EXERCICES – CHAPITRE 3

MATRICES

Opérations sur les matrices

EXERCICE 1 ⋆

Effectuer les calculs suivants :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{3} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{6}{4} & 4 \\ -1 & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$

e) $2\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

f) $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

l) $\begin{pmatrix} -2 & 5 & 8 \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

EXERCICE 2 ⋆

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer x tel que $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 3 ⋆

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Donner la dimension de chacune des trois matrices.
2. Parmi les calculs suivants, lesquels ont un sens ? Donner alors la dimension du résultat.

$$A+B, \qquad AB, \qquad BA, \qquad AC, \qquad CA, \qquad BC, \qquad CB, \qquad AB+C.$$

3. Effectuer les calculs qui ont un sens parmi AB, BA, CA et $AB+C$.

EXERCICE 4 ⋆

1. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $3X - A = 2B$.
2. Déterminer les réels x, y et z tels que $\begin{pmatrix} x & 2y \\ x+y & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & z \\ z-1 & 3 \end{pmatrix}$.
3. Déterminer le réel a tel que $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 5 ⋆

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $(A+B)^2$, $A^2 + 2AB + B^2$ puis $A^2 + AB + BA + B^2$.
2. Que peut-on en déduire ?

EXERCICE 6 ⋆⋆

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trouver toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.

EXERCICE 7 ⋆

Trouver deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$ et $BA \neq 0$.

EXERCICE 8 ⋆⋆

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et k un réel. Dire si chacune des affirmations suivantes est **Vraie** ou **Fausse**, en justifiant par une démonstration ou un contre-exemple.

1. $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.
2. Si $A^2 = 0$, alors $A = 0$.
3. Si $A^2 = I_2$, alors $A = I_2$ ou $A = -I_2$.
4. $(AB)^2 = A^2B^2$.
5. Si A et B sont diagonales, alors $AB = BA$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(kA)^n = k^n A^n$.

Puissances d'une matrice

EXERCICE 9 ⋆⋆

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2, A^3, B^2 et B^3.
2. Que peut-on déduire sur les puissances de A et de B ?
3. Calculer A^{2025} et B^{2025}.

EXERCICE 10 ⋆

On considère la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1. Calculer D^2, puis donner l'expression de D^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculer D^{2025} et D^{2026}.
3. Montrer que D est inversible et donner D^{-1}.
4. Plus généralement, à quelle condition une matrice diagonale est-elle inversible ? Quelle est alors son inverse ?

EXERCICE 11 ⋆⋆

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et A^3.
2. En déduire une conjecture sur l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer cette conjecture par récurrence.
4. Mêmes questions pour B.

EXERCICE 12 ⋆⋆

On considère les matrices $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = I_3 + N$.

1. Calculer N^2 et N^3. En déduire N^k pour tout entier $k \geqslant 3$.
2. Exprimer A^2 et A^3 en fonction de I_3, N et N^2.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2.$$

4. En déduire l'expression de A^n sous forme de tableau, puis vérifier le résultat pour $n = 1$.

Inverse et déterminant

EXERCICE 13 ⋆

Dans chaque cas, déterminer si A est inversible, et calculer A^{-1} si elle existe.

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} -0,5 & 4 \\ 0,25 & 2 \end{pmatrix}$

EXERCICE 14 ⋆

Pour tout réel m, on considère la matrice $A_m = \begin{pmatrix} m & 2 \\ 3 & m-1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\det(A_m)$ en fonction de m.
2. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles A_m n'est pas inversible.
3. Déterminer l'inverse de A_0, puis vérifier le résultat.

EXERCICE 15 ⋆

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer AB et AC.
2. Que peut-on en déduire sur l'inversibilité de A ?

EXERCICE 16 ⋆

On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$.
2. En déduire que A est inversible, et donner A^{-1}.

EXERCICE 17 ⋆

On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^2 + 2I_3 - 3A$.
2. En déduire que A est inversible, et donner A^{-1}.

EXERCICE 18 ⋆⋆

Soient A et B deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que AB est inversible et que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. Vérifier ce résultat avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et constater que $(AB)^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$.
3. Montrer que A^{-1} est inversible et préciser son inverse.
4. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k est inversible et que $\left(A^k\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^k$.

EXERCICE 19 ⋆⋆

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et on pose $N = A - I_3$.

1. Calculer N^2 et N^3.
2. En développant $(A-I_3)^3$, montrer que $A^3-3A^2+3A-I_3 = 0$. On justifiera que le développement est licite.
3. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A^2, A et I_3.
4. Donner A^{-1} sous forme de tableau, et vérifier le résultat.

Exercices d'approfondissement

EXERCICE 20 : DIAGONALISATION ⋆⋆

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
2. Montrer que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale, qu'on notera D.
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = P^{-1}A^nP$.
4. En déduire l'expression en fonction de n de A^n.

EXERCICE 21 : DÉTERMINANT D'UN PRODUIT ⋆⋆⋆

1. Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\det(A^n) = \det(A)^n$.
3. Montrer que si A est inversible, alors $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.
4. Montrer qu'il n'existe aucune matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 22 : THÉORÈME DE CAYLEY-HAMILTON EN DIMENSION 2 ⋆⋆⋆

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $t = a + d$, appelé *trace* de A.

1. Montrer que $A^2 - tA + \det(A)\, I_2 = 0$.
2. On suppose $\det(A) \neq 0$. En déduire que A est inversible et que $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}(tI_2 - A)$. Comparer avec la formule du cours.
3. On suppose $\det(A) = 0$ et $A \neq 0$. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que A n'est pas inversible.
4. Application : on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Exprimer A^2, puis A^3, en fonction de A et de I_2.

EXERCICE 23 : TROUVER LA MATRICE DE PASSAGE ⋆⋆⋆

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Contrairement à l'exercice 20, la matrice P n'est pas donnée : il s'agit de la construire.

1. Déterminer les réels λ pour lesquels la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.
2. Pour chacune de ces valeurs de λ, déterminer une matrice colonne non nulle $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ telle que $AX = \lambda X$.
3. On note P la matrice dont les colonnes sont les deux matrices colonnes obtenues. Montrer que P est inversible, puis calculer $P^{-1}AP$.
4. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour aller plus loin

EXERCICE 24 : LES NOMBRES COMPLEXES VUS COMME DES MATRICES ⋆⋆⋆

On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et, pour tout nombre complexe $z = a + ib$ avec a et b réels :

$$M(z) = aI_2 + bJ = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

1. Calculer J^2, J^3 et J^4. En déduire J^n selon le reste de la division euclidienne de n par 4, et comparer avec les puissances de i.
2. Montrer que, pour tous complexes z et z', $M(z)+M(z') = M(z+z')$ et $M(z)M(z') = M(zz')$.
3. Montrer que $\det\big(M(z)\big) = z\overline{z}$. En déduire que $M(z)$ est inversible si et seulement si $z \neq 0$, et que $M(z)^{-1} = M\left(\dfrac{1}{z}\right)$.
4. À l'aide du chapitre 2, calculer $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{2026}$.

EXERCICE 25 : SUITE DE FIBONACCI ⋆⋆⋆

La suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geqslant 0}$ est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$.
2. À l'aide de l'exercice 21, en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.
3. En écrivant $M^{m+n} = M^m M^n$, montrer que, pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, $F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_m F_{n-1}$.
4. En déduire que $F_{2n} = F_n\,(F_{n+1} + F_{n-1})$, puis calculer F_{20} à partir de $F_9 = 34$, $F_{10} = 55$ et $F_{11} = 89$.

EXERCICE 26 : UNE SUITE RÉCURRENTE D'ORDRE 2 ⋆⋆⋆

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$.
3. On pose $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible, calculer P^{-1} puis $D = P^{-1}AP$.
4. En déduire A^n, puis montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 3^n$.

EXERCICE 27 : FORMULE DU BINÔME POUR LES MATRICES ⋆⋆⋆

1. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Montrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k B = BA^k$.
2. En reprenant la démonstration de la formule du binôme du chapitre 2, montrer que, si $AB = BA$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Indiquer précisément l'endroit où l'hypothèse $AB = BA$ intervient. Pourquoi l'exercice 5 n'est-il pas en contradiction avec ce résultat ?

3. Application : on pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = A - 3I_3$. Calculer N^2 et N^3, puis en déduire l'expression de A^n pour tout entier $n \geqslant 2$.

EXERCICE 28 : MATRICES NILPOTENTES ⋆⋆⋆⋆

On dit qu'une matrice carrée N est *nilpotente* s'il existe un entier $q \geqslant 1$ tel que $N^q = 0$.

1. Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$(I_p - A)\left(I_p + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}\right) = \left(I_p + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}\right)(I_p - A) = I_p - A^n.$$

2. Soit N une matrice nilpotente avec $N^q = 0$. Montrer que $I_p - N$ est inversible, d'inverse $I_p + N + \cdots + N^{q-1}$. Retrouver ainsi le résultat de l'exercice 19.
3. Montrer qu'une matrice nilpotente n'est jamais inversible.
4. Dans cette question, $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est nilpotente. À l'aide des exercices 21 et 22, montrer que $\det(N) = 0$, puis que $N^2 = 0$.