EXERCICES – CHAPITRE 5

GÉOMÉTRIE COMPLEXE

Affixe, module et argument

EXERCICE 1 ⋆

On considère le nombre complexe $z = 2 + i$. Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, placer :

a) Le point A d'affixe z.

b) Le point B d'affixe $-z$.

c) Le point C d'affixe $\overline{z}$.

d) Le point D d'affixe $z - 3$.

e) Le point E d'affixe $z - 3i$.

f) Le point F d'affixe $\overline{z + 2i}$.

EXERCICE 2 ⋆

1. Sans calcul, en plaçant les points correspondants, donner le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

$$3, \qquad -2, \qquad 5i, \qquad -i, \qquad 1+i, \qquad -1-i.$$

2. Soit z un nombre complexe de module 2 et d'argument $\dfrac{\pi}{3}$. Donner le module et un argument de :

$$-z, \qquad \overline{z}, \qquad iz, \qquad z^2, \qquad \frac{1}{z}.$$

EXERCICE 3 ⋆⋆

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

a) $|z| = 2$;

b) $|z| \leqslant 3$;

c) $z \neq 0$ et $\arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$;

d) $z \neq 0$ et $\arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$;

e) $|z| = 1$ et $\mathrm{Re}(z) \geqslant 0$;

f) $1 \leqslant |z| \leqslant 2$ et $\mathrm{Im}(z) \geqslant 0$.

EXERCICE 4 : DISTANCE ENTRE DEUX POINTS ⋆⋆

Soient A et B deux points d'affixes respectives $z_A = x_A + iy_A$ et $z_B = x_B + iy_B$, avec x_A, y_A, x_B, y_B réels.

1. À l'aide de la formule de la distance dans un repère orthonormé, montrer que $AB = |z_B - z_A|$.
2. On considère les points A, B et C d'affixes $1 + i$, $3 + 2i$ et $3i$. Déterminer la nature du triangle ABC.
3. Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 2i| = 3$.

Forme trigonométrique

EXERCICE 5 ⋆

Donner la forme trigonométrique des nombres suivants :

1. $z_1 = 2 + 2i\sqrt{3}$
2. $z_2 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$
3. $z_3 = 4 - 4i$
4. $z_4 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{i\sqrt{3}}{4}$
5. $z_5 = -2i$
6. $z_6 = \dfrac{4}{1-i}$

EXERCICE 6 ⋆

Déterminer la forme algébrique des nombres suivants :

1. $z_1 = 2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$
2. $z_2 = 3\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$
3. $z_3 = 4\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$
4. $z_4 = \dfrac{1}{2}\left(\cos\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)\right)$

EXERCICE 7 ⋆

On pose $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

1. Déterminer le module et un argument de z_1 et de z_2.
2. En utilisant la Proposition 4 du cours, en déduire le module et un argument de :
$$z_1 z_2, \qquad \frac{z_1}{z_2}, \qquad z_1^4, \qquad z_2^3, \qquad z_1^2 z_2.$$
3. En déduire la forme algébrique de z_1^4 et de z_2^3, et vérifier ces résultats par le calcul.

Formules de trigonométrie

EXERCICE 8 ⋆

1. Déterminer la valeur de $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}$.
2. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.
3. Trouver par une méthode analogue la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 9 ⋆

Soit x un réel quelconque.

1. Calculer les expressions suivantes :
   (a) $A = \cos(x) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$
   (b) $B = \sin(x) + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$
2. Réduire autant que possible les expressions suivantes :
   (a) $C = \cos(3x)\cos(5x) + \sin(3x)\sin(5x)$
   (b) $D = \cos(x)\cos(2x) - \sin(x)\sin(2x)$
   (c) $E = \cos(7x)\sin(6x) - \sin(7x)\cos(6x)$
   (d) $F = \cos(3x)\sin(2x) + \cos(2x)\sin(3x)$

EXERCICE 10 ⋆

On note a le réel de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos(a) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.
Calculer $\cos(2a)$, et en déduire la valeur de a.

EXERCICE 11 ⋆

Soit x un réel quelconque tel que $x \not\equiv 0 \ \left[\frac{\pi}{2}\right]$.

1. Simplifier l'expression :
$$\frac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)}$$
2. En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 12 ⋆⋆

1. À l'aide des formules de duplication, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
2. Résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'équation $\cos(2x) = \cos(x)$. On pourra poser $X = \cos(x)$.
3. Résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'équation $\sin(2x) = \sin(x)$.

Opérations et forme exponentielle

EXERCICE 13 ⋆

Trouver la forme trigonométrique des complexes suivants, en utilisant les opérations sur modules et arguments :

1. $z_1 = (1-i)^6$
2. $z_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1+i}$
3. $z_3 = \frac{(\sqrt{3}+i)^9}{(1+i)^{12}}$

EXERCICE 14 ⋆

On considère les deux nombres complexes suivants : $z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$.

1. Donner le module et un argument de z_1, z_2 et $\frac{z_1}{z_2}$.
2. Donner la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$.

3. En déduire que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

EXERCICE 15 ⋆

Dans un repère orthonormé, placer les points :

a) A d'affixe $e^{i\frac{\pi}{4}}$

b) B d'affixe $\frac{1}{2}e^{i\pi}$

c) C d'affixe $2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

d) D d'affixe $5e^{i2\pi}$

EXERCICE 16 ⋆

Donner une forme exponentielle de chacun des complexes suivants :

1. $z_1 = 2\sqrt{3} + 6i$
2. $z_2 = (1 + i\sqrt{3})^4$
3. $z_3 = 2\big(\cos(\frac{\pi}{5}) + i\sin(\frac{\pi}{5})\big)$

EXERCICE 17 ⋆⋆

Dans chacun des cas suivants, écrire z sous la forme exponentielle et en déduire la forme algébrique de $\overline{z}$ et $\frac{1}{z}$:

1. $z_1 = \dfrac{6}{1+i}$
2. $z_2 = 3ie^{i\frac{\pi}{3}}$
3. $z_3 = -12e^{i\frac{\pi}{4}}$

EXERCICE 18 ⋆

1. Écrire sous forme algébrique $e^{i\frac{\pi}{6}}$, $e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $e^{-i\frac{\pi}{2}}$ et $e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
2. Simplifier les expressions suivantes :

$$e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{6}}, \qquad \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^8, \qquad \frac{e^{i\frac{5\pi}{6}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}}, \qquad e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{-i\frac{2\pi}{3}}.$$

3. Soit θ un réel. Montrer que $\left|e^{i\theta}\right| = 1$ et que $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$.

Formules de Moivre et d'Euler

EXERCICE 19 ⋆⋆

1. Déterminer les formes exponentielles des complexes $1+i$ et $1-i$.
2. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ la forme trigonométrique de $S_n = (1+i)^n + (1-i)^n$.
3. Pour chacune des propositions suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse et justifier :
   - **Proposition A :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \in \mathbb{R}$.
   - **Proposition B :** Il existe une infinité d'entiers naturels n tels que $S_n = 0$.

EXERCICE 20 ⋆⋆

1. Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$ à l'aide de la formule de Moivre et du développement de $(a+b)^3$.
2. En déduire que : $\cos^3(x) = \dfrac{3\cos(x) + \cos(3x)}{4}$ et $\sin^3(x) = \dfrac{3\sin(x) - \sin(3x)}{4}$.
3. Retrouver ces deux formules à l'aide des formules d'Euler.

EXERCICE 21 ⋆⋆

En utilisant les formules d'Euler, montrer que pour tout réel x,

$$\cos^2(x)\sin^2(x) = \frac{1-\cos(4x)}{8}$$

Exercices d'approfondissement

EXERCICE 22 : RACINES n-IÈMES DE L'UNITÉ ⋆⋆⋆

Soit $n \geqslant 2$ un entier. On appelle *racine n-ième de l'unité* tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$.

1. Soit z une racine n-ième de l'unité. Montrer que $|z| = 1$, puis qu'un argument θ de z vérifie $n\theta \equiv 0\ [2\pi]$.
2. En déduire que les racines n-ièmes de l'unité sont les n nombres $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, pour $k \in [\![0; n-1]\!]$.
3. Donner la forme algébrique des racines n-ièmes de l'unité pour $n = 3$, $n = 4$ et $n = 6$, et les placer dans le plan. Que reconnaît-on pour $n = 3$?
4. Montrer que $1 + \omega_1 + \omega_1^2 + \cdots + \omega_1^{n-1} = 0$. En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0.$$

EXERCICE 23 : MULTIPLICATION PAR $e^{i\theta}$ ⋆⋆⋆

Soit θ un réel. À tout point M d'affixe $z \neq 0$, on associe le point M' d'affixe $z' = e^{i\theta}z$.

1. Montrer que $OM' = OM$ et que $\arg(z') \equiv \arg(z) + \theta\ [2\pi]$. Interpréter géométriquement.
2. On considère le point A d'affixe $a = 3 + i$. Déterminer l'affixe du point C tel que $OC = OA$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, puis celle du point B tel que $OABC$ soit un carré.
3. Déterminer l'affixe du point D obtenu en tournant A d'un angle $\frac{\pi}{3}$ autour de O. À l'aide de l'exercice 4, montrer que le triangle OAD est équilatéral.

EXERCICE 24 : UNE SOMME TRIGONOMÉTRIQUE ⋆⋆⋆

1. Soit α un réel. En factorisant par $e^{i\frac{\alpha}{2}}$, montrer que $e^{i\alpha} - 1 = 2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$.
2. Soient $x \in]0; 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose $S = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$. Montrer que :

$$S = \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = e^{i\frac{nx}{2}} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

3. En déduire une expression simple de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et de $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$, puis vérifier le résultat pour $n = 1$.

Pour aller plus loin

EXERCICE 25 ⋆⋆

1. a) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

$$(1) \qquad |z-i| = |z+i|$$

par deux méthodes :
- par un calcul en écrivant z sous forme algébrique ;
- en interprétant géométriquement la relation (1).

b) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que : $|z-i| < |z+i|$.

2. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z| = |z-1| = 1$. Interpréter géométriquement.

EXERCICE 26 ⋆⋆

1. Mettre $1+i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique et trouver les entiers naturels n tels que $(1+i\sqrt{3})^n \in \mathbb{R}^+$.
2. a) En utilisant la forme trigonométrique, déterminer les nombres complexes dont le carré est un nombre réel.

b) En utilisant la forme trigonométrique, déterminer les nombres complexes dont le carré est un nombre imaginaire pur.

EXERCICE 27 ⋆⋆

On veut résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(1) \qquad z^5 = \overline{z}.$$

Montrer que, si z vérifie (1), alors z est nul ou de module 1. Conclure ; on montrera en particulier que l'équation admet 7 solutions.

EXERCICE 28 ⋆⋆

1. Trouver deux fonctions polynomiales P et Q telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos(4x) = P\big(\cos(x)\big), \qquad \sin(4x) = \sin(x)\, Q\big(\cos(x)\big).$$

2. **Linéarisation.**

a) Écrire $x \mapsto \cos^3(x)$ comme combinaison linéaire des fonctions $x \mapsto \cos(kx)$, $k \in \{0, \dots, 3\}$.

b) Écrire $x \mapsto \cos^4(x)$ comme combinaison linéaire des fonctions $x \mapsto \cos(kx)$, $k \in \{0, \dots, 4\}$.

EXERCICE 29 ⋆⋆

Soient α et β deux réels, $Z = e^{i\alpha} + e^{i\beta}$.

a) En factorisant $e^{i\alpha}$ dans Z, trouver le module de Z et, si Z est non nul, un argument de Z.

b) Retrouver les formules donnant $\cos(\alpha) + \cos(\beta)$ et $\sin(\alpha) + \sin(\beta)$.

EXERCICE 30 ⋆⋆⋆

Quels sont les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad \big(\sin(\theta) + i\cos(\theta)\big)^n = \sin(n\theta) + i\cos(n\theta) \ ?$$

EXERCICE 31 ⋆⋆⋆

Montrer, pour x réel et n entier $\geqslant 2$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(x + \frac{2k\pi}{n}\right) = 0.$$

On pourra utiliser l'exercice 22.

EXERCICE 32 ⋆⋆⋆

a) Déterminer une fonction polynomiale P telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(5x) = P\big(\cos(x)\big)$.

b) En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

EXERCICE 33 : CALCUL DE $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ ⋆⋆⋆

Soient $z = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ et $x = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

a) Montrer que $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$.

b) Vérifier l'égalité $x = z + \frac{1}{z}$.

c) Exprimer x^2 en fonction de z. En utilisant a), trouver alors une équation du second degré vérifiée par x. En déduire une expression simple du nombre $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

d) Calculer $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

EXERCICE 34 ⋆⋆⋆

Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$. En appliquant la formule du binôme à $(1+e^{ix})^n$ et en utilisant la technique de l'arc moitié (exercice 29), établir les formules

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) = 2^n \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n \cos\left(\frac{nx}{2}\right),$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx) = 2^n \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n \sin\left(\frac{nx}{2}\right).$$

EXERCICE 35 ⋆⋆⋆

Soit n un entier $\geqslant 2$. Déterminer les complexes z tels que :

$$(z-i)^n = (z+i)^n.$$

On pourra noter qu'une solution z de cette équation est nécessairement différente de i et réécrire l'équation sous la forme :

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1.$$

EXERCICE 36 ⋆⋆⋆⋆

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. Il est conseillé, dans cet exercice, d'éviter les parties réelles et imaginaires et de travailler avec les carrés des modules écrits avec l'aide du conjugué. Soit $a \in \mathbb{C}$.

a) Montrer que, si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$,

$$\forall z \in \mathbb{U}, \qquad \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \in \mathbb{U}.$$

b) Soit $D = \{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| < 1\}$. Montrer que, si $a \in D$, alors

$$\forall z \in D, \qquad \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \in D.$$

EXERCICE 37 ⋆⋆⋆⋆

Trouver les nombres complexes z tels que

$$(z-1)^3 = i(z+1)^3.$$