# CORRIGÉ – CHAPITRE 5

## GÉOMÉTRIE COMPLEXE

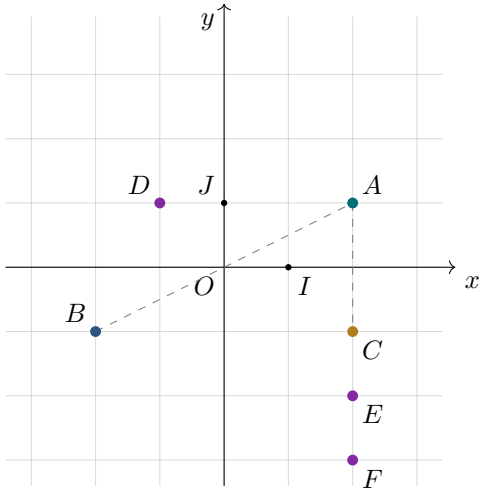
### Affixe, module et argument

**EXERCICE 1** ⋆

On rappelle qu'un point $M$ d'affixe $z = x + iy$, avec $x$ et $y$ réels, a pour coordonnées $(x\,;y)$ dans le repère $(O;I,J)$. On calcule donc l'affixe de chacun des points demandés, avec $z = 2 + i$ :

| | |
|---|---|
| $z = 2 + i$ | d'où $A(2\,;1)$ |
| $-z = -2 - i$ | d'où $B(-2\,;-1)$ |
| $\overline{z} = 2 - i$ | d'où $C(2\,;-1)$ |
| $z - 3 = -1 + i$ | d'où $D(-1\,;1)$ |
| $z - 3i = 2 + i - 3i = 2 - 2i$ | d'où $E(2\,;-2)$ |
| $\overline{z + 2i} = \overline{2 + 3i} = 2 - 3i$ | d'où $F(2\,;-3)$ |

On obtient ainsi la figure suivante :




On remarque en particulier que $B$ est le symétrique de $A$ par rapport à l'origine $O$, et que $C$ est le symétrique de $A$ par rapport à l'axe des abscisses. Pour $F$, il faut bien conjuguer le nombre $z + 2i = 2 + 3i$ tout entier : l'erreur la plus répandue est d'oublier la barre et de placer le point $(2\,;3)$.

**EXERCICE 2** ⋆

1. Le module est la distance $OM$ et l'argument l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$, que l'on lit directement sur la figure :
   - 3 est sur la demi-droite des réels positifs : $|3| = 3$ et $\arg(3) \equiv 0\ [2\pi]$ ;
   - $-2$ est sur la demi-droite des réels négatifs : $|-2| = 2$ et $\arg(-2) \equiv \pi\ [2\pi]$ ;
   - $5i$ est sur la demi-droite des imaginaires purs positifs : $|5i| = 5$ et $\arg(5i) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ;
   - $-i$ : $|-i| = 1$ et $\arg(-i) \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ;
   - $1 + i$ est sur la première bissectrice : $|1 + i| = \sqrt{2}$ et $\arg(1 + i) \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$ ;
   - $-1 - i = -(1 + i)$ : $|-1 - i| = \sqrt{2}$ et $\arg(-1 - i) \equiv \dfrac{\pi}{4} + \pi = \dfrac{5\pi}{4} \equiv -\dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$ (Proposition 1).

2. On utilise les Propositions 1 et 4, avec $|i| = 1$ et $\arg(i) \equiv \dfrac{\pi}{2}$ :

$$|-z| = 2, \qquad \arg(-z) \equiv \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3} \equiv -\frac{2\pi}{3};$$
$$|\overline{z}| = 2, \qquad \arg(\overline{z}) \equiv -\frac{\pi}{3};$$
$$|iz| = 1 \times 2 = 2, \qquad \arg(iz) \equiv \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6};$$
$$|z^2| = 4, \qquad \arg(z^2) \equiv \frac{2\pi}{3};$$
$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{2}, \qquad \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv 0 - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} \quad [2\pi].$$

On remarque que $\overline{z}$ et $\dfrac{1}{z}$ ont le même argument : en effet $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$, et $|z|^2$ est un réel positif.

## EXERCICE 3 ⋆⋆

On rappelle que $|z| = OM$ et que, pour $z \neq 0$, $\arg(z) \equiv (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$ $[2\pi]$.

a) $|z| = 2$ signifie $OM = 2$ : c'est le **cercle** de centre $O$ et de rayon 2.

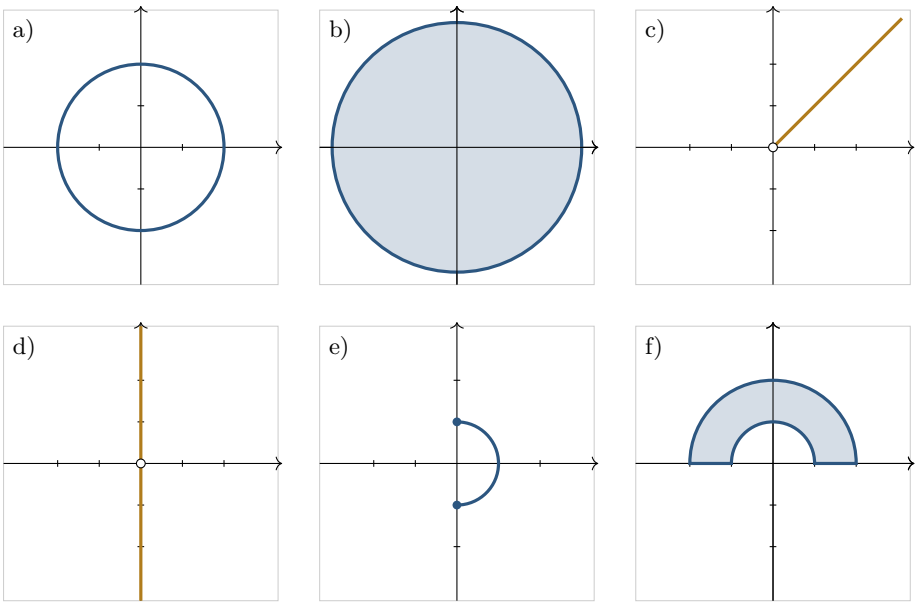
b) $|z| \leqslant 3$ : c'est le **disque** de centre $O$ et de rayon 3, bord compris.

c) C'est la **demi-droite** d'origine $O$ (privée de $O$) dirigée par le vecteur d'affixe $1 + i$, c'est-à-dire la partie de la première bissectrice située dans le quadrant $x > 0$, $y > 0$.

d) Un argument égal à $\dfrac{\pi}{2}$ ou à $-\dfrac{\pi}{2}$ à $2\pi$ près : c'est l'**axe des imaginaires purs privé de** $O$.

e) C'est le **demi-cercle** de centre $O$ et de rayon 1 situé à droite de l'axe des ordonnées, extrémités $i$ et $-i$ comprises.

f) C'est la **moitié supérieure de la couronne** comprise entre les cercles de centre $O$ et de rayons 1 et 2.




Sur chaque figure, l'ensemble cherché est tracé en couleur ; un petit cercle blanc signale que l'origine $O$ est exclue, puisque l'argument de 0 n'est pas défini.

## EXERCICE 4 ⋆⋆

1. D'après la formule de la distance vue en Seconde :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Or $z_B - z_A = (x_B - x_A) + i(y_B - y_A)$, dont le module est précisément ce nombre. Ainsi $\boxed{AB = |z_B - z_A|}$.
Le cas $z_A = 0$ redonne la définition du cours, $OB = |z_B|$.

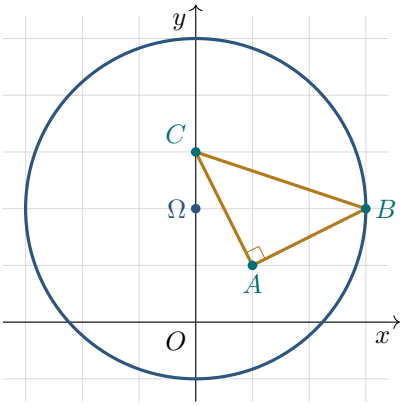
2. On calcule les trois longueurs :

$$AB = |2+i| = \sqrt{5}, \qquad AC = |-1+2i| = \sqrt{5}, \qquad BC = |-3+i| = \sqrt{10}.$$

On a $AB = AC$ et $AB^2 + AC^2 = 10 = BC^2$ : d'après la réciproque du théorème de Pythagore, $\boxed{ABC \text{ est rectangle isocèle en } A}$.

3. Le point $\Omega$ d'affixe $2i$ vérifie $\Omega M = |z - 2i|$. L'ensemble cherché est donc :

$$\boxed{\text{le cercle de centre } \Omega(0\,;2) \text{ et de rayon } 3}$$




La figure confirme que l'angle en $A$ est droit et que $A$ est équidistant de $B$ et $C$ ; le cercle de la question 3 coupe l'axe des ordonnées en $(0\,;5)$ et $(0\,;-1)$, à 3 unités de $\Omega$.

## Forme trigonométrique

### EXERCICE 5 ⋆

Pour chaque nombre, on calcule d'abord le module $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$, puis on factorise par ce module afin de faire apparaître un argument $\theta$ vérifiant :

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{y}{r}$$

1. On constate que :

$$|z_1| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$$

Ainsi :

$$z_1 = 4\left(\frac{2}{4} + i\frac{2\sqrt{3}}{4}\right) = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

On reconnaît le cosinus et le sinus de $\dfrac{\pi}{3}$, d'où :

$$\boxed{z_1 = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}$$

2. On procède de la même manière :

$$|z_2| = \sqrt{2+2} = 2 \qquad \text{et} \qquad z_2 = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

On reconnaît le cosinus et le sinus de $\dfrac{3\pi}{4}$, d'où :

$$\boxed{z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)}$$

3. On constate que :

$$|z_3| = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad z_3 = 4\sqrt{2}\left(\frac{4}{4\sqrt{2}} - i\frac{4}{4\sqrt{2}}\right) = 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

On reconnaît le cosinus et le sinus de $-\dfrac{\pi}{4}$, d'où :

$$\boxed{z_3 = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

4. On constate que :

$$|z_4| = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{4}{16}} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad z_4 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

On reconnaît le cosinus et le sinus de $\dfrac{2\pi}{3}$, d'où :

$$\boxed{z_4 = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)}$$

5. Le nombre $z_5 = -2i$ est un imaginaire pur de module 2, et $z_5 = 2(0-i)$, on reconnaît donc le cosinus et le sinus de $-\dfrac{\pi}{2}$ :

$$\boxed{z_5 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)}$$

6. On commence par écrire $z_6$ sous forme algébrique en multipliant par le conjugué :

$$z_6 = \frac{4}{1-i} = \frac{4(1+i)}{1^2+1^2} = \frac{4+4i}{2} = 2+2i$$

On a alors $|z_6| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ et :

$$z_6 = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

On reconnaît le cosinus et le sinus de $\dfrac{\pi}{4}$, d'où :

$$\boxed{z_6 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

## EXERCICE 6 ⋆

Il suffit ici de remplacer les cosinus et sinus par leurs valeurs exactes, puis de développer.

1. On constate que $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$, ainsi :

$$z_1 = 2(0 + i\times 1) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{z_1 = 2i}$$

2. On constate que $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ainsi :

$$z_2 = 3\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{z_2 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i}$$

3. On constate que $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ainsi :

$$z_3 = 4\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{z_3 = 2 - 2i\sqrt{3}}$$

4. On constate que $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$, ainsi :

$$z_4 = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{z_4 = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i}$$

## EXERCICE 7 ⋆

1. $|z_1| = \sqrt{2}$ et $z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, d'où $\arg(z_1) \equiv \frac{\pi}{4}$. De même, $|z_2| = \sqrt{1+3} = 2$ et $z_2 = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, d'où $\arg(z_2) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.
2. D'après la Proposition 4 :

$$\begin{aligned}
|z_1 z_2| &= 2\sqrt{2}, & \arg(z_1 z_2) &\equiv \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12};\\
\left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \frac{\sqrt{2}}{2}, & \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &\equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12};\\
|z_1^4| &= 4, & \arg(z_1^4) &\equiv \pi;\\
|z_2^3| &= 8, & \arg(z_2^3) &\equiv -\pi \equiv \pi;\\
|z_1^2 z_2| &= 2 \times 2 = 4, & \arg(z_1^2 z_2) &\equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \quad [2\pi].
\end{aligned}$$

3. On en déduit $z_1^4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi) = \boxed{-4}$ et $z_2^3 = 8(\cos\pi + i\sin\pi) = \boxed{-8}$. *Vérification :* $z_1^2 = 2i$ donc $z_1^4 = (2i)^2 = -4$ ; $z_2^2 = 1 - 2i\sqrt{3} - 3 = -2 - 2i\sqrt{3}$, puis $z_2^3 = (-2-2i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3}) = -2 + 2i\sqrt{3} - 2i\sqrt{3} - 6 = -8$.

La forme trigonométrique rend les puissances immédiates, alors que la forme algébrique demande un développement : c'est tout l'intérêt de la Proposition 4.

# Formules de trigonométrie

## EXERCICE 8 ⋆

1. On réduit au même dénominateur :

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}}$$

2. On utilise les formules d'addition :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \qquad \text{et} \qquad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

En posant $a = \frac{\pi}{3}$ et $b = \frac{\pi}{4}$, on obtient tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}
\end{aligned}$$

Puis de la même manière :

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\\
&= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

3. On procède de façon analogue en remarquant cette fois que :

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$$

On utilise alors les formules de soustraction :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

## EXERCICE 9 ⋆

Soit $x$ un réel quelconque.

1. On utilise les formules d'addition, en rappelant que :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\ ;\ \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad ; \qquad \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\ ;\ \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(a) On développe chacun des deux derniers termes :

$$\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)$$
$$\cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)$$

Ce qui nous donne en sommant :

$$\begin{aligned} A &= \cos(x) - \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\cos(x) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sin(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{A = 0}$$

(b) On procède exactement de la même manière :

$$\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\sin(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)$$
$$\sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\sin(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)$$

Ce qui nous donne en sommant :

$$B = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\sin(x) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos(x)$$

$$\boxed{B = 0}$$

2. On reconnaît dans chaque cas l'un des membres d'une formule d'addition, qu'il faut lire « à l'envers » :

(a) On reconnaît la formule $\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)=\cos(a-b)$ avec $a=3x$ et $b=5x$ :

$$C=\cos(3x-5x)=\cos(-2x)$$

Or la fonction cosinus est paire, d'où :

$$\boxed{C=\cos(2x)}$$

(b) On reconnaît la formule $\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)=\cos(a+b)$ avec $a=x$ et $b=2x$ :

$$\boxed{D=\cos(3x)}$$

(c) On reconnaît la formule $\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)=\sin(a-b)$ avec $a=6x$ et $b=7x$ :

$$E=\sin(6x-7x)=\sin(-x)$$

Or la fonction sinus est impaire, d'où :

$$\boxed{E=-\sin(x)}$$

(d) On reconnaît la formule $\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)=\sin(a+b)$ avec $a=2x$ et $b=3x$ :

$$\boxed{F=\sin(5x)}$$

## EXERCICE 10 ⋆

On utilise la formule de duplication $\cos(2a)=2\cos^2(a)-1$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\cos(2a)&=2\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2-1\\&=2\times\frac{2+\sqrt{3}}{4}-1\\&=\frac{2+\sqrt{3}}{2}-1=\frac{2+\sqrt{3}-2}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos(2a)=\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Or $a$ appartient à l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, donc $2a$ appartient à l'intervalle $[0\,;\pi]$, sur lequel la fonction cosinus est strictement décroissante : il existe donc une unique valeur de $2a$ telle que $\cos(2a)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, et on sait que $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. On en déduit donc que $2a=\frac{\pi}{6}$, autrement dit :

$$\boxed{a=\frac{\pi}{12}}$$

## EXERCICE 11 ⋆

Soit $x$ un réel tel que $x\not\equiv 0\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$, ce qui garantit $\sin(2x)\neq 0$ et $\cos(x)\neq 0$.

1. On utilise les deux formules de duplication :

$$\cos(2x)=1-2\sin^2(x)\qquad\text{et}\qquad\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)}&=\frac{1-\big(1-2\sin^2(x)\big)}{2\sin(x)\cos(x)}\\&=\frac{2\sin^2(x)}{2\sin(x)\cos(x)}\\&=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)} = \tan(x)}$$

2. Il suffit d'appliquer la formule précédente à des valeurs bien choisies de $x$.
   Pour $x = \dfrac{\pi}{8}$, on a $2x = \dfrac{\pi}{4}$, ainsi :

$$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-2}{2}$$

$$\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}-1}$$

   Pour $x = \dfrac{\pi}{12}$, on a $2x = \dfrac{\pi}{6}$, ainsi :

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{3}}$$

## EXERCICE 12 ⋆⋆

1. D'après la formule $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$ avec $a = \dfrac{\pi}{8}$ :

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}, \qquad \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1-\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

   Comme $\dfrac{\pi}{8} \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, le cosinus et le sinus sont positifs :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$$

2. L'équation s'écrit $2\cos^2(x) - 1 = \cos(x)$, soit $2X^2 - X - 1 = 0$ avec $X = \cos(x)$. Le discriminant vaut 9, d'où $X = 1$ ou $X = -\dfrac{1}{2}$. Dans $[0; 2\pi[$, $\cos(x) = 1$ donne $x = 0$, et $\cos(x) = -\dfrac{1}{2}$ donne $x = \dfrac{2\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{4\pi}{3}$ :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{0\,;\,\frac{2\pi}{3}\,;\,\frac{4\pi}{3}\right\}}$$

3. L'équation s'écrit $2\sin(x)\cos(x) = \sin(x)$, soit $\sin(x)\big(2\cos(x) - 1\big) = 0$. Dans $[0; 2\pi[$, $\sin(x) = 0$ donne $x = 0$ ou $x = \pi$, et $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ donne $x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{3}$ :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{0\,;\,\frac{\pi}{3}\,;\pi\,;\,\frac{5\pi}{3}\right\}}$$

L'erreur la plus répandue, en question 3, est de « simplifier » par $\sin(x)$, ce qui fait perdre les solutions 0 et $\pi$ : on factorise au lieu de diviser.

# Opérations et forme exponentielle

## EXERCICE 13 ⋆

On utilise ici les propriétés des modules et des arguments : pour tous complexes non nuls $z$ et $z'$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|zz'| = |z|\,|z'|\,, \quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}\,, \quad |z^n| = |z|^n$$

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\,, \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\,, \quad \arg(z^n) = n\arg(z) \quad [2\pi]$$

1. On commence par écrire $1-i$ sous forme trigonométrique : son module vaut $\sqrt{2}$ et $1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, ce qui donne un argument de $-\dfrac{\pi}{4}$. On en déduit alors :

$$|z_1|=\left(\sqrt{2}\right)^6=8 \qquad \text{et} \qquad \arg(z_1)=6\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{3\pi}{2}\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

$$\boxed{z_1=8\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=8i}$$

2. On écrit séparément le numérateur et le dénominateur :

$$1-i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{de module 2 et d'argument } -\frac{\pi}{3}$$

$$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{de module } \sqrt{2} \text{ et d'argument } \frac{\pi}{4}$$

On en déduit alors :

$$|z_2|=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad \arg(z_2)=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=-\frac{4\pi}{12}-\frac{3\pi}{12}=-\frac{7\pi}{12}$$

$$\boxed{z_2=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)}$$

3. On écrit de même chacune des deux bases :

$$\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) \quad \text{de module 2 et d'argument } \frac{\pi}{6}$$

$$1+i \quad \text{de module } \sqrt{2} \text{ et d'argument } \frac{\pi}{4}$$

On en déduit alors :

$$|z_3|=\frac{2^9}{\left(\sqrt{2}\right)^{12}}=\frac{512}{64}=8$$

$$\arg(z_3)=9\times\frac{\pi}{6}-12\times\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}-3\pi=-\frac{3\pi}{2}\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

$$\boxed{z_3=8\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=8i}$$

## EXERCICE 14 ⋆

1. On calcule le module de $z_1$ :

$$|z_1|=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{8}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

On factorise alors par ce module :

$$z_1=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}-i\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)$$

On reconnaît le cosinus et le sinus de $-\dfrac{\pi}{6}$, d'où :

$$\boxed{|z_1|=\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad \arg(z_1)=-\frac{\pi}{6}\ [2\pi]}$$

De même, $z_2=1-i=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, d'où :

$$\boxed{|z_2|=\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad \arg(z_2)=-\frac{\pi}{4}\ [2\pi]}$$

On en déduit enfin, par quotient :

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \qquad \text{et} \qquad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = -\frac{2\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$$

$$\boxed{\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = 1 \qquad \text{et} \qquad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\pi}{12}\ [2\pi]}$$

2. On multiplie par le conjugué du dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2(1-i)} \\ &= \frac{\left(\sqrt{6} - i\sqrt{2}\right)(1+i)}{2\left(1^2+1^2\right)} \\ &= \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{6} - i\sqrt{2} - i^2\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2} + i\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)}{4}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

3. D'après la question 1., $\dfrac{z_1}{z_2}$ a pour module 1 et pour argument $\dfrac{\pi}{12}$. Sa forme trigonométrique s'écrit donc :

$$\frac{z_1}{z_2} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

Deux nombres complexes étant égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire, on identifie avec la forme algébrique obtenue à la question 2. pour conclure :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

## EXERCICE 15 ⋆

On rappelle que le point d'affixe $re^{i\theta}$, avec $r > 0$, est le point situé sur le cercle de centre $O$ et de rayon $r$, tel que l'angle orienté entre l'axe des abscisses et $[OM)$ mesure $\theta$. On calcule donc au préalable la forme algébrique de chaque affixe :

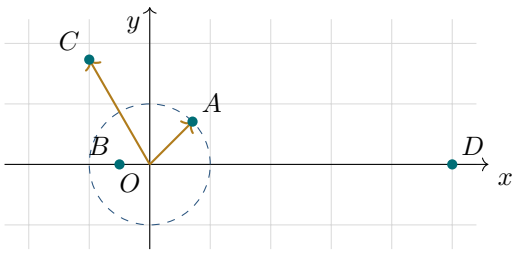
$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{d'où } A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx (0{,}71\,;0{,}71)$$

$$\frac{1}{2}e^{i\pi} = \frac{1}{2}\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right) = -\frac{1}{2} \qquad \text{d'où } B\left(-\frac{1}{2}\,;0\right)$$

$$2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3} \qquad \text{d'où } C\left(-1\,;\sqrt{3}\right) \approx (-1\,;1{,}73)$$

$$5e^{i2\pi} = 5\left(\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)\right) = 5 \qquad \text{d'où } D(5\,;0)$$

On obtient ainsi la figure suivante :



On remarque en particulier que $D$ est un point de l'axe des abscisses, puisque $e^{i2\pi} = e^{i0} = 1$.

## EXERCICE 16 ⋆

On rappelle que la forme exponentielle d'un complexe non nul de module $r$ et d'argument $\theta$ s'écrit $z = re^{i\theta}$.

1. On calcule le module de $z_1$ :

$$|z_1| = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 6^2} = \sqrt{12+36} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

On factorise alors par ce module :

$$z_1 = 4\sqrt{3}\left(\frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} + i\frac{6}{4\sqrt{3}}\right) = 4\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

On reconnaît le cosinus et le sinus de $\dfrac{\pi}{3}$, d'où :

$$\boxed{z_1 = 4\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

2. On commence par écrire $1 + i\sqrt{3}$ sous forme exponentielle : son module vaut $\sqrt{1+3} = 2$ et $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, d'où $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. On en déduit alors :

$$z_2 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4 = 2^4 e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$\boxed{z_2 = 16\,e^{i\frac{4\pi}{3}} = 16\,e^{-i\frac{2\pi}{3}}}$$

3. Le nombre $z_3$ est déjà écrit sous forme trigonométrique, il suffit donc de traduire :

$$\boxed{z_3 = 2\,e^{i\frac{\pi}{5}}}$$

## EXERCICE 17 ⋆⋆

On rappelle que si $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$, alors :

$$\overline{z} = re^{-i\theta} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

Les nombres $\overline{z}$ et $\dfrac{1}{z}$ ont donc le même argument $-\theta$, ce qui est cohérent avec l'égalité $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

1. On écrit tout d'abord $z_1$ sous forme algébrique :

$$z_1 = \frac{6}{1+i} = \frac{6(1-i)}{1^2+1^2} = \frac{6-6i}{2} = 3 - 3i$$

Son module vaut $|z_1| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$ et $z_1 = 3\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, d'où :

$$\boxed{z_1 = 3\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

Pour le conjugué, on change le signe de l'argument :

$$\overline{z_1} = 3\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}} = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\times 2}{2} + i\frac{3\times 2}{2}$$

$$\boxed{\overline{z_1} = 3 + 3i}$$

Pour l'inverse, on change le signe de l'argument et on inverse le module :

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{3\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\frac{1}{z_1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}i}$$

2. On remarque que $3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$, ainsi :

$$z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = 3e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\boxed{z_2 = 3\,e^{i\frac{5\pi}{6}}}$$

On en déduit la forme algébrique du conjugué :

$$\overline{z_2} = 3\,e^{-i\frac{5\pi}{6}} = 3\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{\overline{z_2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i}$$

Puis celle de l'inverse :

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}} = \frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{z_2} = -\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{6}i}$$

3. On remarque que $-1 = e^{i\pi}$, ainsi :

$$z_3 = 12\,e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{4}} = 12\,e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\boxed{z_3 = 12\,e^{i\frac{5\pi}{4}} = 12\,e^{-i\frac{3\pi}{4}}}$$

On en déduit la forme algébrique du conjugué :

$$\overline{z_3} = 12\,e^{-i\frac{5\pi}{4}} = 12\,e^{i\frac{3\pi}{4}} = 12\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\boxed{\overline{z_3} = -6\sqrt{2} + 6\sqrt{2}\,i}$$

Puis celle de l'inverse :

$$\frac{1}{z_3} = \frac{1}{12}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{12}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{z_3} = -\frac{\sqrt{2}}{24} + \frac{\sqrt{2}}{24}i}$$

## EXERCICE 18 ⋆

1. D'après la formule d'Euler :

$$e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \qquad e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \qquad e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i, \qquad e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

2. En additionnant ou en soustrayant les arguments (Proposition 4) :

$$e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = \boxed{i}, \qquad \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^8 = e^{2i\pi} = \boxed{1}, \qquad \frac{e^{i\frac{5\pi}{6}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = \boxed{i},$$

et, d'après la formule d'Euler pour le cosinus, $e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \boxed{-1}$.

3. $\left|e^{i\theta}\right| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = 1$. Puis $\overline{e^{i\theta}} = \cos(\theta) - i\sin(\theta) = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}$, et $e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^0 = 1$, donc $e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$.

## Formules de Moivre et d'Euler

### EXERCICE 19 ⋆⋆

1. Les deux nombres ont pour module $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, et :

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad ; \quad 1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

On reconnaît les cosinus et sinus de $\frac{\pi}{4}$ et de $-\frac{\pi}{4}$, d'où :

$$\boxed{1+i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{et} \quad 1-i = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n + \left(\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^n \left(e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{-i\frac{n\pi}{4}}\right) \end{aligned}$$

Or d'après la formule d'Euler, $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta)$, d'où :

$$\boxed{S_n = 2\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}$$

3. On traite les deux propositions séparément :
   - **Proposition A : Vraie**. En effet, d'après la question précédente, $S_n$ s'écrit comme le produit de $2\left(\sqrt{2}\right)^n$ par $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$, qui sont deux nombres réels. On peut aussi remarquer que $1-i = \overline{1+i}$, donc $S_n = (1+i)^n + \overline{(1+i)^n} = 2\,\mathcal{R}e\left((1+i)^n\right) \in \mathbb{R}$.
   - **Proposition B : Vraie**. En effet, comme $2\left(\sqrt{2}\right)^n \neq 0$ :

$$S_n = 0 \iff \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 0 \iff \frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z} \iff n = 2 + 4k$$

Il existe donc bien une infinité d'entiers naturels $n$ tels que $S_n = 0$, à savoir tous les entiers de la forme $n = 2+4k$ avec $k \in \mathbb{N}$ :

$$n \in \{2\,;6\,;10\,;14\,;\dots\}$$

### EXERCICE 20 ⋆⋆

1. D'après la formule de Moivre, pour tout réel $x$ :

$$\cos(3x) + i\sin(3x) = (\cos(x) + i\sin(x))^3$$

On développe le membre de droite à l'aide de l'identité $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, en posant $a = \cos(x)$ et $b = i\sin(x)$ :

$$\begin{aligned} (\cos(x) + i\sin(x))^3 &= \cos^3(x) + 3\cos^2(x)\,i\sin(x) + 3\cos(x)\,i^2\sin^2(x) + i^3\sin^3(x) \\ &= \underbrace{\cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x)}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{\left(3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x)\right)}_{\in\mathbb{R}} \end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, puis en utilisant $\sin^2(x) = 1-\cos^2(x)$ et $\cos^2(x) = 1-\sin^2(x)$ :

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos^3(x) - 3\cos(x)\left(1-\cos^2(x)\right) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x) \\ \sin(3x) &= 3\left(1-\sin^2(x)\right)\sin(x) - \sin^3(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)}$$

2. Il suffit d'isoler $\cos^3(x)$ et $\sin^3(x)$ dans les deux égalités précédentes :

$$\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x) \iff 4\cos^3(x) = 3\cos(x) + \cos(3x)$$

$$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x) \iff 4\sin^3(x) = 3\sin(x) - \sin(3x)$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\cos^3(x) = \frac{3\cos(x) + \cos(3x)}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin^3(x) = \frac{3\sin(x) - \sin(3x)}{4}}$$

3. On utilise cette fois les formules d'Euler :

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Pour le cosinus, on développe le cube à l'aide de l'identité $(a+b)^3$ :

$$\begin{aligned}
\cos^3(x) &= \frac{1}{8}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^3 \\
&= \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\underbrace{e^{3ix} + e^{-3ix}}_{=2\cos(3x)} + 3\underbrace{\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)}_{=2\cos(x)}\right) \\
&= \frac{2\cos(3x) + 6\cos(x)}{8}
\end{aligned}$$

Ce qui redonne bien $\cos^3(x) = \dfrac{3\cos(x) + \cos(3x)}{4}$. De la même façon pour le sinus, en remarquant que $(2i)^3 = 8i^3 = -8i$ :

$$\begin{aligned}
\sin^3(x) &= \frac{1}{-8i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^3 \\
&= \frac{1}{-8i}\left(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right) \\
&= \frac{1}{-8i}\left(\underbrace{e^{3ix} - e^{-3ix}}_{=2i\sin(3x)} - 3\underbrace{\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)}_{=2i\sin(x)}\right) \\
&= \frac{2i\sin(3x) - 6i\sin(x)}{-8i}
\end{aligned}$$

Ce qui redonne bien $\sin^3(x) = \dfrac{3\sin(x) - \sin(3x)}{4}$.

## EXERCICE 21 ⋆⋆

*On démontre ici l'égalité* $\cos^2(x)\sin^2(x) = \dfrac{1 - \cos(4x)}{8}$.

Soit $x$ un réel quelconque. On applique les formules d'Euler au produit $\cos(x)\sin(x)$ :

$$\begin{aligned}
\cos(x)\sin(x) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \times \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\
&= \frac{\left(e^{ix}\right)^2 - \left(e^{-ix}\right)^2}{4i} \\
&= \frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{4i}
\end{aligned}$$

On élève alors cette égalité au carré, en remarquant que $(4i)^2 = 16i^2 = -16$ :

$$\begin{aligned}\cos^2(x)\sin^2(x) &= \frac{\left(e^{2ix} - e^{-2ix}\right)^2}{-16} \\ &= \frac{e^{4ix} - 2e^{2ix}e^{-2ix} + e^{-4ix}}{-16} \\ &= \frac{\overbrace{e^{4ix} + e^{-4ix}}^{=2\cos(4x)} - 2}{-16} \\ &= \frac{2\cos(4x) - 2}{-16}\end{aligned}$$

On en déduit donc que pour tout réel $x$ :

$$\boxed{\cos^2(x)\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(4x)}{8}}$$

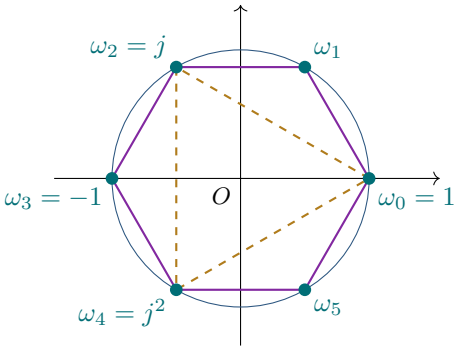
## Exercices d'approfondissement

### EXERCICE 22 ⋆⋆⋆

1. Si $z^n = 1$, alors $z \neq 0$ et, d'après la Proposition 4, $|z|^n = |z^n| = 1$ ; comme $|z|$ est un réel positif, $\boxed{|z| = 1}$. De plus $n\arg(z) \equiv \arg(z^n) = \arg(1) \equiv 0\ [2\pi]$.

2. D'après la question 1, $z = e^{i\theta}$ avec $n\theta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, soit $\theta = \dfrac{2k\pi}{n}$. Réciproquement, $\left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n = e^{2ik\pi} = 1$. Enfin, deux valeurs de $k$ donnent le même nombre si et seulement si leurs arguments diffèrent d'un multiple de $2\pi$, c'est-à-dire si $k$ et $k'$ sont congrus modulo $n$ (chapitre 4) : il suffit de prendre $k \in [\![0; n-1]\!]$, et l'on obtient $n$ racines distinctes.

3. — $n = 3$ : $1$, $e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, c'est-à-dire $1$, $j$ et $j^2$ : on retrouve les solutions de $z^3 = 1$ de l'exercice 20 du chapitre 2.
   — $n = 4$ : $1$, $i$, $-1$, $-i$.
   — $n = 6$ : $\pm 1$, $\pm\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\pm\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.




Les racines sixièmes de l'unité (en bleu pétrole) sont les sommets d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle de centre $O$ et de rayon $1$ ; une sur deux est une racine cubique de l'unité, sommet du triangle équilatéral en pointillés.

4. Comme $\omega_1 \neq 1$ et $\omega_1^n = 1$, la formule de la somme géométrique (Proposition 7 du chapitre 2) donne :

$$1 + \omega_1 + \cdots + \omega_1^{n-1} = \frac{\omega_1^n - 1}{\omega_1 - 1} = 0.$$

Or $\omega_1^k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \cos\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right)$ ; en séparant parties réelle et imaginaire, on obtient les deux sommes nulles.

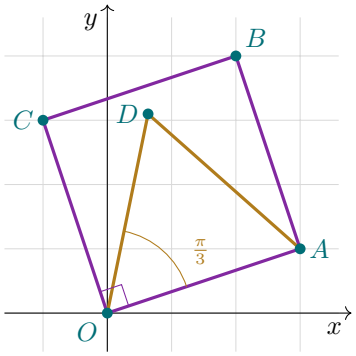
Pour $n = 3$, on retrouve $1 + j + j^2 = 0$, utilisé dans l'exercice 20 du chapitre 2 ; l'exercice 9 en est une variante avec un décalage $x$, généralisée dans l'exercice 31.

## EXERCICE 23 ⋆⋆⋆

1. D'après la Proposition 4, $|z'| = \left|e^{i\theta}\right| |z| = |z|$, donc $OM' = OM$, et $\arg(z') \equiv \theta + \arg(z)\ [2\pi]$, c'est-à-dire $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \theta\ [2\pi]$. Le point $M'$ s'obtient donc en **tournant** $M$ d'un angle $\theta$ autour de $O$ : c'est l'image de $M$ par la rotation de centre $O$ et d'angle $\theta$.
2. Le point $C$ est l'image de $A$ par la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, et $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ : $c = ia = i(3+i) = \boxed{-1+3i}$. Le quadrilatère $OABC$ est un carré lorsque $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$, et les coordonnées s'ajoutant, $b = a + c = \boxed{2+4i}$.
3. On a $d = e^{i\frac{\pi}{3}} a = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(3+i)$, soit :

$$\boxed{d = \frac{3-\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1+3\sqrt{3}}{2}} \approx 0{,}63 + 3{,}10\,i.$$

D'après l'exercice 4 : $OA = |a| = \sqrt{10}$, $OD = |d| = |a| = \sqrt{10}$ et $AD = |d-a| = \left|e^{i\frac{\pi}{3}} - 1\right| |a|$. Or $e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, de module 1. Donc $AD = \sqrt{10}$ et $\boxed{OAD \text{ est équilatéral}}$.




Le carré $OABC$ (en violet) s'obtient avec un quart de tour, le triangle équilatéral $OAD$ (en ocre) avec un sixième de tour : multiplier une affixe par $e^{i\theta}$, c'est tourner.

## EXERCICE 24 ⋆⋆⋆

1. On factorise : $e^{i\alpha} - 1 = e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right) = e^{i\frac{\alpha}{2}} \times 2i\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$, d'après la formule d'Euler pour le sinus. Ainsi $\boxed{e^{i\alpha} - 1 = 2i\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}}$.
2. $S$ est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{ix}$, différente de 1 puisque $x \in ]0; 2\pi[$ :

$$S = \frac{\left(e^{ix}\right)^{n+1} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{2i\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) e^{i\frac{(n+1)x}{2}}}{2i\sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}} = \boxed{e^{i\frac{nx}{2}}\,\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}},$$

en appliquant la question 1 avec $\alpha = (n+1)x$ et $\alpha = x$ ; on a bien $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$.

3. Comme $e^{ikx} = \cos(kx) + i\sin(kx)$, on prend les parties réelle et imaginaire de $S$ :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

*Vérification pour $n = 1$ :* le membre de droite vaut $\dfrac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin(x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \dfrac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) \times 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 + \cos(x)$, ce qui est bien $\cos(0) + \cos(x)$.

La technique de la question 1, dite de l'*arc moitié*, est réutilisée dans les exercices 29, 34, 35 et 37.

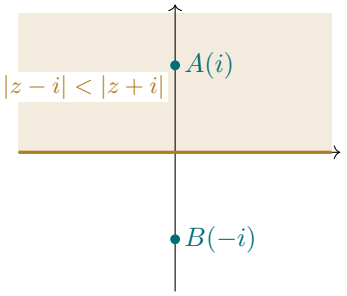
## Pour aller plus loin

### EXERCICE 25 ⋆⋆

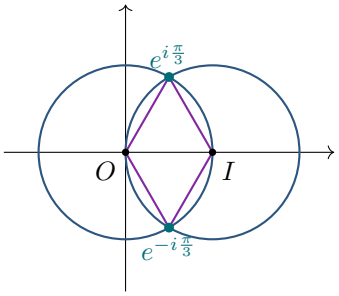
1. a) **Par le calcul.** Avec $z = x+iy$ : $|z-i|^2 = x^2+(y-1)^2$ et $|z+i|^2 = x^2+(y+1)^2$. L'égalité équivaut à $-2y = 2y$, soit $y = 0$ : $z$ est réel. **Géométriquement.** En notant $A$ et $B$ les points d'affixes $i$ et $-i$, la relation (1) s'écrit $AM = BM$ (exercice 4) : $M$ est sur la médiatrice de $[AB]$, qui est l'axe des abscisses. Dans les deux cas, $\boxed{\text{l'ensemble cherché est } \mathbb{R}}$.

   b) De même, $|z-i| < |z+i|$ équivaut à $-2y < 2y$, soit $y > 0$ : c'est le $\boxed{\text{demi-plan ouvert } \operatorname{Im}(z) > 0}$, formé des points plus proches de $A$ que de $B$.

2. $|z| = 1$ et $|z-1| = 1$ signifient $x^2+y^2 = 1$ et $(x-1)^2+y^2 = 1$. Par différence, $2x-1 = 0$, d'où $x = \dfrac{1}{2}$ et $y^2 = \dfrac{3}{4}$. Ainsi $\boxed{z = \dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}}$. Géométriquement, ce sont les points d'intersection des cercles de rayon 1 centrés en $O$ et au point $I$ d'affixe 1 : chacun forme avec $O$ et $I$ un triangle équilatéral.



Question 1



Question 2

À gauche, la médiatrice de $[AB]$ (axe réel) sépare le plan en deux, et le demi-plan coloré est celui des points plus proches de $A$ ; à droite, les deux solutions sont les sommets des triangles équilatéraux construits sur $[OI]$.

### EXERCICE 26 ⋆⋆

1. $|1+i\sqrt{3}| = 2$ et $1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$. D'après la formule de Moivre :

$$(1+i\sqrt{3})^n = 2^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right),$$

   qui est un réel positif si et seulement si $\frac{n\pi}{3} \equiv 0\ [2\pi]$, c'est-à-dire :

$$\boxed{n \equiv 0\ [6]}, \qquad n \in \{0\,;6\,;12\,;\dots\}$$

2. Soit $z = re^{i\theta}$ non nul ($z = 0$ convient dans les deux cas). Alors $z^2 = r^2e^{2i\theta}$.

   a) $z^2$ est réel si et seulement si $2\theta \equiv 0\ [\pi]$, soit $\theta \equiv 0\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$ :

$$\boxed{z \text{ est réel ou imaginaire pur}}$$

   b) $z^2$ est imaginaire pur si et seulement si $2\theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, soit $\theta \equiv \frac{\pi}{4}\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$ :

$$\boxed{z \text{ est sur l'une des deux bissectrices}}$$

   c'est-à-dire $z = x(1+i)$ ou $z = x(1-i)$ avec $x$ réel.

On retrouve les résultats de l'exercice 30 du chapitre 2, obtenus alors par la forme algébrique.

## EXERCICE 27 ⋆⋆

Si $z^5 = \overline{z}$, alors $|z|^5 = |\overline{z}| = |z|$, donc $|z|\left(|z|^4 - 1\right) = 0$ : $|z| = 0$ ou $|z| = 1$, puisque $|z|$ est un réel positif. Le nombre 0 est solution. Si $|z| = 1$, alors $z\overline{z} = 1$, donc $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$ et l'équation équivaut à $z^6 = 1$. D'après l'exercice 22, $z$ est l'une des six racines sixièmes de l'unité $e^{i\frac{k\pi}{3}}$, $k \in [\![0;5]\!]$, qui sont bien de module 1. Réciproquement, ces six nombres vérifient $z^5 = \dfrac{z^6}{z} = \dfrac{1}{z} = \overline{z}$.

$$\boxed{\mathcal{S} = \{0\} \cup \left\{e^{i\frac{k\pi}{3}} \ ; \ k \in [\![0;5]\!]\right\}}$$

L'équation admet donc 7 solutions : 0 et les sommets de l'hexagone régulier de l'exercice 22.

## EXERCICE 28 ⋆⋆

1. On note $c = \cos(x)$ et $s = \sin(x)$. D'après la formule de Moivre et le binôme :

$$\cos(4x) + i\sin(4x) = (c + is)^4 = c^4 + 4ic^3s - 6c^2s^2 - 4ics^3 + s^4.$$

Les parties réelles donnent, avec $s^2 = 1 - c^2$ : $\cos(4x) = c^4 - 6c^2(1 - c^2) + (1 - c^2)^2 = 8c^4 - 8c^2 + 1$. Les parties imaginaires donnent $\sin(4x) = s\left(4c^3 - 4c(1 - c^2)\right) = s\left(8c^3 - 4c\right)$. Ainsi :

$$\boxed{P(X) = 8X^4 - 8X^2 + 1 \qquad \text{et} \qquad Q(X) = 8X^3 - 4X}$$

2. a) C'est l'exercice 20, question 2 : $\boxed{\cos^3(x) = \dfrac{3}{4}\cos(x) + \dfrac{1}{4}\cos(3x)}$.

b) D'après la formule d'Euler et le binôme :

$$\cos^4(x) = \frac{\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^4}{16} = \frac{e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}}{16} = \frac{2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6}{16},$$

d'où $\boxed{\cos^4(x) = \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{2}\cos(2x) + \dfrac{1}{8}\cos(4x)}$. *Vérification :* pour $x = 0$, $\frac{3}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 1$.

## EXERCICE 29 ⋆⋆

a) On factorise $e^{i\alpha}$, puis on applique la technique de l'arc moitié à $1 + e^{i(\beta-\alpha)}$ :

$$Z = e^{i\alpha}\left(1 + e^{i(\beta-\alpha)}\right) = e^{i\alpha}e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}\left(e^{-i\frac{\beta-\alpha}{2}} + e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Donc $\boxed{|Z| = 2\left|\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\right|}$. Si $\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) > 0$, un argument de $Z$ est $\frac{\alpha+\beta}{2}$ ; s'il est négatif, c'est $\frac{\alpha+\beta}{2} + \pi$ (Proposition 1).

b) En prenant les parties réelle et imaginaire :

$$\boxed{\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right), \qquad \sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

Géométriquement, $Z$ est la diagonale du losange construit sur les deux vecteurs unitaires d'affixes $e^{i\alpha}$ et $e^{i\beta}$ : elle porte la bissectrice, d'angle $\frac{\alpha+\beta}{2}$.

## EXERCICE 30 ⋆⋆⋆

On remarque que $\sin(\theta) + i\cos(\theta) = i\big(\cos(\theta) - i\sin(\theta)\big) = ie^{-i\theta}$. De même, $\sin(n\theta) + i\cos(n\theta) = ie^{-in\theta}$. L'égalité demandée s'écrit donc $i^n e^{-in\theta} = ie^{-in\theta}$, c'est-à-dire, en divisant par $e^{-in\theta} \neq 0$, $i^n = i$. D'après l'exercice 3 du chapitre 2, cela équivaut à $\boxed{n \equiv 1\ [4]}$ : $n \in \{1\ ;5\ ;9\ ;\dots\}$. La condition ne dépend pas de $\theta$, ce qui justifie le « pour tout $\theta$ ».

## EXERCICE 31 ⋆⋆⋆

On a $\cos\left(x+\frac{2k\pi}{n}\right) = \mathcal{R}e\left(e^{ix}e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = \mathcal{R}e\left(e^{ix}\omega_k\right)$ avec les notations de l'exercice 22. Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(x+\frac{2k\pi}{n}\right) = \mathcal{R}e\left(e^{ix}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_1^k\right) = \mathcal{R}e\left(e^{ix}\times 0\right) = \boxed{0}.$$

Pour $n=3$, on retrouve la question 1.(a) de l'exercice 9 : $\cos(x)+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0$.

## EXERCICE 32 ⋆⋆⋆

a) Comme dans l'exercice 28, avec $c=\cos(x)$ et $s=\sin(x)$, la partie réelle de $(c+is)^5$ vaut $c^5-10c^3s^2+5cs^4$. En remplaçant $s^2$ par $1-c^2$ :

$$\cos(5x) = c^5-10c^3(1-c^2)+5c(1-c^2)^2 = 16c^5-20c^3+5c, \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P(X)=16X^5-20X^3+5X}.$$

b) Pour $x=\frac{\pi}{10}$, $\cos(5x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, donc $c=\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ vérifie $c\left(16c^4-20c^2+5\right)=0$. Comme $c>0$, $c^2$ est racine de $16X^2-20X+5=0$, de discriminant 80 : $c^2=\frac{5\pm\sqrt{5}}{8}$. Or $\frac{\pi}{10}<\frac{\pi}{4}$, donc $c>\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $c^2>\frac{1}{2}$ ; seule la valeur $\frac{5+\sqrt{5}}{8}\approx 0{,}90$ convient ($\frac{5-\sqrt{5}}{8}\approx 0{,}35$). Ainsi :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}} \approx 0{,}951.$$

L'autre valeur $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ est $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$, puisque $5\times\frac{3\pi}{10}=\frac{3\pi}{2}$ annule aussi le cosinus.

## EXERCICE 33 ⋆⋆⋆

a) $z^5=e^{2i\pi}=1$ et $z\neq 1$, donc $1+z+z^2+z^3+z^4=\dfrac{z^5-1}{z-1}=0$ (exercice 22).

b) $\dfrac{1}{z}=e^{-\frac{2i\pi}{5}}$, donc $z+\dfrac{1}{z}=2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)=x$ (formule d'Euler).

c) $x^2=z^2+2+\dfrac{1}{z^2}$. En divisant la relation a) par $z^2$, on obtient $z^2+z+1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}=0$, c'est-à-dire $(x^2-2)+x+1=0$ : $\boxed{x^2+x-1=0}$. Comme $x>0$ ($\frac{2\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$), $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, d'où :

$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}} \approx 0{,}309.$$

d) $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)>0$ et $\sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)=1-\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16}=\frac{10+2\sqrt{5}}{16}$, d'où $\boxed{\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}} \approx 0{,}951.$

On retrouve la méthode de l'exercice 25 du chapitre 2 (équation réciproque), et l'on remarque que $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$, en accord avec l'exercice 32.

## EXERCICE 34 ⋆⋆⋆

D'après la formule du binôme, $(1+e^{ix})^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ikx}$. Par la technique de l'arc moitié (exercice 29 avec $\alpha=0$, $\beta=x$), $1+e^{ix}=2\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$, d'où :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ikx}=2^n\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n e^{i\frac{nx}{2}}.$$

En prenant les parties réelle et imaginaire, on obtient les deux formules demandées. *Vérification :* pour $x=0$, la première donne $\sum\binom{n}{k}=2^n$.

## EXERCICE 35 ⋆⋆⋆

Si $z = i$, l'équation donne $0 = (2i)^n$, ce qui est faux : une solution vérifie $z \neq i$, et l'équation équivaut à $w^n = 1$ avec $w = \dfrac{z+i}{z-i}$. D'après l'exercice 22, $w = e^{i\theta_k}$ avec $\theta_k = \dfrac{2k\pi}{n}$, $k \in [\![0; n-1]\!]$. Le cas $k = 0$ est impossible, puisque $w = 1$ donnerait $z + i = z - i$. Pour $k \in [\![1; n-1]\!]$, on isole $z$ :

$$z + i = w(z - i) \iff z(1 - w) = -i(1 + w) \iff z = -i\,\frac{1 + e^{i\theta_k}}{1 - e^{i\theta_k}}.$$

Par l'arc moitié, $1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $1 - e^{i\theta} = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$ (exercice 24), d'où :

$$\boxed{z = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}, \qquad k \in [\![1; n-1]\!]}$$

Ces $n - 1$ nombres sont réels et distincts. *Vérification pour $n = 2$ :* $z = \frac{\cos(\pi/2)}{\sin(\pi/2)} = 0$, et en effet $(0 - i)^2 = (0 + i)^2 = -1$. Géométriquement, la relation impose $|z - i| = |z + i|$, donc $z$ réel (exercice 25) : c'est cohérent.

## EXERCICE 36 ⋆⋆⋆⋆

a) Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors $|\overline{a}z| = |a| \neq 1$, donc $1 - \overline{a}z \neq 0$ et le quotient est défini. Comme $z\overline{z} = 1$ :

$$1 - \overline{a}z = z\overline{z} - \overline{a}z = z\left(\overline{z} - \overline{a}\right) = z\,\overline{z - a},$$

donc $|1 - \overline{a}z| = |z|\,|z - a| = |z - a|$, et $\boxed{\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| = 1}$.

b) Soient $a$ et $z$ dans $D$. Alors $|\overline{a}z| < 1$, donc $1 - \overline{a}z \neq 0$. En développant avec les conjugués :

$$\begin{aligned} |1 - \overline{a}z|^2 - |z - a|^2 &= (1 - \overline{a}z)(1 - a\overline{z}) - (z - a)(\overline{z} - \overline{a}) \\ &= 1 - a\overline{z} - \overline{a}z + |a|^2|z|^2 - |z|^2 + z\overline{a} + a\overline{z} - |a|^2 \\ &= (1 - |a|^2)(1 - |z|^2) > 0. \end{aligned}$$

Ainsi $|z - a| < |1 - \overline{a}z|$, et $\boxed{\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| < 1}$.

Ces transformations, qui conservent le cercle unité et le disque qu'il borde, jouent un rôle central en analyse complexe et en géométrie hyperbolique.

## EXERCICE 37 ⋆⋆⋆⋆

$z = -1$ n'est pas solution (le membre de gauche vaut $-8$, celui de droite 0). Pour $z \neq -1$, l'équation équivaut à $w^3 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ avec $w = \dfrac{z-1}{z+1}$. Comme dans l'exercice 22, $|w| = 1$ et $3\arg(w) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, d'où $w = e^{i\varphi}$ avec $\varphi \in \left\{\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{5\pi}{6}\,;\,\frac{3\pi}{2}\right\}$. Comme $w \neq 1$, on isole $z$ :

$$z - 1 = w(z + 1) \iff z = \frac{1 + w}{1 - w} = \frac{2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) e^{i\frac{\varphi}{2}}}{-2i\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) e^{i\frac{\varphi}{2}}} = i\,\frac{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

Avec $\frac{\varphi}{2} \in \left\{\frac{\pi}{12}\,;\,\frac{5\pi}{12}\,;\,\frac{3\pi}{4}\right\}$ : d'après l'exercice 11, $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$, donc $\dfrac{\cos(\pi/12)}{\sin(\pi/12)} = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$ ; comme $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$, $\dfrac{\cos(5\pi/12)}{\sin(5\pi/12)} = \dfrac{\sin(\pi/12)}{\cos(\pi/12)} = 2 - \sqrt{3}$ ; enfin $\dfrac{\cos(3\pi/4)}{\sin(3\pi/4)} = -1$. Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{i(2 + \sqrt{3})\,;\ i(2 - \sqrt{3})\,;\ -i\right\}}$$

*Vérification pour $z = -i$ :* $(-1 - i)^3 = 2 - 2i$ et $i(1 - i)^3 = i(-2 - 2i) = 2 - 2i$.