CORRIGÉ – CHAPITRE 2

NOMBRES COMPLEXES

Forme algébrique et calculs dans $\mathbb{C}$

EXERCICE 1 ⋆

On développe chacune des expressions puis on regroupe la partie réelle et la partie imaginaire, en utilisant systématiquement le fait que $i^2 = -1$:

1. On constate que :
$$z = 3 + 2i - 1 + 3i = (3-1) + (2+3)i \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{z = 2 + 5i}$$
2. On constate que :
$$z = 6 + i - (2 + 4i) = (6-2) + (1-4)i \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{z = 4 - 3i}$$
3. On constate que :
$$z = 12 - 3i - 4 + 8i - 5 = (12 - 4 - 5) + (-3 + 8)i \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{z = 3 + 5i}$$
4. On développe le produit :
$$\begin{aligned} z &= (1 + 2i)(4 + 3i) \\ &= 4 + 3i + 8i + 6i^2 \\ &= 4 + 11i - 6 \end{aligned}$$
$$\boxed{z = -2 + 11i}$$
5. On procède de la même manière :
$$\begin{aligned} z &= (3 - i)(2 + 7i) \\ &= 6 + 21i - 2i - 7i^2 \\ &= 6 + 19i + 7 \end{aligned}$$
$$\boxed{z = 13 + 19i}$$
6. On reconnaît une identité remarquable :
$$\begin{aligned} z &= (1 + i)^2 \\ &= 1 + 2i + i^2 \\ &= 1 + 2i - 1 \end{aligned}$$
$$\boxed{z = 2i}$$
7. On reconnaît le produit d'une somme par sa différence :
$$\begin{aligned} z &= (3 + i\sqrt{5})(3 - i\sqrt{5}) \\ &= 3^2 - (i\sqrt{5})^2 \\ &= 9 - 5i^2 = 9 + 5 \end{aligned}$$
$$\boxed{z = 14}$$
8. On reconnaît de nouveau une identité remarquable :
$$\begin{aligned} z &= (2 - 5i)^2 \\ &= 4 - 20i + 25i^2 \\ &= 4 - 20i - 25 \end{aligned}$$
$$\boxed{z = -21 - 20i}$$

9. On développe en commençant par les deux premiers facteurs :

$$\begin{aligned} z &= (1+i)(2-3i)(4-i) \\ &= \big(2-3i+2i-3i^2\big)(4-i) \\ &= (5-i)(4-i) \\ &= 20-5i-4i+i^2 \\ &= 20-9i-1 \end{aligned}$$

$$\boxed{z = 19-9i}$$

10. On commence par développer le carré :

$$\begin{aligned} z &= (2i+1)^2(3-2i) \\ &= (1+4i+4i^2)(3-2i) \\ &= (-3+4i)(3-2i) \\ &= -9+6i+12i-8i^2 \\ &= -9+18i+8 \end{aligned}$$

$$\boxed{z = -1+18i}$$

11. On utilise le résultat de la question 6. :

$$\begin{aligned} z &= \big((1+i)^2+i\big)^2 \\ &= (2i+i)^2 \\ &= (3i)^2 = 9i^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{z = -9}$$

12. On procède de l'intérieur vers l'extérieur :

$$\begin{aligned} & i(i+1) = i^2+i = -1+i \\ \Rightarrow\ & i+(-1+i) = -1+2i \\ \Rightarrow\ & i(-1+2i) = -i+2i^2 = -2-i \\ \Rightarrow\ & i+(-2-i) = -2 \\ \Rightarrow\ & z = i\times(-2) = -2i \end{aligned}$$

$$\boxed{z = -2i}$$

EXERCICE 2 ⋆

1. On rappelle la formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$$

Ainsi, en posant $a = 1$ et $b = -i$:

$$\begin{aligned} (1-i)^4 &= \binom{4}{0} + \binom{4}{1}(-i) + \binom{4}{2}(-i)^2 + \binom{4}{3}(-i)^3 + \binom{4}{4}(-i)^4 \\ &= 1+4\times(-i)+6\times(-1)+4\times i+1 \\ &= 1-4i-6+4i+1 \end{aligned}$$

$$\boxed{(1-i)^4 = -4}$$

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. On développe de la même façon :

$$\begin{aligned} (a-i)^3 &= a^3+3a^2(-i)+3a(-i)^2+(-i)^3 \\ &= a^3-3a^2i-3a+i \\ &= \underbrace{(a^3-3a)}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{(1-3a^2)}_{\in\mathbb{R}} \end{aligned}$$

(a) Le nombre $(a-i)^3$ est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle, c'est-à-dire :

$$1-3a^2=0 \iff a^2=\frac{1}{3} \iff a=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{a\in\left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}\,;\,\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}}$$

(b) Le nombre $(a-i)^3$ est un imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle, c'est-à-dire :

$$a^3-3a=0 \iff a(a^2-3)=0$$

Un produit étant nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul, on en déduit donc que :

$$\boxed{a\in\left\{-\sqrt{3}\,;\,0\,;\,\sqrt{3}\right\}}$$

EXERCICE 3 ⋆

1. On a $i^3=i^2\times i=-i$, $i^4=(i^2)^2=1$, $i^5=i^4\times i=i$ et $i^6=i^4\times i^2=-1$. Les puissances de i se répètent donc de quatre en quatre. Si $n=4q+r$ avec $0\leqslant r\leqslant 3$, alors $i^n=(i^4)^q\times i^r=i^r$, d'où :

$$\boxed{i^n=1 \text{ si } r=0,\qquad i^n=i \text{ si } r=1,\qquad i^n=-1 \text{ si } r=2,\qquad i^n=-i \text{ si } r=3}$$

C'est une application directe de la division euclidienne du chapitre 1.

2. On a $2026=4\times 506+2$ et $2027=4\times 506+3$, donc $\boxed{i^{2026}=-1}$ et $\boxed{i^{2027}=-i}$.

3. La somme comporte 2027 termes. Quatre termes consécutifs ont une somme nulle, puisque $i^{4k}+i^{4k+1}+i^{4k+2}+i^{4k+3}=i^{4k}(1+i-1-i)=0$. Comme $2027=4\times 506+3$, il reste les trois derniers termes :

$$S=i^{2024}+i^{2025}+i^{2026}=1+i-1 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{S=i}$$

On peut aussi utiliser la conséquence de la Proposition 7 du cours, $(1-i)S=1-i^{2027}=1+i$, d'où $S=\dfrac{1+i}{1-i}=i$.

4. On a $(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$. Ainsi $(1+i)^{2026}=\left((1+i)^2\right)^{1013}=(2i)^{1013}=2^{1013}\,i^{1013}$, et comme $1013=4\times 253+1$, $i^{1013}=i$. On en déduit :

$$\boxed{(1+i)^{2026}=2^{1013}\,i}$$

Développer $(1+i)^{2026}$ par la formule du binôme serait ici une très mauvaise idée : l'astuce est de calculer d'abord le carré.

EXERCICE 4 ⋆

Dans tout l'exercice, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur, en utilisant le fait que pour tous réels x et y :

$$(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2$$

1. On constate que :

$$z=\frac{1}{1-i}=\frac{1\times(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+i}{1^2+1^2}=\frac{1+i}{2}$$

$$\boxed{z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}$$

2. On procède de la même manière :

$$z=\frac{1}{2-i\sqrt{3}}=\frac{2+i\sqrt{3}}{(2-i\sqrt{3})(2+i\sqrt{3})}=\frac{2+i\sqrt{3}}{4+3}=\frac{2+i\sqrt{3}}{7}$$

$$\boxed{z=\frac{2}{7}+\frac{\sqrt{3}}{7}i}$$

3. On écrit tout d'abord le dénominateur sous forme algébrique, $3i - 4 = -4 + 3i$, ce qui donne :

$$z = \frac{1}{-4+3i} = \frac{-4-3i}{(-4)^2+3^2} = \frac{-4-3i}{25}$$

$$\boxed{z = -\frac{4}{25} - \frac{3}{25}i}$$

4. On constate que :

$$z = \frac{i}{2+i} = \frac{i(2-i)}{2^2+1^2} = \frac{2i-i^2}{5} = \frac{1+2i}{5}$$

$$\boxed{z = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i}$$

5. On constate que :

$$\begin{aligned} z = \frac{4-6i}{3+2i} &= \frac{(4-6i)(3-2i)}{3^2+2^2} \\ &= \frac{12-8i-18i+12i^2}{13} \\ &= \frac{12-26i-12}{13} = \frac{-26i}{13} \end{aligned}$$

$$\boxed{z = -2i}$$

6. On procède de la même manière :

$$\begin{aligned} z = \frac{5+15i}{1+2i} &= \frac{(5+15i)(1-2i)}{1^2+2^2} \\ &= \frac{5-10i+15i-30i^2}{5} \\ &= \frac{35+5i}{5} \end{aligned}$$

$$\boxed{z = 7+i}$$

7. On constate que le conjugué du dénominateur est ici le numérateur lui-même :

$$\begin{aligned} z = \frac{1+2i}{1-2i} &= \frac{(1+2i)^2}{1^2+2^2} \\ &= \frac{1+4i+4i^2}{5} = \frac{-3+4i}{5} \end{aligned}$$

$$\boxed{z = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i}$$

8. On traite séparément les deux quotients :

$$\frac{3-6i}{3+i} = \frac{(3-6i)(3-i)}{3^2+1^2} = \frac{9-3i-18i+6i^2}{10} = \frac{3-21i}{10}$$

$$\frac{4}{3-i} = \frac{4(3+i)}{3^2+1^2} = \frac{12+4i}{10}$$

Ce qui nous donne en sommant :

$$z = \frac{3-21i}{10} + \frac{12+4i}{10} = \frac{15-17i}{10}$$

$$\boxed{z = \frac{3}{2} - \frac{17}{10}i}$$

9. On remarque tout d'abord que $4-6i = 2(2-3i)$, ce qui simplifie le premier quotient :

$$\frac{4-6i}{2-3i} = \frac{2(2-3i)}{2-3i} = 2$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} z = 2 \times \frac{1+3i}{3+2i} &= \frac{2(1+3i)(3-2i)}{3^2+2^2} \\ &= \frac{2(3-2i+9i-6i^2)}{13} \\ &= \frac{2(9+7i)}{13} = \frac{18+14i}{13} \end{aligned}$$

$$\boxed{z = \frac{18}{13} + \frac{14}{13}i}$$

EXERCICE 5 ⋆

Dans tout l'exercice, on utilise la Proposition 2 du cours : deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire. Cela n'est possible que parce que x et y sont *réels*.

1. On identifie parties réelles et parties imaginaires :

$$\begin{cases} 2x-1=5 \\ x+y=-3 \end{cases} \iff \begin{cases} x=3 \\ y=-6 \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{(x,y) = (3\ ;\ -6)}$$

2. On écrit le membre de gauche sous forme algébrique : $x(1+i)+y(2-3i) = (x+2y)+i(x-3y)$. Ainsi :

$$\begin{cases} x+2y=4 \\ x-3y=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} 5y=5 \\ x=4-2y \end{cases} \iff \begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{(x,y) = (2\ ;\ 1)}$$

3. On développe : $(x+2i)(1-3i) = x-3ix+2i-6i^2 = (x+6)+i(2-3x)$. Ce nombre est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle, c'est-à-dire $\boxed{x = \frac{2}{3}}$, et il est imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle, c'est-à-dire $\boxed{x=-6}$.

Conjugué et équations du premier degré

EXERCICE 6 ⋆

1. On isole z puis on multiplie par le conjugué :

$$\begin{aligned} (1+i)z = 3-i &\iff z = \frac{3-i}{1+i} \\ &\iff z = \frac{(3-i)(1-i)}{1^2+1^2} \\ &\iff z = \frac{3-3i-i+i^2}{2} = \frac{2-4i}{2} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{1-2i\}}$$

2. On regroupe les termes en z d'un côté de l'équation :

$$\begin{aligned} 2z+1-i = iz+2 &\iff 2z-iz = 2-1+i \\ &\iff z(2-i) = 1+i \\ &\iff z = \frac{(1+i)(2+i)}{2^2+1^2} \\ &\iff z = \frac{2+i+2i-1}{5} = \frac{1+3i}{5} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i\right\}}$$

3. Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul, ainsi :

$$2z+1-i=0 \iff z=\frac{-1+i}{2} \qquad \text{ou} \qquad iz+3=0 \iff z=\frac{-3}{i}=\frac{-3\times(-i)}{1}=3i$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\ ;\ 3i\right\}}$$

4. L'équation n'a de sens que si $z\neq 1$. Sous cette condition :

$$\begin{aligned}\frac{z+1}{z-1}=2i &\iff z+1=2i(z-1)\\ &\iff z-2iz=-1-2i\\ &\iff z(1-2i)=-1-2i\\ &\iff z=\frac{(-1-2i)(1+2i)}{1^2+2^2}\\ &\iff z=\frac{-1-2i-2i-4i^2}{5}=\frac{3-4i}{5}\end{aligned}$$

Cette valeur étant bien différente de 1, on en déduit que :

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right\}}$$

5. On annule de nouveau chacun des facteurs l'un après l'autre :

$$iz+1=0 \iff z=\frac{-1}{i}=i \qquad ; \qquad z+3i=0 \iff z=-3i$$

$$z-1+4i=0 \iff z=1-4i$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\mathcal{S}=\{i\ ;\ -3i\ ;\ 1-4i\}}$$

EXERCICE 7 ⋆⋆

On résout ces systèmes par combinaisons linéaires, exactement comme avec des inconnues réelles.

1. On additionne les deux équations :

$$\begin{cases}3z+z'=2-5i\\ z-z'=-2+i\end{cases} \implies 4z=(2-5i)+(-2+i)=-4i \implies z=-i$$

La deuxième équation donne alors $z'=z+2-i=-i+2-i$, d'où :

$$\boxed{(z,z')=(-i\ ;\ 2-2i)}$$

2. On soustrait la deuxième équation à la première :

$$\begin{cases}3z+z'=5+2i\\ -z+z'=1-2i\end{cases} \implies 4z=(5+2i)-(1-2i)=4+4i \implies z=1+i$$

La deuxième équation donne alors $z'=1-2i+z=1-2i+1+i$, d'où :

$$\boxed{(z,z')=(1+i\ ;\ 2-i)}$$

3. La première équation donne $z'=2i-2iz$, que l'on substitue dans la seconde :

$$\begin{aligned}3z-i(2i-2iz)=1 &\iff 3z-2i^2+2i^2z=1\\ &\iff 3z+2-2z=1\\ &\iff z=-1\end{aligned}$$

On en déduit ensuite que $z'=2i-2i\times(-1)=4i$, d'où :

$$\boxed{(z,z')=(-1\ ;\ 4i)}$$

4. On additionne les deux équations :

$$\begin{cases} z - z' = i \\ iz + z' = 1 \end{cases} \implies z + iz = i + 1 \implies z(1+i) = 1 + i \implies z = 1$$

La première équation donne alors $z' = z - i = 1 - i$, d'où :

$$\boxed{(z, z') = (1\ ;\ 1 - i)}$$

EXERCICE 8 ⋆

Méthode : une équation portant sur $\overline{z}$ se résout d'abord comme une équation d'inconnue $\overline{z}$. On conjugue ensuite le résultat pour revenir à z, en utilisant $\overline{\overline{z}} = z$.

1. On isole $\overline{z}$:

$$2\overline{z} = i - 1 \iff \overline{z} = \frac{-1+i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

On conjugue alors les deux membres :

$$z = \overline{\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right\}}$$

Piège : il ne faut pas s'arrêter à la valeur de $\overline{z}$, car c'est z que l'énoncé demande. Les deux nombres ont la même partie réelle, mais des parties imaginaires opposées.

2. Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. Le premier facteur porte sur z, le second sur $\overline{z}$: on les traite donc séparément.

Premier facteur :

$$2z + 1 - i = 0 \iff 2z = -1 + i \iff z = \frac{-1+i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Second facteur :

$$i\overline{z} + i - 2 = 0 \iff i\overline{z} = 2 - i \iff \overline{z} = \frac{2-i}{i}$$

Comme $\dfrac{1}{i} = -i$, on obtient $\overline{z} = (2-i) \times (-i) = -2i + i^2 = -1 - 2i$, puis en conjuguant :

$$z = \overline{(-1 - 2i)} = -1 + 2i$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\ ;\ -1 + 2i\right\}}$$

3. Comme $\overline{z} = -1 \iff z = -1$, l'équation n'a de sens que si $z \neq -1$. Sous cette condition :

$$\begin{aligned} \frac{\overline{z} - 1}{\overline{z} + 1} = i &\iff \overline{z} - 1 = i(\overline{z} + 1) \\ &\iff \overline{z} - i\overline{z} = 1 + i \\ &\iff \overline{z}(1 - i) = 1 + i \\ &\iff \overline{z} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{1^2 + 1^2} = \frac{2i}{2} = i \end{aligned}$$

On conjugue pour revenir à z : $z = \overline{i} = -i$. Cette valeur étant bien différente de -1, on en déduit que :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-i\}}$$

EXERCICE 9 ⋆

1. Soit $z = x + iy$ avec x et y réels. On a alors $\overline{z} = x - iy$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} Z &= z - 2\overline{z} + 2 \\ &= (x + iy) - 2(x - iy) + 2 \\ &= x + iy - 2x + 2iy + 2 \\ &= \underbrace{(2 - x)}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{(3y)}_{\in\mathbb{R}} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\mathcal{R}e(Z) = 2 - x \qquad \text{et} \qquad \mathcal{I}m(Z) = 3y}$$

Piège : le conjugué ne change que le signe de la partie imaginaire. Le terme $-2\overline{z}$ apporte donc $+2iy$, qui s'*ajoute* au iy venant de z : la partie imaginaire de Z vaut $3y$, et non $-y$.

2. Un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont toutes deux nulles. Ainsi :

$$Z = 0 \iff \begin{cases} 2 - x = 0 \\ 3y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{2\}}$$

3. On opère de façon similaire en posant $z = x + iy$ avec x et y réels :

$$\begin{aligned} \overline{z} = 2z - 2 + 6i &\iff x - iy = 2(x + iy) - 2 + 6i \\ &\iff x - iy = (2x - 2) + i(2y + 6) \end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et les parties imaginaires, on obtient alors :

$$\begin{cases} x = 2x - 2 \\ -y = 2y + 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ 3y = -6 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{2 - 2i\}}$$

EXERCICE 10 ⋆

On écrit $z = a + ib$ avec a et b réels.

1. **Vrai.** D'après la Proposition 4, $z + \overline{z} = 2a$ est réel.
2. **Vrai.** D'après la Proposition 4, $z - \overline{z} = 2ib$ est imaginaire pur.
3. **Vrai.** D'après la Proposition 4, $z\overline{z} = a^2 + b^2$, somme de deux carrés de réels.
4. **Faux.** Pour $z = i$, on a $z^2 = -1$, qui est réel, alors que i n'est pas réel. L'exercice 30 détermine tous les complexes dont le carré est réel.
5. **Faux.** D'après la Proposition 5, $\overline{iz} = \overline{i} \times \overline{z} = -i\overline{z}$. Par exemple, pour $z = 1$, on a $\overline{i} = -i \neq i$.
6. **Vrai.** Si $z\overline{z} = a^2 + b^2 = 0$, alors $a^2 = b^2 = 0$ puisque ce sont deux nombres positifs, donc $a = b = 0$ et $z = 0$.

EXERCICE 11 ⋆⋆

1. On multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur $x+i(y+1)$, qui est $x-i(y+1)$:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\big((x-2)+iy\big)\big(x-i(y+1)\big)}{x^2+(y+1)^2} \\ &= \frac{x(x-2)+y(y+1)+i\big(xy-(x-2)(y+1)\big)}{x^2+(y+1)^2} \\ &= \frac{x^2+y^2-2x+y}{x^2+(y+1)^2} + i\,\frac{-x+2y+2}{x^2+(y+1)^2} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\mathcal{R}e(Z) = \frac{x^2+y^2-2x+y}{x^2+(y+1)^2} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{I}m(Z) = \frac{-x+2y+2}{x^2+(y+1)^2}}$$

Le dénominateur est non nul puisque $z \neq -i$, c'est-à-dire $(x,y) \neq (0,-1)$.

2. Le nombre Z est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle :

$$\boxed{Z \in \mathbb{R} \iff x-2y-2=0 \text{ et } z \neq -i}$$

Le nombre Z est imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle :

$$\boxed{Z \text{ imaginaire pur} \iff x^2+y^2-2x+y=0 \text{ et } z \neq -i}$$

On remarque que le couple $(0,-1)$ vérifie les deux équations : il faut donc bien penser à l'exclure. Au chapitre consacré aux applications géométriques, on interprétera ces deux ensembles comme une droite et un cercle privés d'un point.

3. Pour $z \neq -i$:

$$Z = i \iff z-2 = i(z+i) \iff z-2 = iz-1 \iff z(1-i)=1 \iff z = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2}$$

Ainsi $\boxed{z = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}$. Avec $x=y=\frac{1}{2}$, on a bien $x^2+y^2-2x+y = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}-1+\frac{1}{2} = 0$: Z est imaginaire pur, ce qui est cohérent avec $Z=i$.

Équations du second degré et équations polynomiales

EXERCICE 12 ⋆

On applique la méthode du discriminant, en utilisant le fait que si $\Delta < 0$, l'équation $az^2+bz+c=0$ admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

1. Pour $2z^2-6z+5=0$, le discriminant vaut :

$$\Delta = (-6)^2 - 4\times 2\times 5 = 36-40 = -4$$

Comme $\Delta < 0$, on a $\sqrt{-\Delta} = 2$ et les deux solutions sont :

$$z = \frac{6 \pm 2i}{4} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}i$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i\,;\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right\}}$$

2. Pour $z^2-5z+9=0$:

$$\Delta = 25-36 = -11 < 0$$

Les deux solutions sont donc :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{5-i\sqrt{11}}{2}\,;\ \frac{5+i\sqrt{11}}{2}\right\}}$$

3. Pour $z^2-2z+3=0$:

$$\Delta = 4-12 = -8 < 0 \qquad \text{et} \qquad \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Les deux solutions sont donc $z = \dfrac{2 \pm 2i\sqrt{2}}{2}$, autrement dit :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{1-i\sqrt{2}\,;\ 1+i\sqrt{2}\right\}}$$

4. On commence par écrire l'équation sous forme canonique, $z^2 = z+1 \iff z^2 - z - 1 = 0$, ce qui donne :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$$

Le discriminant étant strictement positif, les deux solutions sont réelles :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \; ; \; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}}$$

5. Pour $4z^2 + 3z + 2 = 0$:

$$\Delta = 9 - 32 = -23 < 0$$

Les deux solutions sont donc :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{-3-i\sqrt{23}}{8} \; ; \; \frac{-3+i\sqrt{23}}{8} \right\}}$$

6. Pour $z^2 - 2(1+\sqrt{2})z + 2(\sqrt{2}+2) = 0$, on calcule soigneusement le discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= \big(-2(1+\sqrt{2})\big)^2 - 4 \times 1 \times 2(\sqrt{2}+2) \\ &= 4(1 + 2\sqrt{2} + 2) - 8\sqrt{2} - 16 \\ &= 12 + 8\sqrt{2} - 8\sqrt{2} - 16 \\ &= -4 \end{aligned}$$

Comme $\Delta < 0$, on a $\sqrt{-\Delta} = 2$ et les deux solutions sont :

$$z = \frac{2(1+\sqrt{2}) \pm 2i}{2} = (1+\sqrt{2}) \pm i$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ 1 + \sqrt{2} - i \; ; \; 1 + \sqrt{2} + i \right\}}$$

EXERCICE 13 ⋆

1. On remplace z par $1+2i$, en utilisant $(1+2i)^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i$:

$$(1+2i)^2 + b(1+2i) + c = 0 \iff (-3 + b + c) + i(4 + 2b) = 0$$

Comme b et c sont réels, on identifie les parties réelle et imaginaire : $4 + 2b = 0$ et $-3 + b + c = 0$, d'où $\boxed{b = -2 \text{ et } c = 5}$. L'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$ est à coefficients réels, de discriminant $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$: ses deux solutions sont conjuguées, et l'autre solution est donc $\boxed{1 - 2i}$.

2. Si $3 - i$ est solution d'une équation du second degré à coefficients réels de discriminant négatif, l'autre solution est $3 + i$. On cherche donc le trinôme $(z - (3-i))(z - (3+i))$, de somme des racines 6 et de produit $(3-i)(3+i) = 10$ (exercice 14) :

$$\boxed{z^2 - 6z + 10 = 0}$$

Toute équation $a(z^2 - 6z + 10) = 0$ avec a réel non nul convient également.

EXERCICE 14 ⋆⋆

On reconnaît ici la somme et le produit des racines d'un polynôme du second degré. En effet, si z_1 et z_2 vérifient $z_1 + z_2 = S$ et $z_1 z_2 = P$, alors ce sont les deux solutions de l'équation :

$$Z^2 - SZ + P = 0$$

En effet, $(Z - z_1)(Z - z_2) = Z^2 - (z_1 + z_2)Z + z_1 z_2$. Ici $S = 2$ et $P = 5$, on résout donc :

$$Z^2 - 2Z + 5 = 0$$

Le discriminant vaut :

$$\Delta = 4 - 20 = -16 < 0 \qquad \text{et} \qquad \sqrt{16} = 4$$

Les deux solutions sont donc $Z = \dfrac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$. On en déduit donc que :

$$\boxed{(z_1, z_2) = (1 + 2i \ ; \ 1 - 2i) \quad \text{ou} \quad (z_1, z_2) = (1 - 2i \ ; \ 1 + 2i)}$$

EXERCICE 15 ⋆⋆

1. Le discriminant de (E_m) vaut $\Delta = m^2 - 16 = (m-4)(m+4)$. D'après la Proposition 6, l'équation admet deux solutions complexes non réelles si et seulement si $\Delta < 0$, c'est-à-dire :

$$\boxed{m \in]-4 \ ; \ 4[}$$

2. Dans ce cas, $-\Delta = 16 - m^2 > 0$ et les solutions sont :

$$\boxed{z_1 = \frac{-m - i\sqrt{16 - m^2}}{2} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-m + i\sqrt{16 - m^2}}{2}}$$

Ces deux nombres sont conjugués, donc leur produit vaut, d'après la Proposition 4 :

$$z_1 z_2 = \left(\frac{-m}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{16 - m^2}}{2}\right)^2 = \frac{m^2 + 16 - m^2}{4} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{z_1 z_2 = 4}$$

Le produit ne dépend pas de m : c'est le coefficient constant de l'équation, comme dans l'exercice 14.

3. On a $(1 + i\sqrt{3})^2 = 1 + 2i\sqrt{3} - 3 = -2 + 2i\sqrt{3}$. Ainsi :

$$(1 + i\sqrt{3})^2 + m(1 + i\sqrt{3}) + 4 = 0 \iff (2 + m) + i\sqrt{3}\,(2 + m) = 0$$

d'où $\boxed{m = -2}$. *Vérification :* $z^2 - 2z + 4 = 0$ a pour discriminant -12, et pour solutions $\dfrac{2 \pm 2i\sqrt{3}}{2} = 1 \pm i\sqrt{3}$.

EXERCICE 16 ⋆

1. On reconnaît une équation bicarrée : on pose $Z = z^2$, ce qui donne :

$$Z^2 + 3Z + 2 = 0$$

Le discriminant vaut $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$, ce qui donne les deux solutions :

$$Z_1 = \frac{-3 - 1}{2} = -2 \qquad \text{et} \qquad Z_2 = \frac{-3 + 1}{2} = -1$$

Il reste à revenir à z :

$$z^2 = -1 \iff z = \pm i \qquad \text{et} \qquad z^2 = -2 \iff z = \pm i\sqrt{2}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-i \ ; \ i \ ; \ -i\sqrt{2} \ ; \ i\sqrt{2}\right\}}$$

2. On procède de la même manière en posant $Z = z^2$:

$$Z^2 - 32Z - 144 = 0$$

Le discriminant vaut $\Delta = 1024 + 576 = 1600 > 0$, et $\sqrt{1600} = 40$, ce qui donne :

$$Z_1 = \frac{32 - 40}{2} = -4 \qquad \text{et} \qquad Z_2 = \frac{32 + 40}{2} = 36$$

Il reste à revenir à z :

$$z^2 = 36 \iff z = \pm 6 \qquad \text{et} \qquad z^2 = -4 \iff z = \pm 2i$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-6 \ ; \ 6 \ ; \ -2i \ ; \ 2i\}}$$

EXERCICE 17 ⋆

1. On note $P(z) = z^3 + 3z^2 + z + 3$ et on évalue ce polynôme en -3 :

$$\begin{aligned} P(-3) &= (-3)^3 + 3 \times (-3)^2 + (-3) + 3 \\ &= -27 + 27 - 3 + 3 = 0 \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $\boxed{-3 \text{ est bien une solution de l'équation}}$.

2. Puisque -3 est racine de P, on peut factoriser $P(z)$ par $(z+3)$. On cherche donc trois réels a, b et c tels que :

$$z^3 + 3z^2 + z + 3 = (z+3)(az^2 + bz + c)$$

En développant le membre de droite, on obtient $az^3 + (b+3a)z^2 + (c+3b)z + 3c$, et par identification :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + 3a = 3 \\ c + 3b = 1 \\ 3c = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$$

On obtient donc la factorisation :

$$z^3 + 3z^2 + z + 3 = (z+3)(z^2+1)$$

Un produit étant nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul :

$$z + 3 = 0 \iff z = -3 \qquad \text{ou} \qquad z^2 + 1 = 0 \iff z^2 = -1 \iff z = \pm i$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-3\ ;\ -i\ ;\ i\}}$$

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. On note $P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 7$ et on teste les petites valeurs entières :

$$P(1) = 1 - 6 + 12 - 7 = 0$$

Ainsi 1 est une solution évidente, et on peut factoriser $P(z)$ par $(z-1)$:

$$z^3 - 6z^2 + 12z - 7 = (z-1)(az^2 + bz + c)$$

En développant, on obtient $az^3 + (b-a)z^2 + (c-b)z - c$, et par identification :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = -6 \\ c - b = 12 \\ -c = -7 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 7 \end{cases}$$

Il reste alors à résoudre $z^2 - 5z + 7 = 0$, dont le discriminant vaut :

$$\Delta = 25 - 28 = -3 < 0$$

Les solutions de cette équation sont donc $\dfrac{5 \pm i\sqrt{3}}{2}$, ce qui donne enfin :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{1\ ;\ \frac{5 - i\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{5 + i\sqrt{3}}{2}\right\}}$$

2. On note $P(z) = z^3 + z^2 + z + 1$ et on constate que :

$$P(-1) = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$$

Ainsi -1 est une solution évidente. On peut ici factoriser directement par regroupement :

$$z^3 + z^2 + z + 1 = z^2(z+1) + (z+1) = (z+1)(z^2+1)$$

Un produit étant nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul :

$$z + 1 = 0 \iff z = -1 \qquad \text{ou} \qquad z^2 = -1 \iff z = \pm i$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-1\ ;\ -i\ ;\ i\}}$$

EXERCICE 19 ⋆⋆

1. On a $(1+i)^2 = 2i$, puis $(1+i)^3 = 2i(1+i) = -2+2i$ et $(1+i)^4 = (2i)^2 = -4$. Ainsi :

$$\begin{aligned} P(1+i) &= -4 - 2(-2+2i) + 3\times 2i - 2(1+i) + 2 \\ &= -4 + 4 - 4i + 6i - 2 - 2i + 2 = 0 \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{1+i \text{ est une racine de } P}$.

2. Les coefficients de P sont réels, donc égaux à leurs conjugués. D'après la Proposition 5 (conjugué d'une somme, d'un produit et d'une puissance) :

$$\overline{P(z)} = \overline{z}^4 - 2\overline{z}^3 + 3\overline{z}^2 - 2\overline{z} + 2 = P(\overline{z})$$

   Ainsi $P(1-i) = P\big(\overline{1+i}\big) = \overline{P(1+i)} = \overline{0} = 0$: $\boxed{1-i \text{ est aussi une racine de } P}$. Ce raisonnement est généralisé dans l'exercice 32.

3. On reconnaît $(z-1-i)(z-1+i) = (z-1)^2 - i^2 = z^2 - 2z + 2$. On cherche $Q(z) = az^2+bz+c$ tel que $P(z) = (z^2-2z+2)(az^2+bz+c)$. En développant :

$$(z^2-2z+2)(az^2+bz+c) = az^4 + (b-2a)z^3 + (c-2b+2a)z^2 + (2b-2c)z + 2c$$

   et par identification :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b-2a = -2 \\ c-2b+2a = 3 \\ 2b-2c = -2 \\ 2c = 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{array}\right. \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P(z) = (z^2-2z+2)(z^2+1)}$$

4. Un produit étant nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : $z^2-2z+2 = 0$ donne $z = 1 \pm i$, et $z^2+1 = 0$ donne $z = \pm i$. Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{1+i\ ;\ 1-i\ ;\ i\ ;\ -i\}}$$

EXERCICE 20 ⋆⋆

1. On factorise en reconnaissant $z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$. En effet :

$$(z-1)(z^2+z+1) = z^3 + z^2 + z - z^2 - z - 1 = z^3 - 1$$

   On aurait également pu vérifier que 1 était solution, et factoriser par identification comme dans l'exercice 18. Un produit étant nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul, on résout donc $z^2+z+1 = 0$, dont le discriminant vaut :

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$$

   Les solutions de cette équation sont donc $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, ce qui donne enfin :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{1\ ;\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\ ;\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}}$$

2. On pose $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   (a) On calcule tout d'abord j^2 :

$$\begin{aligned} j^2 &= \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} - 2\times\frac{1}{2}\times i\frac{\sqrt{3}}{2} + i^2\frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

On en déduit ensuite :

$$j^3 = j \times j^2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$

$$\boxed{j^3 = 1}$$

Ce qui était attendu puisque j est, d'après la question 1., une solution de $z^3 - 1 = 0$. Enfin, la division euclidienne de 2024 par 3 donne $2024 = 3 \times 674 + 2$, ainsi :

$$j^{2024} = j^{3\times 674+2} = \left(j^3\right)^{674} \times j^2 = 1^{674} \times j^2$$

$$\boxed{j^{2024} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(b) La somme $S = 1 + j + j^2 + j^3 + \cdots + j^{2024}$ comporte 2025 termes. Or j est solution de $z^2 + z + 1 = 0$ d'après la question 1., c'est-à-dire :

$$1 + j + j^2 = 0$$

De plus, comme $j^3 = 1$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$j^{3k} + j^{3k+1} + j^{3k+2} = j^{3k}\left(1 + j + j^2\right) = 0$$

Comme $2025 = 3 \times 675$, on peut regrouper les 2025 termes de la somme en exactement 675 paquets de trois termes consécutifs, tous nuls. On en déduit donc que :

$$\boxed{S = 0}$$

Exercices d'approfondissement

EXERCICE 21 ⋆⋆⋆

Soit f la fonction qui à tout complexe z associe $f(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261$.

1. Soit b un réel quelconque. On utilise les puissances successives de i, à savoir $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ et $i^4 = 1$:

$$\begin{aligned} f(ib) &= (ib)^4 - 10(ib)^3 + 38(ib)^2 - 90(ib) + 261 \\ &= i^4b^4 - 10i^3b^3 + 38i^2b^2 - 90ib + 261 \\ &= b^4 + 10ib^3 - 38b^2 - 90ib + 261 \\ &= \underbrace{\left(b^4 - 38b^2 + 261\right)}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{\left(10b^3 - 90b\right)}_{\in\mathbb{R}} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\mathcal{R}e\big(f(ib)\big) = b^4 - 38b^2 + 261 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{I}m\big(f(ib)\big) = 10b^3 - 90b}$$

2. Un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont toutes deux nulles. On commence par la partie imaginaire, plus simple à factoriser :

$$10b^3 - 90b = 0 \iff 10b(b^2 - 9) = 0 \iff b \in \{-3\ ;\ 0\ ;\ 3\}$$

Il reste à vérifier lesquelles de ces valeurs annulent également la partie réelle :

$$\begin{aligned} b = 0 &\ :\ 0 - 0 + 261 = 261 \neq 0 \\ b = \pm 3 &\ :\ 81 - 38 \times 9 + 261 = 81 - 342 + 261 = 0 \end{aligned}$$

On en déduit donc que l'équation $f(z) = 0$ admet exactement deux solutions imaginaires pures :

$$\boxed{z = -3i \qquad \text{et} \qquad z = 3i}$$

3. Puisque $3i$ et $-3i$ sont racines de f, le polynôme $f(z)$ est divisible par :

$$(z-3i)(z+3i) = z^2 - (3i)^2 = z^2 + 9$$

On cherche donc trois réels a, b et c tels que :

$$f(z) = (z^2+9)(az^2+bz+c)$$

En développant le membre de droite, on obtient $az^4 + bz^3 + (c+9a)z^2 + 9bz + 9c$, et par identification :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -10 \\ c + 9a = 38 \\ 9b = -90 \\ 9c = 261 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -10 \\ c = 29 \end{cases}$$

On obtient ainsi la factorisation :

$$\boxed{f(z) = (z^2+9)(z^2-10z+29)}$$

Il reste enfin à résoudre $z^2 - 10z + 29 = 0$, dont le discriminant vaut :

$$\Delta = 100 - 116 = -16 < 0 \qquad \text{et} \qquad \sqrt{16} = 4$$

Les solutions de cette équation sont donc $\dfrac{10 \pm 4i}{2} = 5 \pm 2i$, ce qui donne enfin :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-3i\ ;\ 3i\ ;\ 5-2i\ ;\ 5+2i\}}$$

EXERCICE 22 ⋆⋆⋆

1. Les racines 4-ièmes de l'unité sont les solutions de l'équation $z^4 = 1$. On factorise :

$$\begin{aligned} z^4 = 1 &\iff z^4 - 1 = 0 \\ &\iff (z^2-1)(z^2+1) = 0 \\ &\iff (z-1)(z+1)(z-i)(z+i) = 0 \end{aligned}$$

Un produit étant nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul, on en déduit donc que :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{1\ ;\ -1\ ;\ i\ ;\ -i\}}$$

2. On développe en deux étapes :

$$(1-2i)^2 = 1 - 4i + 4i^2 = -3 - 4i$$

Puis :

$$\begin{aligned} (1-2i)^4 = \left((1-2i)^2\right)^2 &= (-3-4i)^2 \\ &= 9 + 24i + 16i^2 \\ &= 9 + 24i - 16 \end{aligned}$$

$$\boxed{(1-2i)^4 = -7 + 24i}$$

3. D'après la question précédente, l'équation étudiée s'écrit :

$$z^4 = -7 + 24i \iff z^4 = (1-2i)^4$$

Le nombre $1 - 2i$ étant non nul, on peut poser $Z = \dfrac{z}{1-2i}$, ce qui donne :

$$z^4 = (1-2i)^4 \iff \left(\frac{z}{1-2i}\right)^4 = 1 \iff Z^4 = 1$$

On est ainsi ramené à la question 1. : le nombre Z est une racine 4-ième de l'unité, autrement dit $Z \in \{1\ ;\ -1\ ;\ i\ ;\ -i\}$, et donc $z = Z \times (1-2i)$ avec :

$$\begin{aligned} 1 \times (1-2i) &= 1-2i \\ -1 \times (1-2i) &= -1+2i \\ i \times (1-2i) &= i-2i^2 = 2+i \\ -i \times (1-2i) &= -i+2i^2 = -2-i \end{aligned}$$

On en déduit enfin que :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{1-2i\ ;\ -1+2i\ ;\ 2+i\ ;\ -2-i\}}$$

EXERCICE 23 ⋆⋆⋆

1. On a $z^2 = (x+iy)^2 = (x^2-y^2)+2ixy$. D'après la Proposition 2, $z^2 = 3+4i$ si et seulement si :

$$\boxed{x^2-y^2 = 3 \qquad \text{et} \qquad 2xy = 4}$$

2. La seconde équation impose $x \neq 0$ et $y = \dfrac{2}{x}$. En reportant dans la première :

$$x^2 - \frac{4}{x^2} = 3 \iff x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

Ainsi $t = x^2$ est solution de $t^2-3t-4=0$, équation bicarrée comme dans l'exercice 16. Ses solutions sont $t=-1$ et $t=4$; comme $t=x^2$ est un réel positif, $x^2=4$, d'où $x=2$ et $y=1$, ou $x=-2$ et $y=-1$. Les racines carrées de $3+4i$ sont donc :

$$\boxed{2+i \qquad \text{et} \qquad -2-i}$$

Vérification : $(2+i)^2 = 4+4i-1 = 3+4i$.

3. On procède de la même manière.
   - Pour $-5+12i$: $x^2-y^2=-5$ et $xy=6$, d'où $x^4+5x^2-36=0$, puis $x^2=4$ (l'autre solution -9 est négative). Les racines carrées sont $\boxed{\pm(2+3i)}$, et en effet $(2+3i)^2 = 4+12i-9 = -5+12i$.
   - Pour $8-6i$: $x^2-y^2=8$ et $xy=-3$, d'où $x^4-8x^2-9=0$, puis $x^2=9$. Comme $xy<0$, les racines carrées sont $\boxed{\pm(3-i)}$, et en effet $(3-i)^2 = 9-6i-1 = 8-6i$.
   - Pour i : $x^2-y^2=0$ et $2xy=1$. La première équation donne $y=\pm x$, et la seconde impose $xy>0$, donc $y=x$ et $2x^2=1$. Les racines carrées sont $\boxed{\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}$.

4. Soit $z=x+iy$. Comme à la question 1, $z^2 = a+ib$ si et seulement si $x^2-y^2=a$ et $2xy=b$. Comme $b\neq 0$, la seconde équation impose $x\neq 0$ et $y=\dfrac{b}{2x}$, et la première devient, avec $t=x^2$:

$$t^2 - at - \frac{b^2}{4} = 0$$

Le produit des racines de cette équation vaut $-\dfrac{b^2}{4} < 0$: elle admet donc deux racines réelles de signes contraires, et seule la racine positive $t_0 = \dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ peut être égale à x^2. On obtient $x=\sqrt{t_0}$ ou $x=-\sqrt{t_0}$, et $y=\dfrac{b}{2x}$ est alors déterminé. Il y a donc exactement deux racines carrées, et elles sont opposées puisque changer x en $-x$ change y en $-y$.

Lorsque $b=0$, le nombre a est réel : ses racines carrées sont $\pm\sqrt{a}$ si $a>0$, et $\pm i\sqrt{-a}$ si $a<0$, ce qui est le cas utilisé dans la Proposition 6 du cours.

EXERCICE 24 ⋆⋆⋆

1. On développe le membre de droite, en utilisant $\delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac$:

$$a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\delta^2}{4a^2}\right] = a\left[z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$
$$= a\left[z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right] = az^2 + bz + c$$

C'est exactement la mise sous forme canonique vue en Première ; elle reste valable avec des coefficients complexes, puisque les règles de calcul sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$.

2. Comme $a \neq 0$, et en factorisant la différence de deux carrés :

$$az^2+bz+c=0 \iff \left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right)=0 \iff z=\frac{-b+\delta}{2a} \text{ ou } z=\frac{-b-\delta}{2a}$$

On calcule ensuite $z_1+z_2 = \dfrac{-2b}{2a} = -\dfrac{b}{a}$ et

$$z_1 z_2 = \frac{(-b-\delta)(-b+\delta)}{4a^2} = \frac{b^2-\delta^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Lorsque a, b, c sont réels et $\Delta < 0$, on peut prendre $\delta = i\sqrt{-\Delta}$ et l'on retrouve la Proposition 6 du cours.

3. Ici $a = 1$, $b = -(3+i)$ et $c = 4+3i$:

$$\Delta = (3+i)^2 - 4(4+3i) = 9+6i-1-16-12i = -8-6i$$

On cherche une racine carrée $\delta = x+iy$ de $-8-6i$, comme dans l'exercice 23 : $x^2-y^2=-8$ et $xy=-3$, d'où $x^4+8x^2-9=0$, puis $x^2=1$. On peut prendre $\delta = 1-3i$; en effet $(1-3i)^2 = 1-6i-9 = -8-6i$. Ainsi :

$$z_1 = \frac{3+i-(1-3i)}{2} = 1+2i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{3+i+(1-3i)}{2} = 2-i$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{1+2i\ ;\ 2-i\}}$$

Vérification : $z_1+z_2 = 3+i$ et $z_1 z_2 = (1+2i)(2-i) = 2-i+4i+2 = 4+3i$. Les deux solutions ne sont pas conjuguées : cette propriété n'est valable que pour les équations à coefficients réels.

EXERCICE 25 ⋆⋆⋆

1. Pour $z = 0$, le membre de gauche vaut $1 \neq 0$. Pour $z \neq 0$, on divise par z^2 :

$$(E) \iff z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0 \iff \left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)+1=0$$

Or $w^2 = z^2+2+\dfrac{1}{z^2}$, donc $z^2+\dfrac{1}{z^2} = w^2-2$, et (E) équivaut à $w^2-2+w+1=0$, c'est-à-dire $\boxed{w^2+w-1=0}$.

2. Le discriminant vaut $\Delta = 1+4 = 5 > 0$, d'où $\boxed{w_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } w_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}}$.

3. Il reste à résoudre $z+\dfrac{1}{z} = w$, c'est-à-dire $z^2 - wz + 1 = 0$, pour $w = w_1$ et $w = w_2$. Le discriminant vaut w^2-4.

— Pour w_1 : $w_1^2 = \dfrac{6-2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, donc $w_1^2 - 4 = -\dfrac{5+\sqrt{5}}{2} < 0$, et les solutions sont :

$$\frac{w_1 \pm i\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1 \pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

— Pour w_2 : $w_2^2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, donc $w_2^2 - 4 = -\dfrac{5-\sqrt{5}}{2} < 0$, et les solutions sont :

$$\frac{-1-\sqrt{5} \pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{\sqrt{5}-1 \pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \ ; \ \frac{-1-\sqrt{5} \pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \right\}}$$

4. D'après la Proposition 7 du cours, $z^5 - 1 = (z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)$. Les solutions de $z^5 = 1$ sont donc 1 et les quatre solutions de (E).

L'astuce de la question 1 s'applique à toute équation dont les coefficients sont « symétriques », appelée équation réciproque. Lorsque nous aurons vu la forme trigonométrique, nous reconnaîtrons dans $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ la valeur de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

EXERCICE 26 ⋆⋆⋆

1. D'après la formule du binôme, $(1+i)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k$. D'après l'exercice 3, i^k vaut 1, i, -1, $-i$ selon que k s'écrit $4q$, $4q+1$, $4q+2$ ou $4q+3$. Les termes d'indice pair sont réels, de signes alternés ($i^{2p} = (-1)^p$), et ceux d'indice impair sont imaginaires purs ($i^{2p+1} = (-1)^p i$). En regroupant :

$$\boxed{(1+i)^n = A_n + iB_n}$$

2. On a $(1+i)^4 = \big((1+i)^2\big)^2 = (2i)^2 = -4$. Ainsi $\boxed{(1+i)^{4m} = (-4)^m}$ et $\boxed{(1+i)^{4m+1} = (-4)^m(1+i)}$.

3. Par identification des parties réelles et imaginaires (les sommes A_n et B_n sont des entiers) :

$$\boxed{A_{4m} = (-4)^m, \quad B_{4m} = 0, \quad A_{4m+1} = B_{4m+1} = (-4)^m}$$

4. Pour $m = 2$, on attend $A_8 = 16$ et $B_8 = 0$. Directement :

$$A_8 = 1 - 28 + 70 - 28 + 1 = 16 \qquad \text{et} \qquad B_8 = 8 - 56 + 56 - 8 = 0$$

ce qui confirme le résultat.

On obtient sans effort des identités entre coefficients binomiaux qui seraient difficiles à démontrer directement : c'est un premier exemple de l'utilité des complexes pour établir des résultats portant sur des nombres réels.

EXERCICE 27 ⋆⋆⋆

1. Par la formule du binôme :

$$(2+i)^3 = 8 + 3\times 4\times i + 3\times 2\times i^2 + i^3 = 8 + 12i - 6 - i \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{(2+i)^3 = 2 + 11i}$$

En conjuguant (Proposition 5), $(2-i)^3 = \overline{(2+i)^3} = \boxed{2 - 11i}$.

2. Par la formule du binôme, $s^3 = (u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$, d'où $\boxed{s^3 = u^3 + v^3 + 3uv\, s}$.

3. On a $u^3 + v^3 = 2 + 11i + 2 - 11i = 4$ et $uv = (2+i)(2-i) = 4 + 1 = 5$. D'après la question 2 :

$$s^3 = 4 + 15s$$

donc s est solution de $x^3 = 15x + 4$, et $\boxed{s = (2+i) + (2-i) = 4}$.

Les nombres $2+i$ et $2-i$ jouent le rôle des « racines cubiques » de $2+11i$ et $2-11i$ dans la formule de Cardan : en passant par les complexes, Bombelli retrouve la solution réelle 4. C'est exactement ce que décrit l'introduction historique du cours. Les deux autres solutions de l'équation, elles aussi réelles, sont déterminées dans l'exercice 32.

EXERCICE 28 ⋆⋆⋆

1. Si $z=0$, alors $z\overline{z}=0\neq 1$, donc $z\neq 0$. En divisant $z\overline{z}=1$ par z, on obtient $\boxed{\overline{z}=\dfrac{1}{z}}$.

2. D'après la Proposition 5, puis la question 1 :
$$\overline{Z}=\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1}=\frac{\frac{1}{z}-1}{\frac{1}{z}+1}=\frac{1-z}{1+z}=-\frac{z-1}{z+1}=-Z$$
en multipliant numérateur et dénominateur par $z\neq 0$. Ainsi $\boxed{\overline{Z}=-Z}$, et d'après la Proposition 4, $\boxed{Z \text{ est imaginaire pur}}$.

3. Pour $z=\dfrac{3+4i}{5}$, on a $z\overline{z}=\dfrac{9+16}{25}=1$. Puis :
$$Z=\frac{\frac{3+4i}{5}-1}{\frac{3+4i}{5}+1}=\frac{-2+4i}{8+4i}=\frac{-1+2i}{4+2i}=\frac{(-1+2i)(4-2i)}{16+4}=\frac{10i}{20}=\frac{i}{2}$$
qui est bien imaginaire pur.

4. On a $\overline{z}=\dfrac{1-iy}{1+iy}$ d'après la Proposition 5, puisque y est réel. Donc :
$$z\overline{z}=\frac{1+iy}{1-iy}\times\frac{1-iy}{1+iy}=1$$
On remarque que, si $Z=iy$, alors $z=\dfrac{1+Z}{1-Z}$ et $Z=\dfrac{z-1}{z+1}$: les questions 2 et 4 sont deux sens d'une même équivalence.

POUR ALLER PLUS LOIN

EXERCICE 29 ⋆⋆

On commence par écrire z sous forme algébrique :
$$z=\frac{-4(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}=\frac{-4+4i\sqrt{3}}{1+3}=-1+i\sqrt{3}$$
Puis $z^2=1-2i\sqrt{3}+3i^2=-2-2i\sqrt{3}$, et :
$$z^3=z\times z^2=(-1+i\sqrt{3})(-2-2i\sqrt{3})=2+2i\sqrt{3}-2i\sqrt{3}-6i^2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{z^3=8}$$
Ainsi z est une solution non réelle de $z^3=8$, tout comme j était une solution non réelle de $z^3=1$ dans l'exercice 20 ; on a d'ailleurs $z=2j$.

EXERCICE 30 ⋆⋆

Soit $z=x+iy$ avec x et y réels. On a $z^2=(x^2-y^2)+2ixy$.

a) Le nombre z^2 est réel si et seulement si $xy=0$, c'est-à-dire $x=0$ ou $y=0$:
$$\boxed{z^2\in\mathbb{R} \iff z \text{ est réel ou imaginaire pur}}$$

b) Le nombre z^2 est imaginaire pur si et seulement si $x^2-y^2=(x-y)(x+y)=0$:
$$\boxed{z^2 \text{ imaginaire pur} \iff y=x \text{ ou } y=-x}$$
c'est-à-dire $z=x(1+i)$ ou $z=x(1-i)$ avec x réel.

EXERCICE 31 ⋆⋆⋆

Soit $z = x + iy$ non nul, avec x et y réels. On a $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$, donc :

$$Z = x\left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2}\right) + iy\left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2}\right)$$

— Le nombre Z est réel si et seulement si $y = 0$ ou $x^2 + y^2 = 1$. Ainsi $\boxed{Z \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}^* \text{ ou } z\overline{z} = 1}$.

— Comme $1 + \dfrac{1}{x^2 + y^2} > 0$, le nombre Z est imaginaire pur si et seulement si $x = 0$:

$$\boxed{Z \text{ imaginaire pur} \iff z \text{ est un imaginaire pur non nul}}$$

On peut aussi raisonner sans forme algébrique : Z est réel si et seulement si $Z = \overline{Z}$, c'est-à-dire $z - \overline{z} = \dfrac{z - \overline{z}}{z\overline{z}}$, soit $(z - \overline{z})(z\overline{z} - 1) = 0$. On retrouve le même ensemble dans l'exercice 35.

EXERCICE 32 ⋆⋆

1. Écrivons $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec des a_k réels, donc égaux à leurs conjugués. D'après la Proposition 5 :

$$P(\overline{z}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z}^k = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z^k} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} = \overline{P(z)} = \overline{0} = 0$$

Ainsi $\boxed{\overline{z} \text{ est racine de } P}$. C'est le raisonnement de l'exercice 19 dans le cas général.

2. a) On a $4^3 - 15 \times 4 - 4 = 64 - 60 - 4 = 0$. On factorise par $(x - 4)$ comme dans le cours : $x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x^2 + 4x + 1)$. Le trinôme $x^2 + 4x + 1$ a pour discriminant $12 > 0$ et pour racines $-2 \pm \sqrt{3}$. Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{4\ ;\ -2 - \sqrt{3}\ ;\ -2 + \sqrt{3}\}}$$

Les trois solutions de l'équation de Bombelli (exercice 27) sont réelles, et pourtant la formule de Cardan passe par les complexes : c'est ce paradoxe qui a imposé les nombres complexes aux mathématiciens.

b) On a $1 - 6 + 11 - 6 = 0$, donc 1 est racine évidente, et $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$. Le trinôme a pour racines 2 et 3, d'où :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}}$$

EXERCICE 33 ⋆⋆

1. On applique la méthode de l'exercice 23.

— Les racines carrées de $3 + 4i$ sont $\boxed{\pm(2 + i)}$ (exercice 23).

— Pour $3 - 3i$: $x^2 - y^2 = 3$ et $xy = -\frac{3}{2}$, d'où $x^4 - 3x^2 - \frac{9}{4} = 0$. La solution positive est $x^2 = \dfrac{3 + 3\sqrt{2}}{2}$, puis $y^2 = x^2 - 3 = \dfrac{3\sqrt{2} - 3}{2}$. Comme $xy < 0$:

$$\boxed{\pm\left(\sqrt{\frac{3 + 3\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{3\sqrt{2} - 3}{2}}\right)}$$

— Pour $5 - 2i$: $x^2 - y^2 = 5$ et $xy = -1$, d'où $x^4 - 5x^2 - 1 = 0$, puis $x^2 = \dfrac{5 + \sqrt{29}}{2}$ et $y^2 = \dfrac{\sqrt{29} - 5}{2}$. Comme $xy < 0$:

$$\boxed{\pm\left(\sqrt{\frac{5 + \sqrt{29}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{29} - 5}{2}}\right)}$$

Vérification numérique : $\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{29}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{29}-5}{2}}\right)^2 \approx (2{,}2787 - 0{,}4388i)^2 \approx 5{,}000 - 2{,}000i$.

2. On applique la méthode de l'exercice 24.
   — Pour $z^2 - 2iz + i = 0$: $\Delta = (2i)^2 - 4i = -4 - 4i$. Une racine carrée $\delta = x + iy$ vérifie $x^2 - y^2 = -4$ et $xy = -2$, d'où $x^2 = -2 + 2\sqrt{2}$ et $y^2 = 2 + 2\sqrt{2}$, avec $xy < 0$. Après simplification ($\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2} - 2} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$) :
   $$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\sqrt{\tfrac{\sqrt{2}-1}{2}} + i\left(1 - \sqrt{\tfrac{\sqrt{2}+1}{2}}\right) \;;\; -\sqrt{\tfrac{\sqrt{2}-1}{2}} + i\left(1 + \sqrt{\tfrac{\sqrt{2}+1}{2}}\right)\right\}}$$
   soit environ $0{,}455 - 0{,}099i$ et $-0{,}455 + 2{,}099i$. On vérifie que leur somme vaut bien $2i$.
   — Pour $z^2 + iz - 1 = 0$: $\Delta = i^2 + 4 = 3$, qui est réel positif, et $\delta = \sqrt{3}$. Ainsi :
   $$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{-\sqrt{3} - i}{2} \;;\; \frac{\sqrt{3} - i}{2}\right\}}$$
   — Pour $(1 + 2i)z^2 + 3iz - (4 + i) = 0$: $\Delta = (3i)^2 + 4(1 + 2i)(4 + i) = -9 + 4(2 + 9i) = -1 + 36i$. Une racine carrée $\delta = x + iy$ vérifie $x^2 - y^2 = -1$ et $xy = 18$, d'où $x^2 = \dfrac{\sqrt{1297} - 1}{2}$ et $y^2 = \dfrac{\sqrt{1297} + 1}{2}$, avec $xy > 0$. On obtient :
   $$\boxed{z = \frac{(-3i \pm \delta)(1 - 2i)}{10} \qquad \text{avec} \qquad \delta = \sqrt{\tfrac{\sqrt{1297}-1}{2}} + i\sqrt{\tfrac{\sqrt{1297}+1}{2}}}$$
   soit environ $0{,}679 - 0{,}707i$ et $-1{,}879 + 0{,}107i$. Les valeurs ne sont pas « jolies » : l'intérêt de l'exercice est de constater que la méthode fonctionne toujours.

EXERCICE 34 ⋆⋆⋆

On pose $Z = z^4$: l'équation devient $Z^2 - Z + 1 = 0$, de discriminant -3, d'où $Z = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Il reste à résoudre $z^4 = Z$, en extrayant deux fois une racine carrée (exercice 23).

— Les racines carrées de $\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ sont $\pm\dfrac{\sqrt{3} + i}{2}$, et celles de $\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ sont $\pm\dfrac{\sqrt{3} - i}{2}$: on le vérifie en élevant au carré, $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2 = \frac{3+2i\sqrt{3}-1}{4} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

— On cherche les racines carrées $x + iy$ de $\dfrac{\sqrt{3} + i}{2}$: $x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $xy = \frac{1}{4}$, d'où $x^4 - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{1}{16} = 0$, puis $x^2 = \dfrac{2 + \sqrt{3}}{4}$ et $y^2 = \dfrac{2 - \sqrt{3}}{4}$. On remarque que $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{8+2\sqrt{12}}{16} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$. En posant
$$a = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},$$
les racines carrées de $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ sont $\pm(a + ib)$. De même, celles de $\frac{\sqrt{3}-i}{2}$ sont $\pm(a - ib)$, celles de $-\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ sont $\pm(b - ia)$ et celles de $-\frac{\sqrt{3}-i}{2}$ sont $\pm(b + ia)$.

L'équation admet donc huit solutions :
$$\boxed{\mathcal{S} = \{\pm(a + ib) \;;\; \pm(a - ib) \;;\; \pm(b + ia) \;;\; \pm(b - ia)\}}$$

Le poly classe cet exercice en difficulté 2 car il s'appuie sur la forme trigonométrique ; par la seule voie algébrique, il est nettement plus long, d'où les trois étoiles. On reconnaîtra plus tard $a = \cos\frac{\pi}{12}$ et $b = \sin\frac{\pi}{12}$.

EXERCICE 35 ⋆⋆⋆

Le discriminant de E_λ vaut $\Delta = 4\lambda^2 - 4 = 4(\lambda^2 - 1)$.

— Si $-1 < \lambda < 1$, alors $\Delta < 0$ et les racines sont $z = \lambda \pm i\sqrt{1 - \lambda^2}$. En écrivant $z = x + iy$, on a $x = \lambda$ et $y^2 = 1 - \lambda^2$, donc $x^2 + y^2 = 1$ avec $y \neq 0$. Réciproquement, tout complexe $z = x + iy$ tel que $x^2 + y^2 = 1$ et $y \neq 0$ est obtenu pour $\lambda = x$. On obtient ainsi tous les complexes non réels tels que $z\overline{z} = 1$.

— Si $\lambda = \pm 1$, la racine double est λ, donc 1 ou -1.

— Si $|\lambda| > 1$, les deux racines sont réelles, de produit 1 et de somme 2λ : ce sont deux réels r et $\frac{1}{r}$, avec $\lambda = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$. Réciproquement, pour tout réel r non nul, $\lambda = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$ convient, et r est racine de E_λ.

Finalement, l'ensemble des racines est :

$$\boxed{\mathbb{R}^* \cup \{z \in \mathbb{C}\ ;\ z\overline{z} = 1\}}$$

C'est exactement l'ensemble trouvé dans l'exercice 31, ce qui n'est pas un hasard : pour $z \neq 0$, z est racine de E_λ si et seulement si $z + \frac{1}{z} = 2\lambda$. Le chapitre de géométrie permettra de reconnaître dans $\{z\ ;\ z\overline{z} = 1\}$ le cercle de centre O et de rayon 1.

EXERCICE 36 ⋆⋆⋆

On a $4^3 - 6 \times 4 - 40 = 64 - 24 - 40 = 0$: 4 est racine évidente. Par identification, $z^3 - 6z - 40 = (z-4)(z^2+4z+10)$, et le trinôme a pour discriminant $16 - 40 = -24 < 0$, d'où les racines $\frac{-4 \pm 2i\sqrt{6}}{2}$:

$$\boxed{\mathcal{S} = \{4\ ;\ -2 - i\sqrt{6}\ ;\ -2 + i\sqrt{6}\}}$$

Notons $u = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}}$ et $v = \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$ les racines cubiques réelles de ces deux nombres, c'est-à-dire les uniques réels dont les cubes valent $20 + 14\sqrt{2}$ et $20 - 14\sqrt{2}$. On a :

$$u^3 + v^3 = 40 \qquad \text{et} \qquad (uv)^3 = (20 + 14\sqrt{2})(20 - 14\sqrt{2}) = 400 - 392 = 8, \text{ donc } uv = 2.$$

Comme dans l'exercice 27, $s = u + v$ vérifie $s^3 = u^3 + v^3 + 3uv\,s = 40 + 6s$, donc s est solution de $z^3 - 6z - 40 = 0$. Or s est réel, et la seule solution réelle de cette équation est 4 : ainsi $\boxed{\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4}$.

Vérification : $(2 + \sqrt{2})^3 = 8 + 12\sqrt{2} + 12 + 2\sqrt{2} = 20 + 14\sqrt{2}$, donc $u = 2 + \sqrt{2}$, $v = 2 - \sqrt{2}$, et $u + v = 4$.

EXERCICE 37 ⋆⋆⋆⋆

a) On a $f(0) = f(0+0) = 2f(0)$, donc $f(0) = 0$. Par récurrence, $f(n+1) = f(n) + f(1) = f(n) + 1$, donc $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puis $f(n) + f(-n) = f(0) = 0$, donc $f(-n) = -n$. Pour $q \in \mathbb{Z}^*$, $f(q)\,f\left(\frac{1}{q}\right) = f(1) = 1$, donc $f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q}$. Enfin, pour $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$, $f\left(\frac{p}{q}\right) = f(p)\,f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{p}{q}$. Ainsi $\boxed{f(x) = x \text{ pour tout } x \in \mathbb{Q}}$.

b) Par additivité, $f(y) = f(x) + f(y-x)$. Or $y - x = (\sqrt{y-x})^2$, donc $f(y-x) = f(\sqrt{y-x})^2 \geqslant 0$. Ainsi $\boxed{f(y) - f(x) \geqslant 0}$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons $f(x) < x$. Entre deux réels distincts, il existe toujours un rationnel (par exemple une valeur approchée décimale suffisamment précise) : soit $r \in \mathbb{Q}$ tel que $f(x) < r < x$. Comme f est croissante et $r < x$, on a $r = f(r) \leqslant f(x)$, ce qui contredit $f(x) < r$. On exclut de même $f(x) > x$. Ainsi $\boxed{f(x) = x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}}$.

d) Comme en a), $g(0) = 0$ et $g(-1) = -g(1) = -1$. Ainsi $g(i)^2 = g(i^2) = g(-1) = -1$, et les seuls complexes de carré -1 sont i et $-i$ (si $z^2 = -1$, alors $(z-i)(z+i) = z^2 + 1 = 0$). Donc $\boxed{g(i) \in \{-i\ ;\ i\}}$.

e) Si $g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, la restriction de g à $\mathbb{R}$ vérifie les hypothèses des questions a) à c), donc $g(x) = x$ pour tout réel x. Pour $z = a + ib$ avec a et b réels : $g(z) = g(a) + g(i)\,g(b) = a + g(i)\,b$. Si $g(i) = i$, alors $g(z) = z$; si $g(i) = -i$, alors $g(z) = \overline{z}$. Ainsi $\boxed{g \text{ est l'identité ou la conjugaison}}$.

La conjugaison est donc, avec l'identité, la seule application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui respecte l'addition et la multiplication et laisse fixes les réels : c'est ce qui explique qu'elle intervienne partout, et en particulier qu'elle échange les racines des polynômes à coefficients réels (exercice 32).