CORRIGÉ – CHAPITRE 3

MATRICES

Opérations sur les matrices

EXERCICE 1 ⋆

*On rappelle que l'addition et la multiplication par un réel se font coefficient par coefficient, tandis que le coefficient d'indice $(i\,;j)$ du produit MN s'obtient en multipliant la i-ième **ligne** de M par la j-ième **colonne** de N.*

a) $\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&5\\2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+4&2+5\\1+2&3-3\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}5&7\\3&0\end{pmatrix}}$

b) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&2\\-1&\frac{1}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&\frac{1}{5}\\\frac{1}{4}&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+1&2+\frac{1}{5}\\-1+\frac{1}{4}&\frac{1}{3}+2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&\frac{11}{5}\\-\frac{3}{4}&\frac{7}{3}\end{pmatrix}}$

c) $\begin{pmatrix}1&4\\2&-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&-6\\8&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-(-1)&4-(-6)\\2-8&-3-3\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}2&10\\-6&-6\end{pmatrix}}$

Piège classique : le signe $-$ porte sur **chacun** des quatre coefficients de la seconde matrice ; deux d'entre eux étant déjà négatifs, la soustraction les rend positifs.

d) $\begin{pmatrix}\frac{3}{7}&\frac{4}{3}\\\frac{5}{2}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{6}{4}&4\\-1&\frac{3}{8}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{7}-\frac{3}{2}&\frac{4}{3}-4\\\frac{5}{2}+1&-\frac{1}{4}-\frac{3}{8}\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-\frac{15}{14}&-\frac{8}{3}\\\frac{7}{2}&-\frac{5}{8}\end{pmatrix}}$

en ayant simplifié $\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$, puis réduit au même dénominateur : $\dfrac{3}{7}-\dfrac{3}{2}=\dfrac{6-21}{14}=-\dfrac{15}{14}$.

e) $2\begin{pmatrix}1&-2\\4&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&-4\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-4\\8&10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&-4\\2&0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-1&0\\6&10\end{pmatrix}}$

f) $-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-2\\4&5\end{pmatrix}+\dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}3&-4\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&1\\-2&-\frac{5}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-\frac{8}{3}\\\frac{4}{3}&0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&-\frac{5}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{5}{2}\end{pmatrix}}$

g) $\begin{pmatrix}1&-1&4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}=\big(1\times2+(-1)\times3+4\times5\big)=\boxed{\big(19\big)}$

On remarque que le produit d'une matrice 1×3 par une matrice 3×1 est une matrice 1×1, et non un réel — même si on l'identifie souvent à 19.

h) $\begin{pmatrix}1&-2&-1\\3&4&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-3\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times2+(-2)\times(-3)+(-1)\times(-5)\\3\times2+4\times(-3)+0\times(-5)\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}13\\-6\end{pmatrix}}$

i) $\begin{pmatrix}-2&3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&4\\-5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\times1+3\times(-5)&-2\times4+3\times2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-17&-2\end{pmatrix}}$

j) $\begin{pmatrix}3&-2\\4&3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1&5\\9&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3-18&15+12\\-4+27&20-18\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-21&27\\23&2\end{pmatrix}}$

k) $\begin{pmatrix}1&-3&4\\2&0&5\\3&4&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&3&-4\\5&2&0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}15&-1&11\\27&10&-2\\21&16&-19\end{pmatrix}}$

Détail du premier coefficient (ligne 1 par colonne 1) : $1\times 1+(-3)\times 2+4\times 5=1-6+20=15$, et l'on procède de la même manière pour les huit autres.

l) $\begin{pmatrix}-2 & 5 & 8\\ 4 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2 & 2 & -3\\ 3 & 4 & -4\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}3 & 32 & 10\\ 11 & 2 & -21\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}}$

On remarque que la troisième ligne de la première matrice est $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$: elle recopie donc telle quelle la troisième ligne de la seconde matrice, ce qui évite trois calculs.

EXERCICE 2 ⋆

On commence par calculer A^2 en fonction de x :

$$A^2=\begin{pmatrix}x & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\times x+1\times 2 & x\times 1+1\times 3\\ 2\times x+3\times 2 & 2\times 1+3\times 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2+2 & x+3\\ 2x+6 & 11\end{pmatrix}$$

Deux matrices sont égales si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux. L'égalité $A^2=\begin{pmatrix}6 & 1\\ 2 & 11\end{pmatrix}$ équivaut donc au système :

$$\begin{cases}x^2+2=6\\ x+3=1\\ 2x+6=2\\ 11=11\end{cases}\iff\begin{cases}x^2=4\\ x=-2\\ x=-2\end{cases}$$

La première équation admet *deux* solutions, $x=2$ et $x=-2$, mais les deux suivantes imposent $x=-2$. Seule cette valeur convient aux **quatre** conditions simultanément :

$$\boxed{x=-2}$$

Vérification : avec $x=-2$, on obtient $A^2=\begin{pmatrix}4+2 & -2+3\\ -4+6 & 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 1\\ 2 & 11\end{pmatrix}$, ce qui est bien la matrice attendue.

Piège classique : il ne suffit pas de résoudre la première équation. Une égalité de matrices est un **système** de quatre équations, et une valeur ne convient que si elle les vérifie toutes.

EXERCICE 3 ⋆

1. A est de dimension 2×3, B de dimension 3×2 et C de dimension 2×2.
2. Une somme n'a de sens qu'entre matrices de même dimension, et un produit MN n'a de sens que si le nombre de colonnes de M est égal au nombre de lignes de N ; le résultat a alors le nombre de lignes de M et le nombre de colonnes de N.
   - $A+B$ n'a pas de sens (2×3 et 3×2).
   - AB a un sens : $(2\times 3)\times(3\times 2)$ donne une matrice 2×2.
   - BA a un sens : $(3\times 2)\times(2\times 3)$ donne une matrice 3×3.
   - AC n'a pas de sens : A a 3 colonnes et C a 2 lignes.
   - CA a un sens : $(2\times 2)\times(2\times 3)$ donne une matrice 2×3.
   - BC a un sens : $(3\times 2)\times(2\times 2)$ donne une matrice 3×2.
   - CB n'a pas de sens : C a 2 colonnes et B a 3 lignes.
   - $AB+C$ a un sens, puisque AB et C sont toutes deux de dimension 2×2.

3. On obtient :

$$AB = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}}, \qquad BA = \boxed{\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -1 & -4 \\ 10 & 1 & 12 \end{pmatrix}},$$

$$CA = \boxed{\begin{pmatrix} 7 & 0 & 8 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}, \qquad AB + C = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 14 \end{pmatrix}}.$$

Détail du premier coefficient de AB : $1 \times 2 + (-2) \times 0 + 0 \times 1 = 2$.

Les produits AB et BA n'ont même pas la même dimension : l'ordre des facteurs compte, comme le soulignera l'exercice 5.

EXERCICE 4 ⋆

1. On isole X comme dans une équation réelle, les opérations utilisées (somme, multiplication par un réel) ayant les propriétés de la Proposition 1 :

$$3X - A = 2B \iff X = \frac{1}{3}(A + 2B) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2 & 2-2 \\ -1+4 & 3+0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

d'où $\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

2. Deux matrices sont égales si et seulement si leurs coefficients sont égaux un à un :

$$\begin{cases} x = 2 \\ 2y = z \\ x + y = z - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ z = 2y \\ 2 + y = 2y - 1 \end{cases} \iff \boxed{x = 2,\ y = 3,\ z = 6}$$

3. On calcule $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2+1 & 2a \\ 2a & a^2+1 \end{pmatrix}$. L'égalité impose $2a = 4$ et $a^2 + 1 = 5$; la première donne $a = 2$, qui vérifie bien la seconde. Ainsi $\boxed{a = 2}$. La valeur $a = -2$ vérifie $a^2 + 1 = 5$ mais pas $2a = 4$: comme dans l'exercice 2, toutes les équations doivent être satisfaites.

EXERCICE 5 ⋆

1. On commence par $A + B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, d'où :

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+0 & 0+0 \\ 3+2 & 0+4 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}}$$

Calculons ensuite les quatre produits utiles :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 9+2 & -3+0 \\ -6+0 & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \qquad B^2 = \begin{pmatrix} 0+3 & 0+2 \\ 0+6 & 3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0-3 & 3-2 \\ 0+0 & -2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 0-2 & 0+0 \\ 9-4 & -3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

On constate déjà que $\boxed{AB \neq BA}$. On en déduit :

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}}$$

$$A^2+AB+BA+B^2=\begin{pmatrix}11&-3\\-6&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&1\\0&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&0\\5&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&2\\6&7\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}9&0\\5&4\end{pmatrix}}$$

2. On observe que $(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$, mais que $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$.

   En effet, en développant sans jamais échanger l'ordre des facteurs :

   $$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$$

   Le regroupement $AB+BA=2AB$ n'est légitime que si $AB=BA$, ce qui est faux ici.

   $$\boxed{\text{L'identité remarquable } (A+B)^2=A^2+2AB+B^2 \text{ n'est pas valable dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$$

   On retiendra que la multiplication matricielle n'est **pas commutative** : toutes les identités algébriques usuelles reposant sur la commutativité tombent en défaut.

EXERCICE 6 ⋆⋆

Cherchons les matrices $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AB=BA$. On calcule les deux produits :

$$AB=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c&b+d\\c&d\end{pmatrix}\qquad BA=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&a+b\\c&c+d\end{pmatrix}$$

L'égalité $AB=BA$ équivaut donc au système :

$$\begin{cases}a+c=a\\b+d=a+b\\c=c\\d=c+d\end{cases}\iff\begin{cases}c=0\\d=a\end{cases}$$

La troisième équation est toujours vraie, et la quatrième redonne $c=0$.

Les matrices cherchées sont donc exactement celles de la forme :

$$\boxed{B=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}\qquad\text{avec } (a\,;b)\in\mathbb{R}^2}$$

Autre écriture : en posant $N=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, on a $B=a\mathrm{Id}+bN$, et l'on remarque que $A=\mathrm{Id}+N$ appartient elle-même à cet ensemble — ce qui était prévisible, puisque toute matrice commute avec elle-même et avec l'identité.

EXERCICE 7 ⋆

*Il s'agit de trouver **un** exemple : la réponse n'est donc pas unique.*

Posons :

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

On calcule les deux produits, dans les deux ordres :

$$AB=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\times1+1\times0&0\times0+1\times0\\0\times1+0\times0&0\times0+0\times0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=0}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 0 + 0 \times 0 & 1 \times 1 + 0 \times 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0}$$

Ces deux matrices conviennent donc.

Deux enseignements importants. D'une part, cet exemple confirme que le produit matriciel n'est pas commutatif. D'autre part, il montre qu'un produit de matrices peut être nul **sans qu'aucun des deux facteurs ne le soit** : dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la règle du produit nul *est fausse*. C'est d'ailleurs pour cela qu'on ne peut pas « simplifier » une égalité matricielle par une matrice non nulle — il faudrait pour cela qu'elle soit inversible, comme le montrera l'exercice 15.

EXERCICE 8 ⋆⋆

1. **Faux.** En développant sans changer l'ordre des facteurs, $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$, qui n'est égal à $A^2 - B^2$ que si $AB = BA$. Avec les matrices de l'exercice 7, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$:

$$(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{alors que} \qquad A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. **Faux.** La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est non nulle, et pourtant $A^2 = 0$. Une telle matrice est dite nilpotente (exercice 28).
3. **Faux.** La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ vérifie $A^2 = I_2$, sans être égale à I_2 ni à $-I_2$. L'équation $A^2 = I_2$ a même une infinité de solutions dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4. **Faux.** On a $(AB)^2 = ABAB$, qui n'est égal à $A^2B^2 = AABB$ que si l'on peut échanger B et A au milieu. Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on trouve $(AB)^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $A^2B^2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
5. **Vrai.** Si $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$, alors $AB = \begin{pmatrix} \alpha\gamma & 0 \\ 0 & \beta\delta \end{pmatrix} = BA$, puisque les réels commutent.
6. **Vrai.** Par récurrence : $(kA)^0 = I_2 = k^0A^0$, et si $(kA)^n = k^nA^n$, alors $(kA)^{n+1} = (kA)^n(kA) = k^nA^n\,kA = k^{n+1}A^{n+1}$ d'après la Proposition 2 (les réels « sortent » des produits).

L'erreur la plus répandue est d'appliquer aux matrices les identités remarquables ou la règle du produit nul : les questions 1, 2 et 4 montrent qu'elles sont fausses en général.

Puissances d'une matrice

EXERCICE 9 ⋆⋆

1. Calculons les carrés et les cubes.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3}$$

On en déduit immédiatement $A^3 = A^2 \times A = I_3 \times A = \boxed{A}$.

$$B^2 = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}} \qquad \text{puis} \qquad B^3 = B^2 \times B = \boxed{I_3}$$

2. **Pour A :** comme $A^2 = I_3$, les puissances de A ne prennent que deux valeurs et se répètent de 2 en 2 :

$$\boxed{A^n = \begin{cases} I_3 & \text{si } n \text{ est pair} \\ A & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}}$$

Pour B : comme $B^3 = I_3$, les puissances de B se répètent de 3 en 3, selon le reste r de la division euclidienne de n par 3 : si $n = 3q + r$, alors $B^n = (B^3)^q B^r = B^r$, d'où

$$\boxed{B^n = \begin{cases} I_3 & \text{si } r = 0 \\ B & \text{si } r = 1 \\ B^2 & \text{si } r = 2 \end{cases}}$$

Interprétation : multiplier par A revient à échanger la première et la troisième ligne d'une matrice en laissant la deuxième inchangée — le faire deux fois de suite remet donc tout en place, ce qui explique que $A^2 = I_3$. Multiplier par B fait au contraire *tourner* les trois lignes d'un cran ; il faut répéter l'opération trois fois pour retrouver la disposition initiale, d'où $B^3 = I_3$.

3. 2025 est impair, donc

$$\boxed{A^{2025} = A = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}}$$

Par ailleurs $2025 = 3 \times 675$: le reste de la division euclidienne de 2025 par 3 est nul, et

$$B^{2025} = \left(B^3\right)^{675} = I_3^{675} = \boxed{I_3}$$

EXERCICE 10 ⋆

1. D'après la Proposition 3 du cours, on élève chaque coefficient diagonal à la puissance voulue :

$$D^2 = \begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \boxed{D^n = \begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&(-1)^n&0\\0&0&\frac{1}{2^n}\end{pmatrix}}$$

2. On en déduit :

$$D^{2025} = \begin{pmatrix}2^{2025}&0&0\\0&-1&0\\0&0&2^{-2025}\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D^{2026} = \begin{pmatrix}2^{2026}&0&0\\0&1&0\\0&0&2^{-2026}\end{pmatrix}$$

Seul le coefficient central dépend de la parité de l'exposant.

3. On pose $E = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. Un calcul direct donne $DE = ED = I_3$, donc :

$$\boxed{D \text{ est inversible et } D^{-1} = E}$$

4. Une matrice diagonale de coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ est inversible si et seulement si tous les λ_i sont non nuls, et son inverse est alors la matrice diagonale de coefficients $\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}$. En effet, si tous les λ_i sont non nuls, le produit des deux matrices diagonales vaut I_n ; si l'un d'eux, disons λ_1, est nul, alors pour toute matrice B, la première ligne de DB est nulle, donc $DB \neq I_n$.

EXERCICE 11 ⋆⋆

1. Calculons les puissances de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & -1-1 \\ -1-1 & 1+1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}}$$

On constate que $A^2 = 2A$, ce qui simplifie le calcul suivant :

$$A^3 = A^2 \times A = 2A \times A = 2A^2 = 2 \times 2A = 4A = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}}$$

2. On a $A^1 = A$, $A^2 = 2A$ et $A^3 = 4A$: les coefficients 1, 2, 4 sont les puissances successives de 2. D'où la conjecture :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = 2^{n-1}A}$$

3. Considérons la propriété, définie pour tout entier naturel non nul n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n : \text{« } A^n = 2^{n-1}A \text{ »}$$

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $A^1 = A$ et $2^{1-1}A = 2^0 A = A$. Les deux membres coïncident, donc P_1 est vraie.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons P_k vraie, c'est-à-dire $A^k = 2^{k-1}A$. Alors :

$$A^{k+1} = A^k \times A = 2^{k-1}A \times A = 2^{k-1}A^2 = 2^{k-1} \times 2A = 2^k A$$

en utilisant $A^2 = 2A$ établi à la question 1. C'est exactement P_{k+1}, qui est donc vraie.

Conclusion : Par principe de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout entier naturel non nul n :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}}$$

4. On reprend la même démarche pour $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 1+2 \\ 0+0 & 0+4 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

$$B^3 = B^2 \times B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 1+6 \\ 0+0 & 0+8 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}}$$

Conjecture. Le coefficient en bas à droite vaut 2, 4, 8, soit 2^n ; celui en haut à droite vaut 1, 3, 7, soit $2^n - 1$. D'où :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}}$$

Démonstration. Considérons la propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad Q_n : \text{« } B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \text{ »}$$

Initialisation : Pour $n = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & 2^1 - 1 \\ 0 & 2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = B$. Donc Q_1 est vraie.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons Q_k vraie. Alors :

$$B^{k+1} = B^k \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2^k - 1 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 + 2\left(2^k - 1\right) \\ 0 & 2 \times 2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{k+1} - 1 \\ 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix}$$

car $1 + 2^{k+1} - 2 = 2^{k+1} - 1$. C'est exactement Q_{k+1}, qui est donc vraie.

Conclusion : Par principe de récurrence, pour tout entier naturel non nul n :

$$\boxed{B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}}$$

On remarquera la différence de méthode : pour A, l'hérédité repose sur la relation $A^2 = 2A$; pour B, elle repose sur un calcul direct de produit. Dans les deux cas, c'est l'observation des premières puissances qui a guidé la conjecture.

EXERCICE 12 ⋆⋆

1. On obtient $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = N^2 \times N = \boxed{0}$. Pour tout $k \geqslant 3$, $N^k = N^3 N^{k-3} = 0$.
2. Comme N commute avec I_3 :

   $A^2 = (I_3+N)(I_3+N) = I_3+2N+N^2, \qquad A^3 = A^2(I_3+N) = I_3+3N+3N^2+N^3 = I_3+3N+3N^2.$
3. On note $\mathcal{P}_n$: « $A^n = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2$ ».
   Initialisation : Pour $n = 0$, $A^0 = I_3$ et le membre de droite vaut $I_3 + 0 + 0 = I_3$.
   Hérédité : Si $\mathcal{P}_k$ est vraie, alors, en utilisant $N^3 = 0$:

$$\begin{aligned} A^{k+1} = A^k(I_3 + N) &= \left(I_3 + kN + \frac{k(k-1)}{2}N^2\right)(I_3 + N) \\ &= I_3 + (k+1)N + \left(k + \frac{k(k-1)}{2}\right)N^2 + \frac{k(k-1)}{2}N^3 \\ &= I_3 + (k+1)N + \frac{(k+1)k}{2}N^2, \end{aligned}$$

   ce qui est $\mathcal{P}_{k+1}$.
   Conclusion : Par récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En remplaçant N et N^2 par leurs tableaux :

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 2n + \frac{3n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & 3n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

   Pour $n = 1$, on retrouve $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$. Pour $n = 5$, le coefficient en haut à droite vaut $10 + 30 = 40$, ce que confirme un calcul direct.

L'exercice 27 justifiera cette formule d'un seul coup grâce à la formule du binôme.

Inverse et déterminant

EXERCICE 13 ⋆

On rappelle que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *est inversible si et seulement si son déterminant* $\det(A) = ad - bc$ *est non nul, et qu'alors*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

a) $\det(A) = 4 \times 5 - 10 \times 2 = 20 - 20 = 0$, donc

$$\boxed{A \text{ n'est pas inversible.}}$$

On remarque que la seconde ligne est la moitié de la première : les deux lignes sont proportionnelles, ce qui explique l'annulation du déterminant.

b) $\det(A) = 4 \times 3 - 5 \times 2 = 12 - 10 = 2 \neq 0$, donc A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

Vérification : $A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Id}$, ce qui confirme le résultat.

c) $\det(A) = 1 \times 4 - 2 \times (-2) = 4 + 4 = 8 \neq 0$, donc A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}}$$

d) $\det(A) = (-0{,}5) \times 2 - 4 \times 0{,}25 = -1 - 1 = -2 \neq 0$, donc A est inversible et

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -0{,}25 & -0{,}5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0{,}125 & 0{,}25 \end{pmatrix}}$$

Attention aux signes : le facteur $\frac{1}{\det(A)}$ est ici négatif, il change le signe des quatre coefficients de la matrice $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

EXERCICE 14 ⋆

1. $\det(A_m) = m(m-1) - 2 \times 3 = \boxed{m^2 - m - 6}$.
2. D'après la Proposition 4 du cours, A_m n'est pas inversible si et seulement si $m^2 - m - 6 = 0$. Le discriminant vaut 25, d'où $\boxed{m = -2 \text{ ou } m = 3}$.
3. Pour $m = 0$, $\det(A_0) = -6 \neq 0$ et :

$$A_0^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}}$$

Vérification : $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

EXERCICE 15 ⋆

1. Calculons les deux produits.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}}$$

Détail de la deuxième ligne de AB : elle vaut $0 \times L_1(B) + 1 \times L_2(B) + 1 \times L_3(B) = (0\,;1\,;0) + (1\,;0\,;0) = (1\,;1\,;0)$.

On constate donc que $\boxed{AB = AC \quad \text{alors que} \quad B \neq C.}$

2. Raisonnons par l'absurde. **Supposons A inversible.** Alors A^{-1} existe, et en multipliant l'égalité $AB = AC$ à gauche par A^{-1} :

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \iff \left(A^{-1}A\right)B = \left(A^{-1}A\right)C \iff I_3B = I_3C \iff B = C$$

Or B et C sont manifestement différentes (leurs premières colonnes ne coïncident pas). C'est une contradiction, donc l'hypothèse de départ est fausse :

$$\boxed{A \text{ n'est pas inversible.}}$$

On retiendra qu'on ne peut **jamais** simplifier une égalité matricielle par un facteur commun sans avoir d'abord vérifié que ce facteur est inversible — l'exercice 7 avait déjà donné un avertissement en ce sens.

EXERCICE 16 ⋆

1. Calculons d'abord A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Détail du coefficient en haut à gauche : $(-1) \times (-1) + 1 \times 1 + 1 \times 1 = 1 + 1 + 1 = 3$.

Calculons ensuite le membre de droite :

$$2I_3 - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Les deux matrices sont identiques, donc

$$\boxed{A^2 = 2I_3 - A}$$

2. Réécrivons cette relation en faisant apparaître I_3 à droite :

$$A^2 = 2I_3 - A \iff A^2 + A = 2I_3 \iff A\,(A + I_3) = 2I_3$$

en factorisant par A à gauche — ce qui est licite, A étant en facteur du même côté dans les deux termes. En divisant par 2 :

$$A \times \frac{1}{2}\,(A + I_3) = I_3$$

La matrice A admet donc un inverse, à savoir :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A + I_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}}$$

Remarque de rédaction : il faudrait en toute rigueur vérifier aussi $\frac{1}{2}(A + I_3) \times A = I_3$. C'est immédiat ici, puisque A commute avec $A + I_3$ (une matrice commute toujours avec elle-même et avec l'identité).

EXERCICE 17 ⋆

1. Calculons d'abord A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Détail de la première ligne : $0 \times 0 + 1 \times (-1) + (-1) \times 1 = -2$; $0 \times 1 + 1 \times 2 + (-1) \times (-1) = 3$; $0 \times (-1) + 1 \times (-1) + (-1) \times 2 = -3$.

On assemble alors les trois termes :

$$A^2 + 2I_3 - 3A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0}$$

2. De la relation $A^2 - 3A + 2I_3 = 0$, on tire :

$$A^2 - 3A = -2I_3 \iff A(A - 3I_3) = -2I_3 \iff A \times \left(-\frac{1}{2}\right)(A - 3I_3) = I_3$$

La matrice A est donc inversible, et son inverse vaut $-\frac{1}{2}(A - 3I_3) = \frac{1}{2}(3I_3 - A)$:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

On remarque que la méthode est exactement la même qu'à l'exercice 16 : dès qu'une relation polynomiale en A possède un terme constant non nul, on peut isoler I_3 et factoriser par A, ce qui fournit l'inverse sans aucun calcul de déterminant.

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. Par associativité du produit :

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n,$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n.$$

Donc $\boxed{AB \text{ est inversible et } (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$. L'ordre s'inverse, comme lorsqu'on retire ses chaussettes après ses chaussures.

2. On a $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, de déterminant 1, donc $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. On vérifie que $B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, alors que $A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ est différente.

3. Les égalités $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ montrent aussi que A^{-1} est inversible, d'inverse $\boxed{\left(A^{-1}\right)^{-1} = A}$.

4. Par récurrence : $A^0 = I_n$ est inversible d'inverse $I_n = (A^{-1})^0$, et si $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$, alors d'après la question 1, $A^{k+1} = A^k A$ est inversible et

$$\left(A^{k+1}\right)^{-1} = A^{-1}\left(A^k\right)^{-1} = A^{-1}\left(A^{-1}\right)^k = \left(A^{-1}\right)^{k+1}.$$

EXERCICE 19 ⋆⋆

1. On a $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\boxed{N^3 = 0}$.

2. Les matrices A et I_3 commutent, donc on peut développer $(A - I_3)^3$ comme une identité remarquable (exercice 27) :

$$0 = N^3 = (A - I_3)^3 = A^3 - 3A^2 + 3A - I_3.$$

Le point essentiel est que $AI_3 = I_3A$; sans cela, le développement serait faux (exercice 5).

3. On isole I_3 et on factorise par A :

$$A^3 - 3A^2 + 3A = I_3 \iff A\left(A^2 - 3A + 3I_3\right) = I_3,$$

et de même $\left(A^2 - 3A + 3I_3\right)A = I_3$. Donc $\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} = A^2 - 3A + 3I_3}$.

4. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Vérification : le produit $A \times A^{-1}$ donne bien I_3 ; par exemple, la première ligne vaut $(1\,;-1+1\,;1-1) = (1\,;0\,;0)$.

C'est la méthode des exercices 16 et 17 ; l'exercice 28 montrera que $A^{-1} = I_3 - N + N^2$ s'obtient aussi comme une « somme géométrique ».

Exercices d'approfondissement

EXERCICE 20 : DIAGONALISATION ⋆⋆

1. $\det(P) = 3 \times 1 - 2 \times 1 = 3 - 2 = 1 \neq 0$, donc P est inversible. Comme le déterminant vaut 1, l'inverse s'écrit sans fraction :

$$P^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}$$

Vérification : $P \times P^{-1} = \begin{pmatrix} 3-2 & -6+6 \\ 1-1 & -2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Id}$, ce qui confirme le calcul.

2. On calcule le produit en deux temps, en commençant par AP :

$$AP = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-6 & 8-6 \\ 3-1 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

puis :

$$P^{-1}(AP) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-4 & 2-2 \\ -6+6 & -2+3 \end{pmatrix} = \boxed{D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Les coefficients hors de la diagonale sont nuls : D est bien une matrice diagonale.

3. Considérons la propriété, définie pour tout entier naturel n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n : \text{« } D^n = P^{-1}A^nP \text{ »}$$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $D^0 = \mathrm{Id}$ d'une part, et d'autre part

$$P^{-1}A^0P = P^{-1}\,\mathrm{Id}\,P = P^{-1}P = \mathrm{Id}$$

Les deux membres coïncident, donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons P_k vraie, c'est-à-dire $D^k = P^{-1}A^kP$. Alors :

$$D^{k+1} = D^k \times D = \left(P^{-1}A^kP\right) \times \left(P^{-1}AP\right) = P^{-1}A^k \underbrace{\left(PP^{-1}\right)}_{=\mathrm{Id}} AP = P^{-1}A^kAP = P^{-1}A^{k+1}P$$

en utilisant $D = P^{-1}AP$ (question 2) et l'associativité du produit matriciel. C'est exactement P_{k+1}, qui est donc vraie.

Conclusion : Par principe de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad D^n = P^{-1}A^nP}$$

C'est le cœur de la méthode : c'est le télescopage des PP^{-1} qui fait tout le travail, et il n'a lieu que parce que P et P^{-1} se retrouvent côte à côte.

4. De l'égalité précédente, on tire A^n en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} :

$$D^n = P^{-1}A^nP \iff PD^nP^{-1} = \underbrace{PP^{-1}}_{=\mathrm{Id}}A^n\underbrace{PP^{-1}}_{=\mathrm{Id}} \iff A^n = PD^nP^{-1}$$

Or D étant diagonale, ses puissances se calculent coefficient par coefficient :

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On effectue alors le produit, de gauche à droite :

$$PD^n = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 2^n & 2 \\ 2^n & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = (PD^n)\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 3\times 2^n & 2 \\ 2^n & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 2^n - 2 & -6\times 2^n + 6 \\ 2^n - 1 & -2\times 2^n + 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 3\times 2^n - 2 & 6 - 3\times 2^{n+1} \\ 2^n - 1 & 3 - 2^{n+1} \end{pmatrix}}$$

Vérifications. Pour $n=0$: $\begin{pmatrix} 3-2 & 6-6 \\ 1-1 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}$. Pour $n=1$: $\begin{pmatrix} 6-2 & 6-12 \\ 2-1 & 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A$. Les deux cas particuliers confirment la formule.

Bilan de la méthode. Calculer directement A^n était hors de portée : aucune relation simple ne relie A^{n+1} à A^n. L'astuce consiste à remplacer A par la matrice diagonale D, dont les puissances sont immédiates, puis à revenir à A^n grâce à l'égalité $A^n = PD^nP^{-1}$. Tout repose sur le couple $(P\,;P^{-1})$, dont les produits se télescopent à chaque étape.

EXERCICE 21 ⋆⋆⋆

1. On a $AB = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$, d'où :

$$\begin{aligned} \det(AB) &= (aa'+bc')(cb'+dd') - (ab'+bd')(ca'+dc') \\ &= aa'cb' + aa'dd' + bc'cb' + bc'dd' - ab'ca' - ab'dc' - bd'ca' - bd'dc' \\ &= ad\,a'd' + bc\,b'c' - ad\,b'c' - bc\,a'd' = (ad-bc)(a'd'-b'c'). \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\det(AB) = \det(A)\det(B)}$.

2. Par récurrence : $\det(A^0) = \det(I_2) = 1 = \det(A)^0$, et si $\det(A^n) = \det(A)^n$, alors $\det(A^{n+1}) = \det(A^nA) = \det(A)^n \det(A) = \det(A)^{n+1}$.

3. Si A est inversible, $1 = \det(I_2) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$, donc $\det(A) \neq 0$ et :

$$\boxed{\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}}$$

On retrouve au passage un sens de la Proposition 4.

4. Si $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $\det(A)^2 = \det(A^2) = -1$, ce qui est impossible pour un réel. Il n'existe donc $\boxed{\text{aucune telle matrice}}$.

Le résultat de la question 1 reste vrai pour les matrices carrées de toute dimension, une fois le déterminant défini en dimension n ; c'est l'un des théorèmes démontrés par Cauchy en 1812.

EXERCICE 22 ⋆⋆⋆

1. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix}$ et $tA = \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$A^2 - tA = \begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix} = -\det(A)\,I_2, \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{A^2 - tA + \det(A)\,I_2 = 0}.$$

2. On en déduit $A(tI_2 - A) = (tI_2 - A)A = \det(A)\,I_2$. Comme $\det(A) \neq 0$, on divise par $\det(A)$:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(tI_2 - A) = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

On retrouve exactement la formule de la Proposition 4 du cours, sans avoir eu à la deviner.

3. Si $\det(A) = 0$, la relation devient $A^2 = tA$. Supposons A inversible : en multipliant par A^{-1}, on obtient $A = tI_2$, donc $\det(A) = t^2 = 0$, puis $t = 0$ et $A = 0$, ce qui contredit $A \neq 0$. Donc $\boxed{A \text{ n'est pas inversible}}$.

4. Ici $t = 5$ et $\det(A) = 4-6 = -2$, donc $\boxed{A^2 = 5A + 2I_2}$, puis $A^3 = 5A^2+2A = 5(5A+2I_2)+2A = \boxed{27A + 10I_2}$. *Vérification :* $27A + 10I_2 = \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix}$, qui est bien A^3.

Ce résultat porte le nom de Cayley, qui l'énonce en 1858 dans son mémoire fondateur sur les matrices et le vérifie en dimensions 2 et 3, et de Hamilton. Il est vrai en toute dimension.

EXERCICE 23 ⋆⋆⋆

1. On a $A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$, de déterminant $(1-\lambda)^2 - 4 = (1-\lambda-2)(1-\lambda+2) = (-1-\lambda)(3-\lambda)$. Cette matrice n'est pas inversible si et seulement si $\boxed{\lambda = 3 \text{ ou } \lambda = -1}$.
2. — Pour $\lambda = 3$: $AX = 3X$ équivaut à $x + 2y = 3x$ et $2x + y = 3y$, c'est-à-dire $y = x$. On peut prendre $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   — Pour $\lambda = -1$: $AX = -X$ équivaut à $x + 2y = -x$ et $2x + y = -y$, c'est-à-dire $y = -x$. On peut prendre $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
3. On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, de déterminant $-2 \neq 0$, donc inversible, et $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Comme AP a pour colonnes $AX_1 = 3X_1$ et $AX_2 = -X_2$:

$$AP = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = D}$$

4. Comme dans l'exercice 20, $A^n = PD^nP^{-1}$, d'où :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \boxed{A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n + (-1)^n & 3^n - (-1)^n \\ 3^n - (-1)^n & 3^n + (-1)^n \end{pmatrix}}$$

Vérification : pour $n = 1$, on retrouve $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = A$.

Les nombres 3 et -1 sont les *valeurs propres* de A, et X_1, X_2 des *vecteurs propres* : cette méthode de diagonalisation sera généralisée dans l'enseignement supérieur.

POUR ALLER PLUS LOIN

EXERCICE 24 ⋆⋆⋆

1. On obtient $J^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$, puis $J^3 = -J$ et $J^4 = I_2$. Si $n = 4q + r$, alors $J^n = (J^4)^q J^r = J^r$, d'où $J^n = I_2$, J, $-I_2$ ou $-J$ selon que $r = 0$, 1, 2 ou 3. C'est exactement le comportement des puissances de i (exercice 3 du chapitre 2) : la matrice J joue le rôle de i.
2. La somme est immédiate : $M(z) + M(z') = (a+a')I_2 + (b+b')J = M(z+z')$. Pour le produit, I_2 commute avec J et $J^2 = -I_2$, donc :

$$M(z)M(z') = (aI_2 + bJ)(a'I_2 + b'J) = (aa' - bb')I_2 + (ab' + ba')J = M(zz'),$$

puisque $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$.

3. $\det\big(M(z)\big) = a \times a - (-b) \times b = a^2 + b^2 = z\overline{z}$. D'après la Proposition 4 du cours, $M(z)$ est inversible si et seulement si $a^2 + b^2 \neq 0$, c'est-à-dire $z \neq 0$. Dans ce cas, d'après la question 2, $M(z)M\left(\frac{1}{z}\right) = M(1) = I_2$, et de même dans l'autre ordre, donc $\boxed{M(z)^{-1} = M\left(\frac{1}{z}\right)}$.

4. La matrice est $M(1+i)$. D'après la question 2 (par récurrence), $M(1+i)^n = M\big((1+i)^n\big)$, et d'après l'exercice 3 du chapitre 2, $(1+i)^{2026} = 2^{1013}i$. Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{2026} = M\left(2^{1013}i\right) = 2^{1013}J = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -2^{1013} \\ 2^{1013} & 0 \end{pmatrix}}$$

L'application $z \mapsto M(z)$ transporte les calculs sur les complexes en calculs matriciels : on peut ainsi « construire » $\mathbb{C}$ sans postuler l'existence de i, ce qui répond à la démonstration admise de la Proposition 1 du chapitre 2.

EXERCICE 25 ⋆⋆⋆

1. On note $\mathcal{P}_n$: « $M^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ ».

   Initialisation : Pour $n = 1$: $F_2 = 1$, $F_1 = 1$, $F_0 = 0$, et la matrice vaut bien M.

   Hérédité : Si $\mathcal{P}_k$ est vraie, alors :

$$M^{k+1} = M^k M = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1}+F_k & F_{k+1} \\ F_k + F_{k-1} & F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{pmatrix}.$$

   Conclusion : Par récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. D'après l'exercice 21, $\det(M^n) = \det(M)^n = (-1)^n$, puisque $\det(M) = 0 - 1 = -1$. Or $\det(M^n) = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$, d'où $\boxed{F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n}$. C'est l'identité de Cassini ; avec $n+1$ à la place de n, elle donne $F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$, ce que le poly fait conjecturer puis démontrer par récurrence. *Vérification :* pour $n = 5$, $F_6F_4 - F_5^2 = 8 \times 3 - 25 = -1$.

3. Le coefficient en haut à droite de M^{m+n} vaut F_{m+n}. Celui de M^mM^n s'obtient en multipliant la première ligne $(F_{m+1}\ ; F_m)$ de M^m par la deuxième colonne $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$ de M^n. D'où $\boxed{F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}}$.

4. Avec $m = n$, $F_{2n} = F_{n+1}F_n + F_nF_{n-1} = F_n\left(F_{n+1} + F_{n-1}\right)$. Pour $n = 10$: $F_{20} = 55 \times (89+34) = 55 \times 123 = \boxed{6765}$.

EXERCICE 26 ⋆⋆⋆

1. On veut $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ et $u_{n+1} = 1 \times u_{n+1} + 0 \times u_n$. D'où $\boxed{A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

2. $U_0 = A^0U_0$, et si $U_k = A^kU_0$, alors $U_{k+1} = AU_k = A\,A^kU_0 = A^{k+1}U_0$.

3. $\det(P) = 3 - 2 = 1 \neq 0$, donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Puis :

$$AP = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

4. Comme dans l'exercice 20, $A^n = PD^nP^{-1}$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^{n+1} & 2^{n+1} \\ 3^n & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n+1} - 2^{n+1} & -2 \times 3^{n+1} + 3 \times 2^{n+1} \\ 3^n - 2^n & -2 \times 3^n + 3 \times 2^n \end{pmatrix}.$$

Le terme u_n est la deuxième coordonnée de $U_n = A^n \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$$u_n = 5\left(3^n - 2^n\right) + 2\left(-2 \times 3^n + 3 \times 2^n\right) = 3^n + 2^n, \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{u_n = 2^n + 3^n}.$$

Les nombres 2 et 3 sont les racines de $x^2 = 5x - 6$: c'est la méthode générale du poly (exercice 11), qui est ici expliquée par la diagonalisation.

EXERCICE 27 ⋆⋆⋆

1. $A^0B = B = BA^0$, et si $A^kB = BA^k$, alors $A^{k+1}B = A(A^kB) = A(BA^k) = (AB)A^k = (BA)A^k = BA^{k+1}$.

2. On reprend la récurrence du chapitre 2 avec $u = A$ et $v = B$. Dans l'hérédité :

$$(A+B)^{N+1} = (A+B)\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^k B^{N-k} = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^{k+1} B^{N-k} + \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} B\, A^k B^{N-k}.$$

C'est ici qu'intervient l'hypothèse : pour obtenir le terme A^kB^{N+1-k}, il faut écrire $BA^k = A^kB$, ce que permet la question 1. La suite de la démonstration (changement d'indice et formule de Pascal) est inchangée. Dans l'exercice 5, $AB \neq BA$, et c'est précisément pour cela que $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

3. On a $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$, donc $N^k = 0$ pour $k \geqslant 3$. Comme $3I_3$ commute avec N, la formule du binôme donne, pour $n \geqslant 2$:

$$A^n = (N + 3I_3)^n = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} N^k 3^{n-k} = 3^n I_3 + n3^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} N^2,$$

$$\text{soit} \qquad \boxed{A^n = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}3^{n-2} \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}}$$

Vérification : pour $n = 4$, on obtient $\begin{pmatrix} 81 & 108 & 54 \\ 0 & 81 & 108 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}$, qui est bien A^4.

La formule de l'exercice 12 s'obtient de la même manière, avec I_3 à la place de $3I_3$.

EXERCICE 28 ⋆⋆⋆⋆

1. En développant, les termes se télescopent :

$$(I_p - A)\sum_{k=0}^{n-1} A^k = \sum_{k=0}^{n-1} A^k - \sum_{k=0}^{n-1} A^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} A^k - \sum_{k=1}^{n} A^k = I_p - A^n,$$

et le calcul est identique dans l'autre ordre, puisque A commute avec ses puissances. C'est la Proposition 7 du chapitre 2, avec $a = 1$ et $z = A$.

2. Avec $n = q$ et $A = N$, on obtient $(I_p - N)\left(I_p + N + \cdots + N^{q-1}\right) = I_p - N^q = I_p$, et de même dans l'autre ordre. Donc $\boxed{I_p - N \text{ est inversible, d'inverse } I_p + N + \cdots + N^{q-1}}$. Dans l'exercice 19, $A = I_3 + N = I_3 - (-N)$ avec $(-N)^3 = 0$, d'où $A^{-1} = I_3 - N + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: on retrouve le résultat.

3. Supposons N inversible et $N^q = 0$ avec q minimal. Si $q = 1$, alors $N = 0$, qui n'est pas inversible. Si $q \geqslant 2$, en multipliant $N^q = 0$ par N^{-1}, on obtient $N^{q-1} = 0$, ce qui contredit la minimalité de q. Donc $\boxed{N \text{ n'est pas inversible}}$.

4. D'après l'exercice 21, $\det(N)^q = \det(N^q) = \det(0) = 0$, donc $\det(N) = 0$. D'après l'exercice 22, $N^2 = tN$, où t est la trace de N. Par une récurrence immédiate, $N^k = t^{k-1}N$ pour tout $k \geqslant 1$, donc $0 = N^q = t^{q-1}N$. Si $N = 0$, alors $N^2 = 0$; sinon $t^{q-1} = 0$, donc $t = 0$ et $N^2 = tN = 0$. Dans tous les cas, $\boxed{N^2 = 0}$.

En dimension 2, une matrice nilpotente vérifie donc toujours $N^2 = 0$; en dimension 3, l'exercice 19 fournit une matrice nilpotente avec $N^2 \neq 0$ et $N^3 = 0$.