EXERCICES – CHAPITRE 2

NOMBRES COMPLEXES

Forme algébrique et calculs dans $\mathbb{C}$

EXERCICE 1 ⋆

Donner l'expression algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z = 3 + 2i - 1 + 3i$
2. $z = 6 + i - (2 + 4i)$
3. $z = 12 - 3i - 4 + 8i - 5$
4. $z = (1 + 2i)(4 + 3i)$
5. $z = (3 - i)(2 + 7i)$
6. $z = (1 + i)^2$
7. $z = (3 + i\sqrt{5})(3 - i\sqrt{5})$
8. $z = (2 - 5i)^2$
9. $z = (1 + i)(2 - 3i)(4 - i)$
10. $z = (2i + 1)^2(3 - 2i)$
11. $z = ((1 + i)^2 + i)^2$
12. $z = i(i + i(i + i(i + 1)))$

EXERCICE 2 ⋆

1. Développer $(1 - i)^4$ à l'aide du binôme de Newton.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de a le nombre $(a - i)^3$ est-il :
   (a) Un nombre réel ?
   (b) Un imaginaire pur ?

EXERCICE 3 ⋆

1. Calculer i^3, i^4, i^5 et i^6. En déduire la valeur de i^n selon le reste de la division euclidienne de l'entier naturel n par 4.
2. Calculer i^{2026} et i^{2027}.
3. Calculer la somme $S = 1 + i + i^2 + \cdots + i^{2026}$.
4. Calculer $(1 + i)^2$, puis en déduire l'expression algébrique de $(1 + i)^{2026}$.

EXERCICE 4 ⋆

En utilisant la multiplication par le conjugué, donner l'expression algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z = \dfrac{1}{1 - i}$
2. $z = \dfrac{1}{2 - i\sqrt{3}}$
3. $z = \dfrac{1}{3i - 4}$
4. $z = \dfrac{i}{2 + i}$
5. $z = \dfrac{4 - 6i}{3 + 2i}$
6. $z = \dfrac{5 + 15i}{1 + 2i}$
7. $z = \dfrac{1 + 2i}{1 - 2i}$
8. $z = \dfrac{3 - 6i}{3 + i} + \dfrac{4}{3 - i}$
9. $z = \dfrac{4 - 6i}{2 - 3i} \times \dfrac{1 + 3i}{3 + 2i}$

EXERCICE 5 ⋆

1. Déterminer les réels x et y tels que $(2x - 1) + i(x + y) = 5 - 3i$.
2. Déterminer les réels x et y tels que $x(1 + i) + y(2 - 3i) = 4 - i$.
3. Déterminer le réel x tel que $(x + 2i)(1 - 3i)$ soit un nombre réel, puis le réel x tel que ce nombre soit un imaginaire pur.

Conjugué et équations du premier degré

EXERCICE 6 ⋆

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$, et donner leur solution sous forme algébrique :

1. $(1+i)z = 3-i$
2. $2z+1-i = iz+2$
3. $(2z+1-i)(iz+3) = 0$
4. $\dfrac{z+1}{z-1} = 2i$
5. $(iz+1)(z+3i)(z-1+4i) = 0$

EXERCICE 7 ⋆⋆

Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{C}^2$:

1. $\begin{cases} 3z+z' = 2-5i \\ z-z' = -2+i \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3z+z' = 5+2i \\ -z+z' = 1-2i \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2iz+z' = 2i \\ 3z-iz' = 1 \end{cases}$
4. $\begin{cases} z-z' = i \\ iz+z' = 1 \end{cases}$

EXERCICE 8 ⋆

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$ en donnant l'expression algébrique de z :

1. $2\overline{z} = i-1$
2. $(2z+1-i)(i\overline{z}+i-2) = 0$
3. $\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1} = i$

EXERCICE 9 ⋆

Soit $z = x+iy$ avec x et y deux réels. On note Z le nombre :

$$Z = z - 2\overline{z} + 2$$

1. Exprimer en fonction de x et y la partie réelle et la partie imaginaire de Z.
2. En déduire les solutions de l'équation $Z = 0$ d'inconnue z.
3. Opérer de façon similaire pour résoudre l'équation suivante :

$$\overline{z} = 2z - 2 + 6i$$

EXERCICE 10 ⋆

Soit z un nombre complexe. Dire si chacune des affirmations suivantes est **Vraie** ou **Fausse**, en justifiant par une démonstration ou un contre-exemple.

1. $z+\overline{z}$ est un nombre réel.
2. $z-\overline{z}$ est un imaginaire pur.
3. $z\overline{z}$ est un réel positif.
4. Si z^2 est réel, alors z est réel.
5. $\overline{iz} = i\overline{z}$.
6. Si $z\overline{z} = 0$, alors $z = 0$.

EXERCICE 11 ⋆⋆

Pour tout nombre complexe $z \neq -i$, on pose $Z = \dfrac{z-2}{z+i}$, et on écrit $z = x+iy$ avec x et y réels.

1. Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et de y.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur x et y pour que Z soit un nombre réel, puis pour que Z soit un imaginaire pur.
3. Résoudre l'équation $Z = i$, et vérifier la cohérence du résultat avec la question précédente.

Équations du second degré et équations polynomiales

EXERCICE 12 ⋆

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $2z^2 - 6z + 5 = 0$
2. $z^2 - 5z + 9 = 0$
3. $z^2 - 2z + 3 = 0$
4. $z^2 = z + 1$
5. $4z^2 + 3z + 2 = 0$
6. $z^2 - 2(1+\sqrt{2})z + 2(\sqrt{2}+2) = 0$

EXERCICE 13 ⋆

1. Déterminer les réels b et c tels que $1 + 2i$ soit solution de l'équation $z^2 + bz + c = 0$. Quelle est alors l'autre solution ?
2. Déterminer une équation du second degré à coefficients réels admettant $3 - i$ pour solution.

EXERCICE 14 ⋆⋆

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système suivant :

$$\begin{cases} z_1 z_2 = 5 \\ z_1 + z_2 = 2 \end{cases}$$

EXERCICE 15 ⋆⋆

Pour tout réel m, on considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(E_m) \ : \ z^2 + mz + 4 = 0$$

1. Pour quelles valeurs de m l'équation (E_m) admet-elle deux solutions complexes non réelles ?
2. Dans ce cas, exprimer ces solutions en fonction de m, puis calculer leur produit.
3. Déterminer la valeur de m pour laquelle $1 + i\sqrt{3}$ est solution de (E_m).

EXERCICE 16 ⋆

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^4 + 3z^2 + 2 = 0$
2. $z^4 - 32z^2 - 144 = 0$

EXERCICE 17 ⋆

On considère l'équation suivante :

$$z^3 + 3z^2 + z + 3 = 0$$

1. Montrer que -3 est une solution de l'équation.
2. Résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$.

EXERCICE 18 ⋆⋆

Pour chacune des équations suivantes, déterminer une solution évidente et résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $z^3 - 6z^2 + 12z - 7 = 0$
2. $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

EXERCICE 19 ⋆⋆

On considère la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2$$

1. Calculer $(1+i)^2$, $(1+i)^3$ et $(1+i)^4$, puis vérifier que $P(1+i) = 0$.
2. Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$. En déduire, sans calcul, une autre racine de P.
3. Développer $(z-1-i)(z-1+i)$, puis déterminer une fonction polynôme Q de degré 2 telle que $P(z) = (z^2 - 2z + 2)\,Q(z)$.
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

EXERCICE 20 ⋆⋆

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - 1 = 0$.
2. On désigne par j le nombre complexe $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   (a) Calculer j^2, j^3 et j^{2024}.
   (b) Calculer $S = 1 + j + j^2 + j^3 + ... + j^{2024}$.

Exercices d'approfondissement

EXERCICE 21 ⋆⋆⋆

Soit f la fonction qui à tout complexe z associe :

$$f(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261$$

1. Soit b un nombre réel quelconque. Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de $f(ib)$ en fonction de b.
2. En déduire qu'il existe deux solutions imaginaires pures à l'équation $f(z) = 0$.
3. Factoriser $f(z)$ à l'aide de la réponse précédente, puis en déduire toutes les solutions de $f(z) = 0$.

EXERCICE 22 ⋆⋆⋆

1. Déterminer les racines quatrièmes de l'unité.
2. Développer $(1-2i)^4$.
3. En déduire toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$$z^4 = -7 + 24i$$

EXERCICE 23 : RACINES CARRÉES D'UN NOMBRE COMPLEXE ⋆⋆⋆

On appelle *racine carrée* d'un nombre complexe Z tout nombre complexe z tel que $z^2 = Z$. On n'utilisera jamais la notation $\sqrt{Z}$ lorsque Z n'est pas un réel positif.

1. Soient x et y deux réels et $z = x + iy$. Montrer que $z^2 = 3 + 4i$ si et seulement si $x^2 - y^2 = 3$ et $2xy = 4$.
2. En exprimant y en fonction de x, montrer que x^2 est solution de l'équation $t^2 - 3t - 4 = 0$. En déduire les racines carrées de $3 + 4i$.
3. Déterminer de même les racines carrées de $-5 + 12i$, de $8 - 6i$, puis de i.
4. Soient a et b deux réels avec $b \neq 0$. Montrer que $a + ib$ admet exactement deux racines carrées, et qu'elles sont opposées.

EXERCICE 24 : ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ À COEFFICIENTS COMPLEXES ⋆⋆⋆

Soient a, b et c trois nombres complexes avec $a \neq 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$, et on note δ une racine carrée de Δ (qui existe d'après l'exercice 23).

1. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:
$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right]$$
2. En déduire que les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ sont $z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$, puis que $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (3+i)z + 4 + 3i = 0$.

EXERCICE 25 : UNE ÉQUATION RÉCIPROQUE ⋆⋆⋆

On considère l'équation $(E) : z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. Vérifier que 0 n'est pas solution de (E). En divisant par z^2 et en posant $w = z + \dfrac{1}{z}$, montrer que (E) équivaut à $w^2 + w - 1 = 0$.
2. Résoudre l'équation $w^2 + w - 1 = 0$.
3. En déduire les quatre solutions de (E).
4. À l'aide de la Proposition 7 du cours, en déduire toutes les solutions de l'équation $z^5 = 1$.

EXERCICE 26 : BINÔME DE NEWTON ET COEFFICIENTS BINOMIAUX ⋆⋆⋆

Pour tout entier naturel n, on note A_n et B_n les sommes :
$$A_n = \binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \cdots \qquad \text{et} \qquad B_n = \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \cdots$$
où les sommes s'arrêtent lorsque l'indice du bas dépasse n.

1. À l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que $(1+i)^n = A_n + iB_n$.
2. Calculer $(1+i)^4$, puis en déduire $(1+i)^{4m}$ et $(1+i)^{4m+1}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.
3. En déduire les valeurs de A_{4m}, B_{4m}, A_{4m+1} et B_{4m+1}.
4. Vérifier le résultat en calculant directement A_8 et B_8.

EXERCICE 27 : L'ÉQUATION DE BOMBELLI ⋆⋆⋆

En 1572, Bombelli étudie l'équation $x^3 = 15x + 4$, dont 4 est une solution évidente. La formule de Cardan lui fournit pourtant l'expression déroutante $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, où $\sqrt{-121}$ désigne $11i$. Le but de l'exercice est de donner un sens à ce calcul.

1. Vérifier que $(2+i)^3 = 2 + 11i$ et $(2-i)^3 = 2 - 11i$.
2. Soient u et v deux nombres complexes et $s = u + v$. Montrer que $s^3 = u^3 + v^3 + 3uv\,s$.
3. On pose $u = 2 + i$ et $v = 2 - i$. Calculer $u^3 + v^3$ et uv, puis montrer que $s = u + v$ est solution de l'équation $x^3 = 15x + 4$. Que vaut s ?

EXERCICE 28 ⋆⋆⋆

Soit z un nombre complexe tel que $z\overline{z} = 1$ et $z \neq -1$. On pose $Z = \dfrac{z-1}{z+1}$.

1. Montrer que $z \neq 0$ et que $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$.
2. Exprimer $\overline{Z}$ en fonction de z, puis montrer que $\overline{Z} = -Z$. En déduire que Z est un imaginaire pur.
3. Vérifier ce résultat pour $z = \dfrac{3+4i}{5}$.
4. Réciproquement, soit y un réel. Montrer que le nombre $z = \dfrac{1+iy}{1-iy}$ vérifie $z\overline{z} = 1$.

Pour aller plus loin

EXERCICE 29 ⋆⋆

Soit $z = \dfrac{-4}{1+i\sqrt{3}}$. Calculer z^3.

EXERCICE 30 ⋆⋆

a) Quels sont les nombres complexes dont le carré est un nombre réel ?

b) Quels sont les nombres complexes dont le carré est un nombre imaginaire pur ?

EXERCICE 31 ⋆⋆⋆

Trouver les nombres complexes non nuls z tels que $Z = z + \dfrac{1}{z}$ soit réel. Idem en remplaçant « réel » par « imaginaire pur ».

EXERCICE 32 ⋆⋆

1. Soient P une fonction polynomiale à coefficients réels, z dans $\mathbb{C}$ une racine de P. Montrer que $\overline{z}$ est racine de P.
2. a) Vérifier que 4 est racine de l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$ puis résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$.

   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante, après en avoir déterminé une « racine évidente » : $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

EXERCICE 33 ⋆⋆

1. Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de $3+4i$, $3-3i$, $5-2i$ dans $\mathbb{C}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

$$z^2 - 2iz + i = 0, \qquad z^2 + iz - 1 = 0, \qquad (1+2i)z^2 + 3iz - (4+i) = 0.$$

EXERCICE 34 ⋆⋆⋆

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^8 - z^4 + 1 = 0$.

EXERCICE 35 ⋆⋆⋆

Pour λ dans $\mathbb{R}$, soit E_λ l'équation d'inconnue complexe z :

$$z^2 - 2\lambda z + 1 = 0.$$

Décrire l'ensemble des racines des équations E_λ lorsque λ parcourt $\mathbb{R}$.

EXERCICE 36 ⋆⋆⋆

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - 6z - 40 = 0$. En déduire que

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4.$$

EXERCICE 37 : CARACTÉRISATION DE LA CONJUGAISON ⋆⋆⋆⋆

Dans les questions a), b), c), f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(1) = 1$ et que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x + y) = f(x) + f(y), \qquad f(xy) = f(x)\, f(y).$$

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = x$.

b) Soient x et y deux nombres réels tels que $y \geqslant x$. En utilisant le nombre réel $\sqrt{y - x}$, montrer que $f(y) - f(x) \geqslant 0$. Ainsi, f est croissante.

c) Déduire de a) et b) que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

Dans les questions suivantes, g est une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $g(1) = 1$ et que

$$\forall (u, v) \in \mathbb{C}^2, \qquad g(u + v) = g(u) + g(v), \qquad g(uv) = g(u)\, g(v).$$

d) Montrer que $g(i) \in \{-i, i\}$.

e) On suppose que $g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Montrer que g est l'identité de $\mathbb{C}$ ou la conjugaison complexe.