

1. Montrer qu'un entier naturel possède exactement 7 diviseurs positifs si et seulement s'il s'écrit p^6 avec p premier. Quel est le plus petit d'entre eux ?
2. Déterminer le plus petit entier naturel possédant exactement 9 diviseurs positifs.
3. Déterminer le plus petit entier naturel possédant exactement 12 diviseurs positifs.

EXERCICE 21 ⋆⋆

On considère un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que n a exactement 5 diviseurs, et $(n - 16)$ est le produit de deux nombres premiers.

1. Montrer que $n = p^4$ avec p premier.
2. Écrire $(n - 16)$ comme le produit de trois facteurs dépendant de p.
3. En déduire la valeur de p, puis la valeur de n.

EXERCICE 22 ⋆

Soient a et b deux entiers tels que $(a^2 - b^2)$ soit un nombre premier.

1. Quelle relation existe-t-il entre a et b ?
2. Montrer que 401 est un nombre premier.
3. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$:
$$x^2 - y^2 = 401$$

EXERCICE 23 ⋆⋆

1. Déterminer les entiers naturels n pour lesquels $n^2 + 2n - 3$ est un nombre premier.
2. Déterminer les entiers naturels n pour lesquels $n^3 - 1$ est un nombre premier.
3. Déterminer les entiers relatifs n pour lesquels $|n^2 - 6n + 8|$ est un nombre premier.
4. Montrer que $4^n - 1$ n'est premier que pour $n = 1$.

Exercices d'approfondissement

EXERCICE 24 ⋆⋆⋆

Soit n un entier relatif et A le nombre défini par :

$$A = n^4 - 12n^2 + 16$$

1. En remarquant que $A = n^4 - 8n^2 + 16 - 4n^2$, factoriser A.
2. Montrer que si n est pair alors, $|A|$ n'est pas premier.
3. On suppose que n est impair. On pose alors $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
   (a) Montrer que :
   $$A = (4k^2 + 8k - 1)(4k^2 - 5)$$
   (b) En déduire les valeurs de n pour lesquelles $|A|$ est nombre premier.

EXERCICE 25 : NOMBRES DE MERSENNE ⋆⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle nombre de Mersenne tout nombre $M_n = 2^n - 1$.

1. Soient $a \in \mathbb{N}^*$. On suppose que a et n sont supérieurs ou égaux à 2. Montrer que si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est premier.
2. Vérifier que M_{11} n'est pas premier.

EXERCICE 26 : SOMME DES DIVISEURS ⋆⋆⋆

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $\sigma(n)$ la somme des diviseurs positifs de n.

1. Calculer $\sigma(72)$ à l'aide de la liste des diviseurs de 72 (exercice 16), puis vérifier que $\sigma(72) = (1 + 2 + 4 + 8)(1 + 3 + 9)$.
2. Soient p un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}$. Montrer que :
   $$\sigma(p^\alpha) = 1 + p + \cdots + p^\alpha = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1}.$$
3. Soient p et q deux nombres premiers distincts, α et β deux entiers naturels. En utilisant la question 3 de l'exercice 16, montrer que $\sigma(p^\alpha q^\beta) = \sigma(p^\alpha) \times \sigma(q^\beta)$.
4. Admettant que cette formule se généralise à un nombre quelconque de facteurs premiers, calculer $\sigma(360)$.
5. Déterminer les entiers $n \geqslant 1$ tels que $\sigma(n) = n + 1$.

EXERCICE 27 : UNE INFINITÉ DE NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $6k + 5$ ⋆⋆⋆

1. Montrer que tout nombre premier $p \geqslant 5$ s'écrit sous la forme $6k + 1$ ou $6k + 5$, avec $k \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que le produit de deux entiers de la forme $6k + 1$ est encore de la forme $6k + 1$. En déduire, par récurrence, que tout produit de $r \geqslant 1$ entiers de la forme $6k + 1$ est de la forme $6k + 1$.
3. En déduire que tout entier naturel de la forme $6k + 5$ admet au moins un diviseur premier de la forme $6k + 5$.
4. On suppose par l'absurde qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers de la forme $6k + 5$, que l'on note p_1, p_2, …, p_r. En considérant l'entier $N = 6p_1p_2 \cdots p_r - 1$, aboutir à une contradiction.

EXERCICE 28 : CRITÈRES DE DIVISIBILITÉ ⋆⋆⋆

Soit N un entier naturel, dont l'écriture décimale est $N = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$, c'est-à-dire :

$$N = a_k \times 10^k + a_{k-1} \times 10^{k-1} + \dots + a_1 \times 10 + a_0, \qquad \text{où les chiffres } a_i \text{ sont dans } [\![0;9]\!].$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10^n - 1$ est divisible par 9.
2. On note $S = a_k + \dots + a_1 + a_0$ la somme des chiffres de N. Montrer que $N - S$ est divisible par 9. En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S l'est, puis qu'il en est de même pour 3.
3. L'entier 123 456 789 est-il divisible par 9 ?
4. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10^{2n} - 1$ et $10^{2n+1} + 1$ sont divisibles par 11.
5. On note $T = a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^k a_k$ la somme alternée des chiffres de N. Montrer que $N - T$ est divisible par 11, et en déduire un critère de divisibilité par 11.
6. L'entier 918 082 est-il divisible par 11 ?

POUR ALLER PLUS LOIN

EXERCICE 29 ⋆⋆

Soit n le produit de quatre éléments de $\mathbb{N}^*$ consécutifs. Montrer que $n + 1$ est le carré d'un entier.

EXERCICE 30 ⋆⋆

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, a et b dans $\mathbb{Z}$.

a) Montrer que $a - b$ divise $a^n - b^n$.

b) On suppose que n est impair. Montrer que $a + b$ divise $a^n + b^n$.

EXERCICE 31 ⋆⋆⋆

Soient m et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$, $a \geqslant 2$ un entier.

a) Montrer que, si m divise n, $a^m - 1$ divise $a^n - 1$.

b) On suppose que le reste de la division euclidienne de n par m est r. Montrer que le reste de la division euclidienne de $a^n - 1$ par $a^m - 1$ est $a^r - 1$. On écrira explicitement une identité mettant en évidence la division euclidienne.

EXERCICE 32 ⋆⋆⋆

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la factorisation $(n+1)(n-1) = n^2 - 1$, montrer que $n+1$ divise n^2+1 si et seulement si $n+1$ divise 2. En déduire l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tels que $n+1$ divise n^2+1.
2. En adaptant la méthode de la question précédente, déterminer les $n \in \mathbb{Z}$ tels que $n+3$ divise n^3+3.

EXERCICE 33 ⋆⋆

Montrer que, pour tout nombre premier $p \geqslant 5$, 24 divise $p^2 - 1$.

EXERCICE 34 : NOMBRES DE FERMAT ⋆⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^n + 1$ soit premier. Montrer que n est une puissance de 2.

EXERCICE 35 ⋆⋆

Soient x et y deux nombres réels.

a) En complétant un carré, donner une factorisation de $x^4 + 4y^4$.

b) En déduire que, si m et n sont dans $\mathbb{N}^*$, $m^4 + 4n^4$ est premier si et seulement si $m = n = 1$.

EXERCICE 36 ⋆⋆⋆

1. Montrer que, si $n \geqslant 2$, aucun des nombres $n! + k$, $2 \leqslant k \leqslant n$, n'est premier. Il existe donc des suites d'entiers consécutifs de longueur arbitraire dont aucun n'est premier.
2. Quels sont les $k \in \mathbb{N}$ tels que l'ensemble des entiers n tels que $k + 1 \leqslant n \leqslant k + 10$ contienne le plus grand nombre de nombres premiers ? On s'intéressera aux nombres pairs et aux nombres impairs divisibles par 3.

EXERCICE 37 ⋆⋆

1. Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel. Généraliser.
2. Montrer que $\sqrt{6}$ est irrationnel, puis en déduire que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

EXERCICE 38 ⋆⋆⋆

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $d(n)$ le nombre de diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$.

1. Soient a et b dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que a divise b si et seulement si a^2 divise b^2.
2. Soient a et b deux éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que $a^2 = b^3$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = c^3$ et $b = c^2$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que n est le carré d'un nombre entier si et seulement si $d(n)$ est impair.

EXERCICE 39 ⋆⋆⋆

Soit $E = \{(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \,;\, m^2 - 1 = 2^n\}$.

a) Montrer que, si $(m, n) \in E$, $m - 1$ et $m + 1$ sont de la forme 2^k avec $k \in \mathbb{N}$.

b) Déterminer E.

EXERCICE 40 ⋆⋆⋆⋆

Déterminer, parmi les nombres 101, 10101, 1010101… ceux qui sont premiers.

EXERCICE 41 : NOMBRES PARFAITS ⋆⋆⋆⋆

Un entier naturel $n \geqslant 2$ est parfait si la somme des diviseurs de n autres que n dans $\mathbb{N}^*$ est égale à n, autrement dit si la somme des diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$ est égale à $2n$.

a) Vérifier que 6 et 28 sont des nombres parfaits.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $p := 2^n - 1$ soit premier (i.e. un nombre de Mersenne, exercice 25). On pose $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$. Montrer que N est parfait.