CORRIGÉ – CHAPITRE 6

APPLICATIONS DES MATRICES

Systèmes linéaires

EXERCICE 1 ⋆

Chaque système s'écrit $AX = B$, où A est la matrice des coefficients. Si A est inversible, l'unique solution est $X = A^{-1}B$. On rappelle que pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de déterminant $\det(A) = ad - bc$ non nul :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$. On calcule $\det(A) = 2 \times 1 - (-3) \times (-2) = 2 - 6 = -4 \neq 0$, donc :

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7-15 \\ 14-10 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{S = \{(2\,;-1)\}}$$

On vérifie : $2\times 2 - 3\times(-1) = 4+3 = 7$ et $-2\times 2 + (-1) = -5$: les deux équations sont vérifiées.

2. $A = \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, avec $\det(A) = -6 \times 14 - 7 \times 3 = -84 - 21 = -105 \neq 0$:

$$A^{-1} = -\frac{1}{105}\begin{pmatrix} 14 & -7 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{105}\begin{pmatrix} 14\times(-3) + (-7)\times(-1) \\ (-3)\times(-3) + (-6)\times(-1) \end{pmatrix} = -\frac{1}{105}\begin{pmatrix} -35 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{S = \left\{\left(\frac{1}{3}\,;-\frac{1}{7}\right)\right\}}$$

3. On commence par simplifier les radicaux : $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$. Le système s'écrit donc :

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2} & 3\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Son déterminant vaut :

$$\det(A) = \sqrt{2}\times 3\sqrt{3} - \left(-\sqrt{3}\right)\times 2\sqrt{2} = 3\sqrt{6} + 2\sqrt{6} = 5\sqrt{6} \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 3\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ -2\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{3\sqrt{3}\times(-1) + \sqrt{3}\times 13}{5\sqrt{6}} = \frac{10\sqrt{3}}{5\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$y = \frac{-2\sqrt{2}\times(-1)+\sqrt{2}\times 13}{5\sqrt{6}} = \frac{15\sqrt{2}}{5\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\boxed{S = \left\{\left(\sqrt{2}\,;\sqrt{3}\right)\right\}}$$

On vérifie : $\sqrt{2}\times\sqrt{2}-\sqrt{3}\times\sqrt{3} = 2-3 = -1$ et $2\sqrt{2}\times\sqrt{2}+3\sqrt{3}\times\sqrt{3} = 4+9 = 13$.

4. $A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 \\ \frac{7}{6} \end{pmatrix}$, avec $\det(A) = 6\times 3-(-9)\times 1 = 18+9 = 27 \neq 0$:

$$A^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{3\times 6+9\times\frac{7}{6}}{27} = \frac{18+\frac{21}{2}}{27} = \frac{\frac{57}{2}}{27} = \frac{57}{54} = \frac{19}{18}$$

$$y = \frac{-1\times 6+6\times\frac{7}{6}}{27} = \frac{-6+7}{27} = \frac{1}{27}$$

$$\boxed{S = \left\{\left(\frac{19}{18}\,;\frac{1}{27}\right)\right\}}$$

EXERCICE 2 ⋆

1. La calculatrice donne :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}}$$

On peut le contrôler à la main :

$$A\times A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = I_3$$

2. Le système s'écrit $AX = B$ avec $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. La matrice A étant inversible, la solution est unique et vaut $X = A^{-1}B$:

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3-1+0 \\ 0-1+5 \\ 3+0+5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{S = \{(1\,;2\,;4)\}}$$

Vérification dans la première équation : $1-2+4 = 3$, et dans la troisième : $-1+2+4 = 5$.

EXERCICE 3 ⋆

1. Les trois systèmes s'écrivent $AX = B$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et :

$$(S_1) : A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ B_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix} \quad ; \quad (S_2) : A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(S_3) : A_3 = A_2,\ B_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_1) = 3\times 2-(-1)\times 1 = 7 \quad ; \quad \det(A_2) = \det(A_3) = 2\times 2-4\times 1 = 0$$

2. Comme $\det(A_1) = 7 \neq 0$, la matrice A_1 est inversible :

$$A_1^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad X = A_1^{-1}B_1 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4+10 \\ -2+30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{S_1 = \{(2\,;4)\}}$$

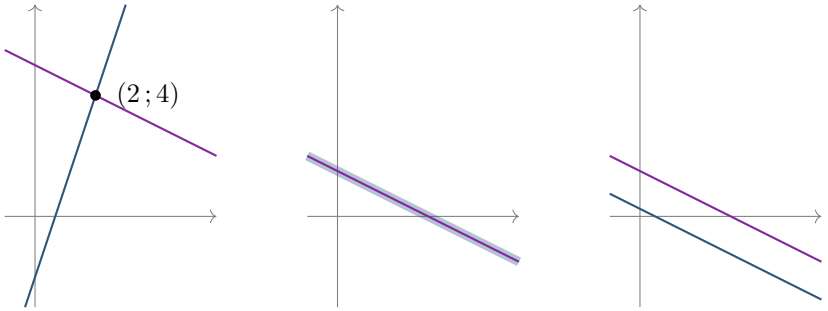
On vérifie : $3 \times 2 - 4 = 2$ et $2 + 2 \times 4 = 10$.

3. La matrice $A_2 = A_3$ a un déterminant nul : elle n'est pas inversible, et la Proposition 1 ne dit **rien** de ces deux systèmes. Il faut les étudier à la main. Dans les deux cas, la première équation est le double de $2x + 4y$, qui vaut $2(x + 2y)$.
   - Pour (S_3), la seconde équation donne $x + 2y = 3$, donc $2x + 4y = 6$, ce qui contredit $2x + 4y = 1$. **Le système (S_3) n'a aucune solution.**
   - Pour (S_2), la première équation est exactement le double de la seconde : le système se réduit à la seule équation $x + 2y = 3$, soit $x = 3 - 2y$. **Le système (S_2) admet une infinité de solutions** :

$$\boxed{S_2 = \{(3 - 2y\,; y),\ y \in \mathbb{R}\}}$$

   L'erreur la plus répandue est de conclure « $\det(A) = 0$, donc pas de solution ». Ce n'est pas ce que dit le cours : un déterminant nul signifie seulement qu'il n'y a pas *une unique* solution. Il peut n'y en avoir aucune, ou une infinité.

4. Chaque équation $ax + by = c$, avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$, est celle d'une droite, et résoudre le système revient à chercher les points communs aux deux droites.



(S_1) : sécantes — (S_2) : confondues — (S_3) : parallèles

En bleu ardoise la première équation, en violet la seconde. Les deux droites de (S_1) se coupent en un seul point. Celles de (S_2) sont confondues, d'où une infinité de points communs. Celles de (S_3) sont strictement parallèles et n'ont aucun point commun. Le déterminant nul traduit exactement le parallélisme des deux droites, comme en Seconde avec le critère de colinéarité des vecteurs directeurs.

EXERCICE 4 ⋆

1. Un point appartient à la parabole si ses coordonnées vérifient $y = ax^2 + bx + c$. On traduit donc les trois appartenances :

$$P(1\,;4) : a + b + c = 4 \qquad Q(-2\,;-5) : 4a - 2b + c = -5 \qquad R(-1\,;0) : a - b + c = 0$$

$$(S) : \begin{cases} a + b + c &= 4 \\ 4a - 2b + c &= -5 \\ a - b + c &= 0 \end{cases}$$

Les inconnues sont ici a, b et c — et non x et y. D'où l'écriture matricielle $AX = B$ avec :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

2. Il suffit de vérifier que $AC = I_3$:

$$AC = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 4 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 0 & -3\\ 2 & -2 & 6\end{pmatrix}$$

Ligne par ligne :

$$\begin{array}{ll}\text{ligne 1 :} & (1+3+2\ ;\ 2+0-2\ ;\ -3-3+6) = (6\ ;\ 0\ ;\ 0)\\ \text{ligne 2 :} & (4-6+2\ ;\ 8+0-2\ ;\ -12+6+6) = (0\ ;\ 6\ ;\ 0)\\ \text{ligne 3 :} & (1-3+2\ ;\ 2-0-2\ ;\ -3+3+6) = (0\ ;\ 0\ ;\ 6)\end{array}$$

$$AC = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix} = I_3 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{C = A^{-1}}$$

3. $X = A^{-1}B = CB$:

$$X = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 0 & -3\\ 2 & -2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ -5\\ 0\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}4-10-0\\ 12-0-0\\ 8+10+0\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-6\\ 12\\ 18\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

$$\boxed{a = -1 \quad ; \quad b = 2 \quad ; \quad c = 3}$$

La parabole cherchée a donc pour équation :

$$\boxed{y = -x^2 + 2x + 3}$$

On vérifie sur les trois points : $-1+2+3 = 4$ pour P, $-4-4+3 = -5$ pour Q, et $-1-2+3 = 0$ pour R.

EXERCICE 5 ⋆⋆

1. Le système et son écriture matricielle sont :

$$\left\{\begin{array}{rcl}3x + 2y + z &=& 7{,}10\\ 2x + 4y + 2z &=& 9{,}80\\ 5x + y + 3z &=& 10{,}40\end{array}\right. \iff \underbrace{\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 5 & 1 & 3\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix}7{,}10\\ 9{,}80\\ 10{,}40\end{pmatrix}}_{B}$$

2. La calculatrice donne :

$$A^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix}10 & -5 & 0\\ 4 & 4 & -4\\ -18 & 7 & 8\end{pmatrix} \qquad \text{puis} \qquad X = A^{-1}B = \begin{pmatrix}1{,}10\\ 1{,}30\\ 1{,}20\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{un croissant coûte 1,10 €, un pain au chocolat 1,30 €, une baguette 1,20 €}}$$

Vérification pour le premier client : $3 \times 1{,}10 + 2 \times 1{,}30 + 1{,}20 = 3{,}30 + 2{,}60 + 1{,}20 = 7{,}10$.

3. Le quatrième client paie :

$$4 \times 1{,}10 + 3 \times 1{,}30 + 2 \times 1{,}20 = 4{,}40 + 3{,}90 + 2{,}40 = \boxed{10{,}70\ €}$$

EXERCICE 6 ⋆⋆

1. (S_m) s'écrit $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} m & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ m-1 \end{pmatrix}$. On a :

$$\det(A) = m^2 - 4 = (m-2)(m+2)$$

$$\boxed{A \text{ est inversible si et seulement si } m \neq 2 \text{ et } m \neq -2}$$

2. Pour $m \notin \{-2\,;2\}$:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{m^2-4}\begin{pmatrix} m & -2 \\ -2 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ m-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{m^2-4}\begin{pmatrix} m-2m+2 \\ -2+m^2-m \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{(m-2)(m+2)}\begin{pmatrix} -(m-2) \\ (m-2)(m+1) \end{pmatrix}$$

après avoir factorisé $m^2 - m - 2 = (m-2)(m+1)$. On simplifie par $m - 2 \neq 0$:

$$\boxed{S = \left\{\left(-\frac{1}{m+2}\,;\frac{m+1}{m+2}\right)\right\}}$$

Contrôle avec $m = 0$: le système devient $2y = 1$ et $2x = -1$, soit $\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$, ce que donne bien la formule.

3. Les deux cas restants se traitent à la main.

- Pour $m = 2$: le système est $\begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$, ses deux équations sont identiques. Il y a une infinité de solutions :

$$\boxed{S = \left\{\left(x\,;\tfrac{1}{2} - x\right),\ x \in \mathbb{R}\right\}}$$

- Pour $m = -2$: le système est $\begin{cases} -2x + 2y = 1 \\ 2x - 2y = -3 \end{cases}$. La seconde équation équivaut à $-2x+2y = 3$, ce qui contredit la première :

$$\boxed{S = \varnothing}$$

On retrouve les deux situations de l'exercice 3 : un déterminant nul peut donner une infinité de solutions comme aucune.

EXERCICE 7 ⋆⋆

1. M appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si $\Omega M = r$, c'est-à-dire, les deux membres étant positifs, $\Omega M^2 = r^2$. Avec la formule de la distance dans un repère orthonormé :

$$M \in \mathcal{C} \iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

En développant : $x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$, qui est bien de la forme annoncée avec :

$$a = -2x_0, \qquad b = -2y_0, \qquad c = x_0^2 + y_0^2 - r^2$$

2. On écrit que les coordonnées de A, B et C vérifient l'équation :

$$\begin{cases} 25 + 9 + 5a + 3b + c = 0 \\ 9 + 1 - 3a - b + c = 0 \\ 36 + 16 + 6a - 4b + c = 0 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}}_{M}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -34 \\ -10 \\ -52 \end{pmatrix}}_{N}$$

Les inconnues sont ici a, b et c, et non x et y, qui ont été remplacés par des valeurs numériques.

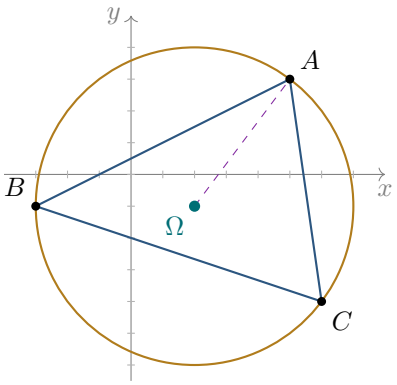
3. La calculatrice donne :

$$M^{-1} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 3 & -7 & 4 \\ 9 & -1 & -8 \\ 18 & 38 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1}N = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -20 \end{pmatrix}$$

4. Le cercle a pour équation $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$. On fait apparaître les formes canoniques :

$$(x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 - 20 = 0 \iff (x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$$

le cercle circonscrit à ABC a pour centre $\Omega(2\,;-1)$ et pour rayon 5



Les trois sommets du triangle, en bleu ardoise, sont bien sur le cercle ocre de centre Ω. Le rayon en pointillés vaut $\sqrt{3^2+4^2} = 5$. Le centre Ω est aussi le point de concours des médiatrices du triangle : on aurait pu le trouver ainsi, mais la méthode matricielle évite de calculer les équations de deux médiatrices.

Transformations du plan

EXERCICE 8 ⋆

On rappelle les deux écritures matricielles du cours. Pour la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$, l'image M' de M vérifie :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

et pour la rotation de centre O et d'angle θ :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

1. Il s'agit d'une **addition** de matrices colonnes :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \boxed{A'(5\,;4)}$$

2. Même opération, avec des fractions :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{10} - \frac{4}{10} \\ -\frac{1}{6} + \frac{2}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \qquad \boxed{B'\left(\frac{1}{10}\,;\frac{1}{6}\right)}$$

3. Il s'agit d'un **produit** par la matrice de rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$, pour laquelle $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-3}{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{C'\left(-1\,;\sqrt{3}\right)}$$

4. Ici $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

En utilisant $\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$:

$$x' = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad y' = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{D'\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\,;\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)}$$

On peut contrôler que la rotation conserve les distances : $OD = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = \sqrt{2}$, et $OD' = \sqrt{\frac{(1+\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2}{4}} = \sqrt{\frac{8}{4}} = \sqrt{2}$.

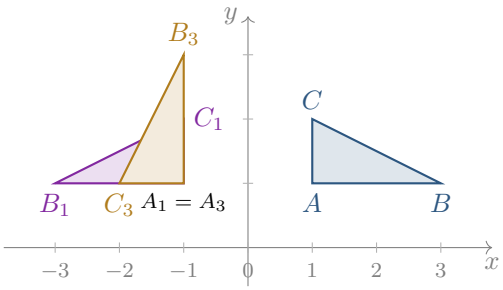
EXERCICE 9 ⋆

1. On compare aux matrices du cours :
   - T_1 est la matrice de la **symétrie d'axe l'axe des ordonnées** ;
   - T_2 est la matrice de l'**homothétie de centre O et de rapport** 2 ;
   - T_3 est la matrice de la **rotation de centre O et d'angle** $\frac{\pi}{2}$, puisque $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$;
   - T_4 est à la fois la matrice de l'**homothétie de centre O et de rapport** -1 et celle de la **rotation de centre O et d'angle** π, puisque $\cos(\pi) = -1$ et $\sin(\pi) = 0$. Ces deux transformations sont en fait la même : c'est la symétrie centrale de centre O, qui envoie $M(x;y)$ sur $M'(-x;-y)$.

2. On multiplie chaque matrice par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dont les colonnes sont les coordonnées de A, B et C : cela fait les trois calculs d'un coup.

Transformation	**Image de A**	**Image de B**	**Image de C**
T_1	$(-1\,;1)$	$(-3\,;1)$	$(-1\,;2)$
T_2	$(2\,;2)$	$(6\,;2)$	$(2\,;4)$
T_3	$(-1\,;1)$	$(-1\,;3)$	$(-2\,;1)$
T_4	$(-1\,;-1)$	$(-3\,;-1)$	$(-1\,;-2)$

3. On obtient la figure suivante.



Le triangle ABC est en bleu ardoise, son image par T_1 en violet et son image par T_3 en ocre. L'image violette est retournée : la symétrie change le sens de parcours des sommets. L'image ocre a simplement tourné d'un quart de tour autour de O. Les deux images ont les mêmes longueurs que ABC, ce qui n'est pas le cas de l'image par T_2, dont les côtés sont deux fois plus longs.

EXERCICE 10 ⋆

Commençons par vérifier que la question a un sens : une rotation de centre O conserve les distances à O.

$$OA = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 7^2} = \sqrt{3+49} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$OD = \sqrt{\left(-4\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{48+4} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

Les deux points sont bien à la même distance de O : une telle rotation peut exister.

En notant θ l'angle cherché, l'égalité matricielle s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \sqrt{3}\cos(\theta) - 7\sin(\theta) &= -4\sqrt{3} \\ 7\cos(\theta) + \sqrt{3}\sin(\theta) &= -2 \end{cases}$$

C'est un système linéaire d'inconnues $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$. En multipliant la première ligne par $\sqrt{3}$ et la seconde par 7, puis en additionnant :

$$3\cos(\theta) - 7\sqrt{3}\sin(\theta) + 49\cos(\theta) + 7\sqrt{3}\sin(\theta) = -12 - 14$$

$$52\cos(\theta) = -26 \qquad \text{d'où} \qquad \cos(\theta) = -\frac{1}{2}$$

En reportant dans la seconde équation :

$$\sqrt{3}\sin(\theta) = -2 - 7\times\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \qquad \text{d'où} \qquad \sin(\theta) = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Le cosinus est négatif et le sinus positif : l'angle est dans le deuxième quadrant.

$$\boxed{\theta \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]}$$

Vérification dans la première équation : $\sqrt{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right) - 7\times\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{8\sqrt{3}}{2} = -4\sqrt{3}$.

EXERCICE 11 ⋆⋆

1. Notons X, X' et X'' les matrices colonnes des coordonnées de M, M' et M''. Par définition, $X' = TX$ et $X'' = T'X'$. Le produit matriciel étant associatif (chapitre 3) :

$$X'' = T'(TX) = (T'T)X$$

$$\boxed{\text{la transformation « } T \text{ puis } T' \text{ » a pour matrice } T'T}$$

La matrice de la transformation appliquée *en premier* est écrite *à droite*, au plus près de X. C'est le même ordre que pour la composée de fonctions $g \circ f$.

2. $S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc :

$$S_y S_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

C'est la matrice de la rotation de centre O et d'angle π (exercice 9) : **la composée des deux symétries axiales est la symétrie centrale de centre** O.

3. On calcule :

$$R\left(\tfrac{\pi}{6}\right)^2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} - \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = R\left(\tfrac{\pi}{3}\right)$$

C'était prévisible : tourner deux fois de $\frac{\pi}{6}$ revient à tourner de $\frac{\pi}{3}$. L'exercice 23 généralisera ce résultat.

4. En utilisant $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ et $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$:

$$R(\theta)R(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$R(\theta)R(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) \end{pmatrix} = I_2$$

$$\boxed{R(\theta)^{-1} = R(-\theta)}$$

Pour défaire une rotation d'angle θ, il suffit de tourner d'un angle $-\theta$. On retrouve aussi ce résultat avec la formule de l'inverse d'une matrice 2×2, puisque $\det\big(R(\theta)\big) = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.

5.

$$S_x R\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R\left(\tfrac{\pi}{2}\right) S_x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les deux produits sont différents : **l'ordre dans lequel on enchaîne deux transformations compte**, ce qui traduit géométriquement la non-commutativité du produit matriciel vue au chapitre 3. La seconde matrice échange les deux coordonnées : c'est la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$, comme le montrera l'exercice 22.

EXERCICE 12 ⋆⋆

1. Si X et X' désignent les colonnes des coordonnées de B et B', on a $X' = R\left(\frac{\pi}{4}\right) X$, donc $X = R\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-1} X' = R\left(-\frac{\pi}{4}\right) X'$ d'après l'exercice 11 :

$$X = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \boxed{B(2\,;4)}$$

On contrôle que $OB = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$ et $OB' = \sqrt{2+18} = \sqrt{20}$.

2. (a) $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$ et $T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$: ce sont bien les deux colonnes de T. D'où $a = 0$, $c = 3$, $b = -3$, $d = 0$:

$$\boxed{T = \begin{pmatrix}0 & -3\\3 & 0\end{pmatrix}}$$

Ce résultat est très utile : **les colonnes d'une matrice de transformation sont les images des points I et J.**

(b) On met 3 en facteur :

$$T = 3\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

T est le produit de la matrice de l'homothétie de centre O et de rapport 3 par celle de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Comme $3I_2$ commute avec toute matrice, l'ordre n'importe pas ici.

(c) $T\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$, donc l'image de K est $\boxed{K'(-3\,;6)}$.

3. Une telle matrice T devrait vérifier $T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$. Mais alors :

$$T\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = T\left(2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) = 2\,T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$$

Une telle matrice n'existe pas. Une transformation définie par une matrice envoie un point aligné avec O et un autre sur deux points eux aussi alignés avec O, dans les mêmes proportions.

EXERCICE 13 : ROTATION COMPLEXE ⋆

1. C'est la matrice du cours :

$$\boxed{R = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}}$$

2. L'égalité $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = R\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ donne, ligne par ligne :

$$\boxed{\begin{cases}x' &= x\cos(\theta) - y\sin(\theta)\\y' &= x\sin(\theta) + y\cos(\theta)\end{cases}}$$

3. On développe, en n'oubliant pas que $\mathrm{i}^2 = -1$:

$$\begin{aligned}(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))\,(x + \mathrm{i}y) &= x\cos(\theta) + \mathrm{i}y\cos(\theta) + \mathrm{i}x\sin(\theta) + \mathrm{i}^2 y\sin(\theta)\\ &= \boxed{(x\cos(\theta) - y\sin(\theta)) + \mathrm{i}\,(x\sin(\theta) + y\cos(\theta))}\end{aligned}$$

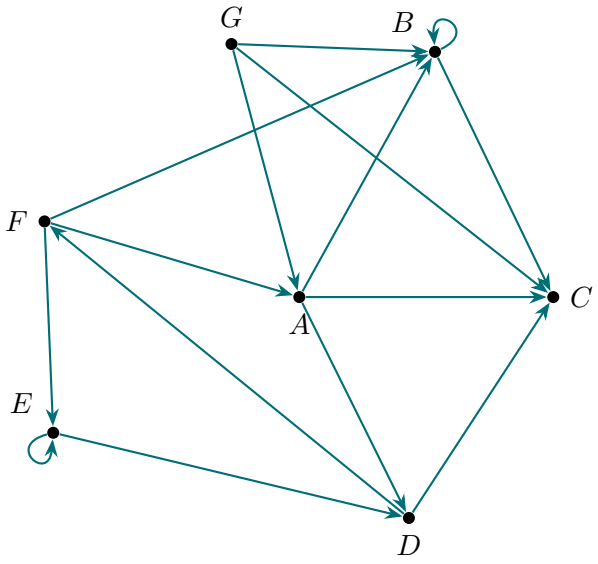
4. On reconnaît exactement x' dans la partie réelle et y' dans la partie imaginaire du développement précédent. Comme $z' = x' + \mathrm{i}y'$:

$$\boxed{z' = (\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))\,z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,z}$$

La rotation de centre O et d'angle θ se traduit donc, dans le plan complexe, par une simple multiplication par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. La matrice de rotation et le nombre complexe de module 1 décrivent la même transformation : c'est la même information, écrite de deux façons.

EXERCICE 14 ⋆

Reprenons la figure de l'énoncé, en la redessinant pour la lecture :



Les 15 arcs sont donc :

$$G \to A\ ;\ G \to B\ ;\ G \to C\ ;\ F \to A\ ;\ F \to B\ ;\ F \to E\ ;\ A \to B\ ;\ A \to C\ ;\ A \to D$$

$$B \to B\ ;\ B \to C\ ;\ D \to C\ ;\ D \to F\ ;\ E \to D\ ;\ E \to E$$

1. L'ordre d'un graphe est son nombre de sommets. Ici les sommets sont A, B, C, D, E, F et G :

$$\boxed{\text{le graphe est d'ordre } 7}$$

2. Le degré d'un sommet est le nombre d'arcs qui lui sont incidents, une boucle comptant **deux fois** (elle part du sommet et y arrive).

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	**Total**
Degré sortant	3	2	0	2	2	3	3	15
Degré entrant	2	4	4	2	2	1	0	15
Degré	5	6	4	4	4	4	3	30

3. Chaque arc possède deux extrémités : il est donc compté exactement deux fois dans la somme des degrés. Cette somme vaut :

$$5+6+4+4+4+4+3=30 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\text{nombre d'arcs} = \frac{30}{2} = 15}$$

4. Un chemin de longueur 5 comporte 5 arcs. La boucle en B en fournit un immédiatement :

$$\boxed{A \to B \to B \to B \to B \to C}$$

Il en existe d'autres, comme $A \to D \to F \to A \to B \to C$ ou encore $A \to D \to F \to A \to D \to C$. On peut d'ailleurs les compter : le coefficient $(A\,;C)$ de M^5 vaut 5, il y a donc exactement cinq tels chemins.

5. Il faut revenir en A. Or les seuls arcs arrivant en A viennent de G et de F ; comme aucun arc n'arrive en G, il faut passer par F, où l'on ne peut arriver que depuis D. Cela conduit directement au circuit :

$$\boxed{A \to D \to F \to A \quad \text{convient : c'est un circuit de longueur 3}}$$

6. On lit sur le tableau de la question 2 que le degré sortant de C est nul : **aucun arc ne part de C**.

$$\boxed{\text{Non : il n'existe aucun circuit d'origine } C}$$

Le sommet C est un *puits* : une fois qu'on y est arrivé, on ne peut plus en repartir.

7. En rangeant les sommets dans l'ordre A, B, C, D, E, F, G, le coefficient en ligne i et colonne j vaut 1 s'il existe un arc du sommet i vers le sommet j, et 0 sinon :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Deux contrôles : la somme de tous les coefficients vaut 15, le nombre d'arcs ; et la ligne de C est entièrement nulle, ce qui traduit bien que C est un puits. Les deux boucles se lisent sur la diagonale, en $(B\,;B)$ et en $(E\,;E)$. Cette matrice n'est **pas** symétrique : le graphe est bien orienté.

EXERCICE 15 ⋆

Commençons par lister les affinités de chaque personne :

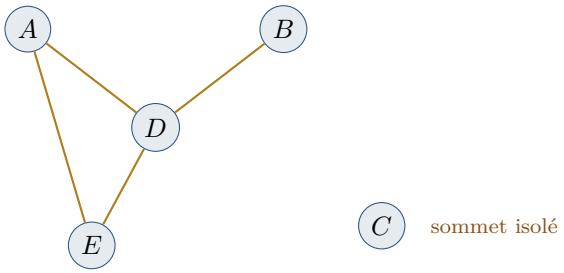
$$A : \{\text{montagne, sport}\} \quad ; \quad B : \{\text{sport, rencontres}\} \quad ; \quad C : \{\text{musée}\}$$

$$D : \{\text{montagne, sport, rencontres}\} \quad ; \quad E : \{\text{montagne, musée, sport}\}$$

On compte alors les affinités communes à chaque paire, deux personnes étant compatibles dès qu'elles en partagent au moins deux :

Paire	**Affinités communes**	**Nombre**	**Compatibles ?**
A – B	sport	1	non
A – C	aucune	0	non
A – D	montagne, sport	2	**oui**
A – E	montagne, sport	2	**oui**
B – C	aucune	0	non
B – D	sport, rencontres	2	**oui**
B – E	sport	1	non
C – D	aucune	0	non
C – E	musée	1	non
D – E	montagne, sport	2	**oui**

La relation « être compatible » est **symétrique** : le graphe est donc non orienté, et ses arêtes sont A–D, A–E, B–D et D–E.



En rangeant les sommets dans l'ordre A, B, C, D, E :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est **symétrique**, comme toute matrice d'adjacence de graphe non orienté, et sa diagonale est nulle puisqu'on ne se déclare pas compatible avec soi-même. La somme de tous ses coefficients vaut 8, soit deux fois le nombre d'arêtes.

On remarque que C n'est compatible avec personne : son unique affinité, les musées, n'est partagée qu'avec E, et une seule affinité commune ne suffit pas. À l'inverse, D est compatible avec tout le monde sauf C : c'est le profil le plus « riche », avec trois affinités.

EXERCICE 16 ⋆⋆

1. Le graphe a 5 sommets, il est donc **d'ordre** 5. Les degrés sont :

Sommet	A	B	C	D	E	**Total**
Degré	2	3	3	3	1	12

   La somme des degrés vaut 12, deux fois le nombre d'arêtes, qui est 6. Le graphe **n'est pas complet**, car A et E ne sont pas adjacents par exemple. Il **est connexe** : tout sommet est relié à D par une chaîne (A–B–D, B–D, C–D, E–D), donc deux sommets quelconques sont reliés en passant par D.

2. $$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. La calculatrice donne :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   La diagonale de M^2 est formée des degrés des sommets. D'après la Proposition 2, le coefficient $(i\,;i)$ de M^2 compte les chaînes de longueur 2 partant de i et revenant en i. Une telle chaîne est un aller-retour i–k–i le long d'une arête, et il y en a autant que d'arêtes issues de i, c'est-à-dire le degré de i. Ce raisonnement suppose le graphe sans boucle et sans arête multiple.

4. Il faut calculer M^3 et lire le coefficient en ligne A et colonne E, c'est-à-dire en ligne 1, colonne 5 :

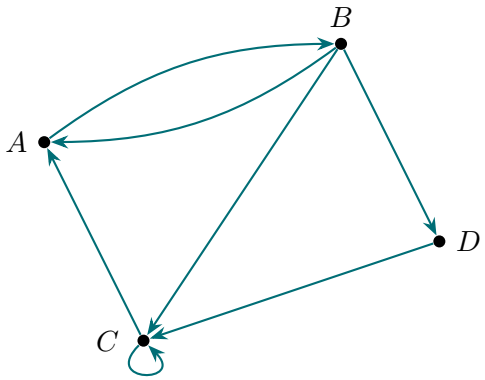
$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 5 & 5 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

il y a 2 chaînes de longueur 3 reliant A à E

Ce sont A–B–D–E et A–C–D–E. C'est cohérent : E n'est relié qu'à D, et une chaîne de longueur 2 de A à D passe nécessairement par B ou par C.

EXERCICE 17 ⋆

1. Redessinons le graphe pour lister ses arcs :



Les sept arcs sont $A \to B$, $B \to A$, $B \to C$, $B \to D$, $C \to A$, $C \to C$ et $D \to C$. En rangeant les sommets dans l'ordre A, B, C, D :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On utilise le théorème du cours : **le coefficient en ligne i et colonne j de M^n donne le nombre de chemins de longueur n allant du sommet i au sommet j.**

   (a) On calcule les puissances successives :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^4 = \left(M^2\right)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   Le coefficient cherché est celui de la ligne D et de la colonne A, c'est-à-dire la ligne 4 et la colonne 1 :

   il existe 2 chemins de longueur 4 reliant D à A

   Ce sont $D \to C \to A \to B \to A$ et $D \to C \to C \to C \to A$, ce dernier empruntant trois fois la boucle en C.

   (b) De même :

$$M^6 = \left(M^2\right)^3 = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 9 & 3 \\ 13 & 8 & 16 & 4 \\ 10 & 6 & 12 & 3 \\ 6 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Le coefficient de la ligne B et de la colonne C, c'est-à-dire la ligne 2 et la colonne 3, vaut :

$$\boxed{\text{il existe 16 chemins de longueur 6 reliant } B \text{ à } C}$$

EXERCICE 18 ⋆

1. Dans un graphe **non orienté**, chaque arête entre i et j se lit dans les deux sens : elle produit un 1 en position $(i\,;j)$ *et* en position $(j\,;i)$.

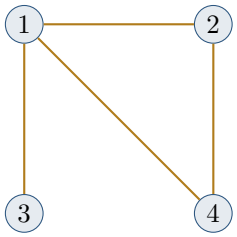
$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Une matrice d'adjacence correspond à un graphe non orienté}\\ \text{si et seulement si elle est symétrique}\end{array}}$$

On vérifie ici que A est symétrique, alors que B ne l'est pas : par exemple le coefficient en ligne 1, colonne 2 de B vaut 0 alors que celui en ligne 2, colonne 1 vaut 1.

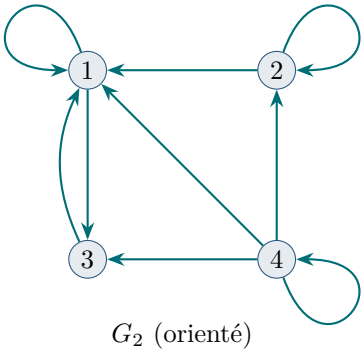
$$\boxed{G_1 \text{ est non orienté} \quad ; \quad G_2 \text{ est orienté}}$$

On remarque de plus que la diagonale de B n'est pas nulle : G_2 possède des boucles, aux sommets 1, 2 et 4.

2. (a) Les arêtes de G_1 se lisent au-dessus de la diagonale : 1–2, 1–3, 1–4 et 2–4. Pour G_2, on lit ligne par ligne les arcs $1 \to 1$, $1 \to 3$, $2 \to 1$, $2 \to 2$, $3 \to 1$, $4 \to 1$, $4 \to 2$, $4 \to 3$ et $4 \to 4$.



G_1 (non orienté)



G_2 (orienté)

Remarque : dans G_2, les arcs $1 \to 3$ et $3 \to 1$ existent tous les deux, ce qui explique le tracé de deux flèches distinctes entre ces deux sommets.

(b) On élève chaque matrice au cube.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Le coefficient en ligne 2, colonne 4 vaut 3 :

$$\boxed{\text{dans } G_1, \text{ il existe 3 chaînes de longueur 3 reliant 2 à 4}}$$

Ce sont 2–1–2–4, puis 2–4–1–4 et enfin 2–4–2–4 : dans un graphe non orienté, rien n'interdit d'emprunter deux fois la même arête.

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

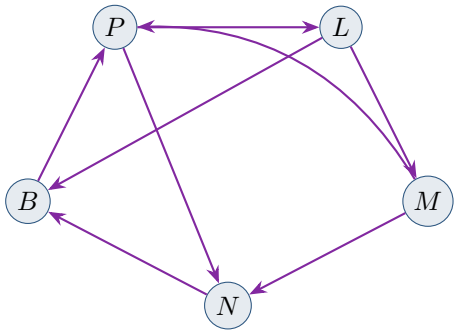
Le coefficient en ligne 2, colonne 4 vaut 0 :

$$\boxed{\text{dans } G_2, \text{ il n'existe aucun chemin de longueur 3 reliant 2 à 4}}$$

Ce résultat se lit directement sur B : sa quatrième colonne est $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^\top$, donc le seul arc arrivant en 4 part de 4 lui-même. Le sommet 4 est **inaccessible** depuis n'importe quel autre sommet, et ce quelle que soit la longueur du chemin : les colonnes 4 de B^2 et B^3 sont d'ailleurs nulles elles aussi, sauf en dernière ligne.

EXERCICE 19 ⋆⋆

1. Le graphe orienté est le suivant.



Chaque flèche violette représente un vol direct, dans le seul sens indiqué. La matrice d'adjacence est :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}$$

Elle n'est pas symétrique : par exemple, on peut aller de Paris à Lyon, mais pas directement de Lyon à Paris.

2. La calculatrice donne :

$$A^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

On lit en ligne 1, colonne 3 : il existe **un seul** trajet de Paris à Marseille en exactement deux vols, $P \to L \to M$, et **aucun** en exactement trois vols.

3. D'après la Proposition 2, le coefficient $(i\,;j)$ de S est la somme des nombres de trajets de i à j en 1, 2 et 3 vols : c'est **le nombre de trajets de i à j comportant au plus trois vols**.

4. La calculatrice donne :

$$S = \begin{pmatrix}3 & 1 & 1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Tous les coefficients hors diagonale sont non nuls, **sauf celui en ligne N et colonne M**. On ne peut donc pas aller de Nice à Marseille en au plus trois vols. Depuis Nice, le seul vol mène à Bordeaux, puis à Paris, puis à Lyon ou à Nice : il faut un quatrième vol, de Lyon à Marseille.

$$\boxed{\text{Nice} \to \text{Marseille demande au minimum 4 vols : } N \to B \to P \to L \to M}$$

On peut le confirmer en calculant A^4, dont le coefficient en ligne 4, colonne 3 vaut 1.

Exercices d'approfondissement

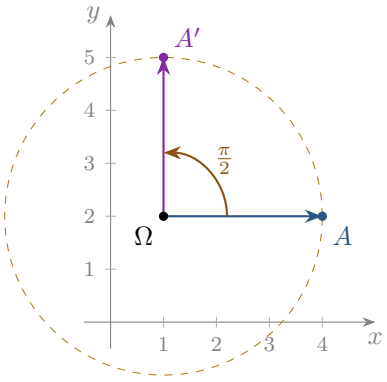
EXERCICE 20 ⋆⋆⋆

1. Le produit donne $x' - 1 = -(y-2)$ et $y' - 2 = x - 1$, soit :

$$\boxed{\begin{cases} x' = -y + 3 \\ y' = x + 1 \end{cases}} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La rotation r s'obtient en appliquant la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, puis la translation de vecteur $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Contrairement aux rotations de centre O, elle ne s'écrit pas avec une seule multiplication matricielle.

2. $x' = -2 + 3 = 1$ et $y' = 4 + 1 = 5$, d'où $\boxed{A'(1\,;5)}$. On vérifie que $\Omega A = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3$ et $\Omega A' = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$.



Le vecteur $\overrightarrow{\Omega A'}$, en violet, est bien l'image du vecteur $\overrightarrow{\Omega A}$, en bleu ardoise, par un quart de tour direct, et A et A' sont sur le même cercle de centre Ω.

3. M est sa propre image si et seulement si $x = -y + 3$ et $y = x + 1$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ -x + y = 1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le déterminant vaut $1 \times 1 - 1 \times (-1) = 2 \neq 0$: d'après la Proposition 1, le système admet une unique solution. Comme $\Omega(1\,;2)$ convient ($1 + 2 = 3$ et $-1 + 2 = 1$), c'est la seule :

$$\boxed{\Omega \text{ est l'unique point invariant par } r}$$

4. $R^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$, donc $R^4 = (-I_2)^2 = I_2$. En appliquant quatre fois la relation de l'énoncé :

$$\begin{pmatrix} x'''' - 1 \\ y'''' - 2 \end{pmatrix} = R^4 \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \end{pmatrix}$$

Quatre quarts de tour ramènent chaque point à sa position de départ.

EXERCICE 21 ⋆⋆⋆

1. D'après la Proposition 2, le coefficient $(i\,;i)$ de M^3 est le nombre de chaînes de longueur 3 partant de i et revenant en i, c'est-à-dire de la forme i–j–k–i. Le graphe n'ayant pas de boucle, deux sommets consécutifs de cette liste sont distincts : $j \neq i$, $k \neq j$ et $k \neq i$. Les trois sommets i, j, k sont donc distincts et deux à deux adjacents : ils forment un triangle.

2. Inversement, un triangle $\{i\,;j\,;k\}$ fournit exactement 6 chaînes fermées de longueur 3 : on peut partir de chacun des 3 sommets, et tourner dans l'un des 2 sens. Par exemple, pour un triangle $\{A\,;B\,;C\}$: A–B–C–A, A–C–B–A, et de même depuis B et depuis C. En sommant les coefficients diagonaux, on compte donc chaque triangle six fois :

$$\boxed{\text{trace}\left(M^3\right) = 6 \times (\text{nombre de triangles})}$$

3. Avec M^3 calculée à l'exercice 16 : $\text{trace}\left(M^3\right) = 2+4+4+2+0 = 12$, donc le graphe a $\frac{12}{6} = 2$ triangles. Ce sont bien $\{A\,;B\,;C\}$ et $\{B\,;C\,;D\}$, que l'on voit sur la figure.

4. La matrice d'adjacence du graphe complet à 4 sommets a des 1 partout sauf sur la diagonale. La calculatrice donne :

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad K^3 = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$\text{trace}\left(K^3\right) = 24$, d'où $\boxed{\text{4 triangles}}$. Directement : dans un graphe complet, trois sommets quelconques forment un triangle, et il y a 4 façons de choisir 3 sommets parmi 4 (il suffit de choisir celui que l'on écarte).

EXERCICE 22 ⋆⋆⋆

1. $S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice de la symétrie d'axe des abscisses, et $S_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos(\pi) & \sin(\pi) \\ \sin(\pi) & -\cos(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ celle de la symétrie d'axe des ordonnées. C'est cohérent : $\mathcal{D}_0$ est l'axe des abscisses et $\mathcal{D}_{\frac{\pi}{2}}$ celui des ordonnées.

2. On utilise $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ et $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$, avec $a = 2\varphi$ et $b = \varphi$:

$$S_\varphi \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi)\cos(\varphi) + \sin(2\varphi)\sin(\varphi) \\ \sin(2\varphi)\cos(\varphi) - \cos(2\varphi)\sin(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi-\varphi) \\ \sin(2\varphi-\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

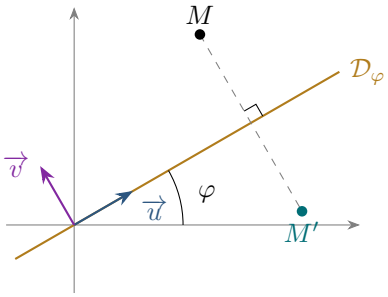
$$S_\varphi \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2\varphi)\cos(\varphi) - \cos(2\varphi)\sin(\varphi) \\ -\cos(2\varphi)\cos(\varphi) - \sin(2\varphi)\sin(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ -\cos(\varphi) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\vec{u}$ est conservé, et le vecteur $\vec{v}$ est changé en son opposé.

3. Les coordonnées de M forment la colonne $X = aU + bV$, où U et V sont les colonnes des coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Par distributivité du produit matriciel et d'après la question 2 :

$$S_\varphi X = aS_\varphi U + bS_\varphi V = aU - bV$$

L'image de M est donc $O + a\vec{u} - b\vec{v}$. Comme $\vec{u}$ dirige $\mathcal{D}_\varphi$ et que $\vec{v}$ lui est orthogonal, on a gardé la « composante le long de la droite » et retourné la composante perpendiculaire : c'est exactement le symétrique de M par rapport à $\mathcal{D}_\varphi$.



La droite $\mathcal{D}_\varphi$ fait l'angle φ avec l'axe des abscisses. Le point M' est le symétrique de M : le segment $[MM']$ est perpendiculaire à $\mathcal{D}_\varphi$ et coupé en son milieu par elle.

4. En utilisant $\cos^2 + \sin^2 = 1$:

$$S_\varphi^2 = \begin{pmatrix} \cos^2(2\varphi) + \sin^2(2\varphi) & \cos(2\varphi)\sin(2\varphi) - \sin(2\varphi)\cos(2\varphi) \\ \sin(2\varphi)\cos(2\varphi) - \cos(2\varphi)\sin(2\varphi) & \sin^2(2\varphi) + \cos^2(2\varphi) \end{pmatrix} = I_2$$

Appliquer deux fois la même symétrie ramène chaque point à sa place : **une symétrie est sa propre inverse**.

5. En notant $\alpha = 2\varphi$ et $\beta = 2\psi$:

$$S_\varphi S_\psi = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha-\beta) & -\sin(\alpha-\beta) \\ \sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{S_\varphi S_\psi = R(2(\varphi - \psi))}$$

La composée de deux symétries d'axes passant par O est une rotation de centre O, d'angle le double de l'angle entre les deux axes. L'exercice 11 en donnait un cas particulier : $S_y S_x = S_{\frac{\pi}{2}} S_0 = R(\pi)$.

6. $S_{\frac{\pi}{4}} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. L'axe $\mathcal{D}_{\frac{\pi}{4}}$ est la droite d'équation $y = x$, et $S_{\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$: **le symétrique de $M(x;y)$ par rapport à la droite $y = x$ est $M'(y;x)$**. On échange simplement les coordonnées, ce qui explique que les courbes de exp et de ln soient symétriques par rapport à cette droite.

Pour aller plus loin

EXERCICE 23 ⋆⋆

1. D'après l'exercice 11, tourner d'abord d'un angle b puis d'un angle a correspond à la matrice $R(a)R(b)$. Comme cela revient à tourner d'un angle $a + b$, les deux matrices transforment tout point de la même façon. En prenant les points $I(1;0)$ et $J(0;1)$, leurs premières puis secondes colonnes sont égales (exercice 12), donc $\boxed{R(a)R(b) = R(a+b)}$.

2. On développe :

$$R(a)R(b) = \begin{pmatrix} \cos a\cos b - \sin a\sin b & -\cos a\sin b - \sin a\cos b \\ \sin a\cos b + \cos a\sin b & -\sin a\sin b + \cos a\cos b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a+b) & -\sin(a+b) \\ \sin(a+b) & \cos(a+b) \end{pmatrix}$$

En identifiant la première colonne :

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \qquad \sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b}$$

Ce sont les formules d'addition du chapitre 5, qui découlent ici d'une évidence géométrique : deux rotations successives s'ajoutent.

3. On note $\mathcal{P}_n$: « $R(x)^n = R(nx)$ ».
Initialisation : Pour $n = 1$, l'égalité est immédiate.
Hérédité : Si $\mathcal{P}_k$ est vraie pour un $k \in \mathbb{N}^*$, alors, d'après la question 1 :

$$R(x)^{k+1} = R(x)^k R(x) = R(kx)R(x) = R(kx + x) = R((k + 1)x)$$

Conclusion : $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. C'est la version matricielle de la formule de Moivre du chapitre 5.

4. Notons $c = \cos(x)$ et $s = \sin(x)$. D'une part $R(x)^2 = \begin{pmatrix} c^2 - s^2 & -2cs \\ 2cs & c^2 - s^2 \end{pmatrix}$, et d'autre part la première colonne de $R(x)^3 = R(x)^2 R(x)$ est :

$$\begin{pmatrix} (c^2 - s^2)c - 2cs \times s \\ 2cs \times c + (c^2 - s^2)s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^3 - 3cs^2 \\ 3c^2 s - s^3 \end{pmatrix}$$

Comme $R(x)^3 = R(3x)$, on identifie, puis on remplace s^2 par $1 - c^2$ dans la première ligne et c^2 par $1 - s^2$ dans la seconde :

$$\boxed{\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x) \qquad \sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)}$$

Contrôle avec $x = \frac{\pi}{3}$: $4 \times \frac{1}{8} - 3 \times \frac{1}{2} = -1 = \cos(\pi)$.

EXERCICE 24 ⋆⋆

1. $S_1 = 1$, $S_2 = 1 + 4 = 5$ et $S_3 = 5 + 9 = 14$.
2. Pour $n = 1$, 2 et 3, l'égalité $S_n = an^3 + bn^2 + cn$ donne :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a + b + c & = & 1 \\ 8a + 4b + 2c & = & 5 \\ 27a + 9b + 3c & = & 14 \end{array} \right. \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 27 & 9 & 3 \end{pmatrix}}_{V} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

La calculatrice donne $V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, puis $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{6}$. On remarque que :

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

3. On note $\mathcal{P}_n$: « $S_n = \dfrac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$ ».
Initialisation : $\dfrac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1 = S_1$.
Hérédité : Si $\mathcal{P}_k$ est vraie pour un $k \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$S_{k+1} = S_k + (k + 1)^2 = \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6} + (k + 1)^2$$

$$S_{k+1} = \frac{(k + 1)\big(k(2k + 1) + 6(k + 1)\big)}{6} = \frac{(k + 1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$

Or $(k + 2)(2k + 3) = 2k^2 + 7k + 6$, donc $S_{k+1} = \dfrac{(k + 1)(k + 2)(2k + 3)}{6}$, ce qui est $\mathcal{P}_{k+1}$.
Conclusion : $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Le système de la question 2 a seulement fourni l'*unique* candidat qui convient pour $n = 1$, 2 et 3. Rien ne garantissait a priori que S_n soit de la forme $an^3 + bn^2 + cn$ pour tout n : trois valeurs ne permettent pas de conclure pour une infinité d'entiers. Le système *trouve* la formule, la récurrence la *démontre*. C'est le schéma « analyse, puis synthèse ».

5. Les sommes de cubes valent 1, 9, 36 et 100 pour $n = 1$, 2, 3, 4. Le système est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 16 & 8 & 4 & 2 \\ 81 & 27 & 9 & 3 \\ 256 & 64 & 16 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 36 \\ 100 \end{pmatrix} \qquad \text{et la calculatrice donne} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où la formule candidate $\dfrac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Montrons par récurrence $\mathcal{Q}_n$: « $1^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ ». L'initialisation est immédiate : $\frac{1\times 4}{4} = 1$. Si $\mathcal{Q}_k$ est vraie, alors :

$$1^3 + \cdots + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2\left(k^2+4k+4\right)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

ce qui est $\mathcal{Q}_{k+1}$. Ainsi :

$$\boxed{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = (1 + 2 + \cdots + n)^2}$$

EXERCICE 25 ⋆⋆⋆

1. $P(-1) = a - b + c$, $P(0) = c$ et $P(1) = a + b + c$, d'où :

$$\boxed{V = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

2. On calcule VW ligne par ligne :

$$VW = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 & -1 + 0 + 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 \\ 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 1 & 0 + 0 + 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 & -1 + 0 + 1 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 \end{pmatrix} = I_3$$

Une matrice carrée W telle que $VW = I_3$ est l'inverse de V (chapitre 3), donc V est inversible. D'après la Proposition 1, le problème admet une unique solution, $X = WY$:

$$\boxed{a = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2}, \qquad b = \frac{y_2 - y_0}{2}, \qquad c = y_1}$$

3. On obtient le tableau suivant :

	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$
$L_0(x)$	1	0	0
$L_1(x)$	0	1	0
$L_2(x)$	0	0	1

Le polynôme $Q = y_0L_0 + y_1L_1 + y_2L_2$ est de degré au plus 2 et vérifie $Q(-1) = y_0$, $Q(0) = y_1$, $Q(1) = y_2$. Par unicité (question 2), $\boxed{Q = P}$. Chaque L_j vaut 1 en un point et 0 aux deux autres, ce qui rend la formule immédiate.
Développons : $L_0(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$, $L_1(x) = -x^2 + 1$, $L_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$. Les coefficients $(a\,;b\,;c)$ de L_0, L_1, L_2 sont exactement les **colonnes** de W. C'est logique : L_0 est le polynôme obtenu pour $Y = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}^\top$, et WY est alors la première colonne de W.

4. $L_0(2) = \frac{2\times1}{2} = 1$, $L_1(2) = 1 - 4 = -3$ et $L_2(2) = \frac{2\times3}{2} = 3$, donc :

$$\boxed{P(2) = y_0 - 3y_1 + 3y_2}$$

Avec $y_0 = 1$, $y_1 = 4$, $y_2 = 9$, on trouve $P(2) = 1 - 12 + 27 = 16$. C'est cohérent : ces valeurs sont celles de $P(x) = (x+2)^2$ en -1, 0, 1, et $(2+2)^2 = 16$. La formule permet de « prolonger » une suite de trois valeurs par un polynôme de degré 2 : on retrouve que la suite des carrés 1, 4, 9 se poursuit par 16.

EXERCICE 26 ⋆⋆⋆

1. On met au même dénominateur :

$$c(t)^2 + s(t)^2 = \frac{(1-t^2)^2 + 4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1 - 2t^2 + t^4 + 4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2} = 1$$

2. Pour $t = \frac{1}{2}$: $1 + t^2 = \frac{5}{4}$, donc $c = \frac{3/4}{5/4} = \frac{3}{5}$ et $s = \frac{1}{5/4} = \frac{4}{5}$.

$$R_t = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -4\\ 4 & 3\end{pmatrix}, \qquad R_t\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \qquad R_t\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$$

Les images de A et B sont $A'(3\,;4)$ et $B'(-4\,;3)$: la rotation envoie ces points à coordonnées entières sur d'autres points à coordonnées entières du cercle de centre O et de rayon 5.

3.

$$R_t^2 = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}-7 & -24\\ 24 & -7\end{pmatrix} \quad ; \quad R_t^3 = \frac{1}{125}\begin{pmatrix}-117 & -44\\ 44 & -117\end{pmatrix}$$

Une puissance de matrice de rotation est encore une matrice de rotation (exercice 23), donc la somme des carrés des coefficients de sa première colonne vaut 1. En multipliant par 25^2 et 125^2 :

$$\boxed{7^2 + 24^2 = 25^2 \qquad \text{et} \qquad 44^2 + 117^2 = 125^2}$$

Vérification : $49 + 576 = 625$ et $1\,936 + 13\,689 = 15\,625$.

4. Pour $t = \frac{p}{q}$, on multiplie numérateur et dénominateur par q^2 :

$$c(t) = \frac{q^2 - p^2}{q^2 + p^2}, \qquad s(t) = \frac{2pq}{q^2 + p^2}$$

Ce sont des quotients d'entiers, avec $q^2 + p^2 \geqslant q^2 > 0$: les coefficients de R_t sont rationnels. L'égalité $c^2 + s^2 = 1$, multipliée par $\left(q^2 + p^2\right)^2$, donne :

$$\boxed{\left(q^2 - p^2\right)^2 + (2pq)^2 = \left(q^2 + p^2\right)^2}$$

Directement : $\left(q^2 - p^2\right)^2 + 4p^2q^2 = q^4 - 2p^2q^2 + p^4 + 4p^2q^2 = q^4 + 2p^2q^2 + p^4 = \left(q^2 + p^2\right)^2$.
Avec $p = 1$, $q = 2$, on retrouve le triplet $(3\,;4\,;5)$. Cette formule fournit une infinité de triangles rectangles à côtés entiers, appelés triplets pythagoriciens. Le poly dont s'inspire cet exercice montre que l'on obtient ainsi, au facteur près, tous les points du cercle trigonométrique à coordonnées rationnelles, sauf $(-1\,;0)$.

EXERCICE 27 ⋆⋆⋆

1. Comme $r > 0$ et $\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{r^2} = 1$, le point $\left(\frac{a}{r}\,;\frac{b}{r}\right)$ est sur le cercle trigonométrique : il existe un réel φ tel que $\frac{a}{r} = \cos(\varphi)$ et $\frac{b}{r} = \sin(\varphi)$. Alors :

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Cette transformation fait tourner chaque point d'un angle φ autour de O, puis multiplie les distances à O par r. C'est la traduction matricielle de la multiplication par $a + ib = re^{i\varphi}$ (chapitre 5 et exercice 13).

2. D'une part, le calcul direct donne :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos(x) + b\sin(x) \\ -b\cos(x) + a\sin(x) \end{pmatrix}$$

D'autre part, $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} = rR(-\varphi)$. Le point M est le point du cercle trigonométrique d'angle x ; la rotation d'angle $-\varphi$ l'envoie sur le point d'angle $x - \varphi$, d'où :

$$rR(-\varphi) \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(x-\varphi) \\ \sin(x-\varphi) \end{pmatrix}$$

En identifiant les premières coordonnées :

$$\boxed{a\cos(x) + b\sin(x) = r\cos(x-\varphi)}$$

3. Ici $a = 1$, $b = \sqrt{3}$, $r = \sqrt{1+3} = 2$, $\cos(\varphi) = \frac{1}{2}$ et $\sin(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\varphi = \frac{\pi}{3}$ convient :

$$\boxed{\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}$$

Un cosinus étant au plus égal à 1, l'expression vaut au plus 2, et ce maximum est atteint pour $x = \frac{\pi}{3}$. Pour l'équation :

$$2\cos\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2} \iff \cos\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right) = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \iff x - \tfrac{\pi}{3} \equiv \tfrac{\pi}{4}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x - \tfrac{\pi}{3} \equiv -\tfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$$

$$\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{12}\,;\frac{7\pi}{12}\right\}}$$

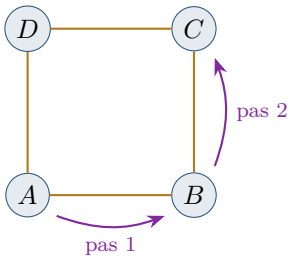
Contrôle numérique : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \approx 0{,}966 + 1{,}732 \times 0{,}259 \approx 1{,}414 \approx \sqrt{2}$.

4. D'après la question 1, cette matrice vaut $2I_2 \times R\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Comme $2I_2$ commute avec toute matrice, et d'après l'exercice 23 :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}^6 = 2^6 R\left(\tfrac{\pi}{3}\right)^6 = 64\,R(2\pi) = \boxed{\begin{pmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix}}$$

On retrouve $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^6 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6 = 64e^{2i\pi} = 64$, calculé avec la formule de Moivre au chapitre 5.

EXERCICE 28 ⋆⋆⋆



Le carré et ses quatre arêtes sont en ocre. En violet, un trajet de deux pas mène de A à C en passant par B : il ne revient pas en A.

1. $$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = 4M$$

2. On note $\mathcal{P}_k$: « $M^{2k+1} = 4^k M$ et $M^{2k} = 4^{k-1}M^2$ ».
   Initialisation : Pour $k = 1$: $M^3 = 4M$ (question 1) et $M^2 = 4^0 M^2$.
   Hérédité : Si $\mathcal{P}_k$ est vraie pour un $k \in \mathbb{N}^*$, alors :
   $$M^{2k+2} = M^{2k+1}M = 4^k M^2 \qquad \text{et} \qquad M^{2k+3} = M^{2k+2}M = 4^k M^3 = 4^k \times 4M = 4^{k+1}M$$
   ce qui est $\mathcal{P}_{k+1}$.
   Conclusion : $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

3. D'après la Proposition 2, on cherche le coefficient $(A\,;A)$ de M^n.
   - Si $n = 2k+1$ est impair, ce coefficient vaut $4^k \times 0 = 0$: on ne peut pas revenir en A en un nombre impair de pas.
   - Si $n = 2k$ est pair, il vaut $4^{k-1} \times 2 = 2^{2k-2} \times 2 = 2^{2k-1} = 2^{n-1}$.

   $$\boxed{\text{nombre de trajets de } n \text{ étapes de } A \text{ à } A = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 2^{n-1} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}}$$

   Contrôle pour $n = 2$: les deux trajets sont $A \to B \to A$ et $A \to D \to A$.

4. À chaque étape, le pion a exactement 2 choix, donc il y a 2^n trajets de n étapes partant de A. Pour n pair, $2^{n-1} = \frac{2^n}{2}$: la moitié des trajets revient en A.
   Colorions A et C en blanc, B et D en noir : chaque pas change la couleur. Après un nombre pair de pas, le pion est donc sur un sommet blanc, A ou C. Le coefficient $(A\,;C)$ de M^{2k} vaut d'ailleurs aussi $4^{k-1} \times 2 = 2^{n-1}$: les trajets se partagent à égalité entre A et C.
   On retrouve, sous forme de comptage, la marche aléatoire de Bernoulli étudiée dans le poly. Si l'on numérote les sommets 0, 1, 2, 3 dans l'ordre A, B, C, D, la position du pion est la somme des pas ± 1, prise modulo 4 (chapitre 4).

EXERCICE 29 ⋆⋆⋆⋆

1. Dans K_n, deux sommets distincts sont toujours adjacents et il n'y a pas de boucle : M a des 1 partout sauf sur la diagonale, d'où $M = J - I$. Chaque coefficient de J^2 est une somme de n produits 1×1, donc vaut n : $J^2 = nJ$. Comme I commute avec J :
   $$M^2 = (J-I)^2 = J^2 - 2J + I = nJ - 2J + I = (n-2)J + I$$
   En remplaçant J par $M + I$:
   $$\boxed{M^2 = (n-2)(M+I) + I = (n-2)M + (n-1)I}$$

2. On note $\mathcal{P}_p$: « $M^p = a_pM + b_pI$ », avec les suites définies par l'énoncé.
Initialisation : $M^1 = 1 \times M + 0 \times I$.
Hérédité : Si $\mathcal{P}_p$ est vraie pour un $p \in \mathbb{N}^*$, alors, d'après la question 1 :

$$M^{p+1} = M^pM = a_pM^2 + b_pM = a_p\big((n-2)M + (n-1)I\big) + b_pM = \big((n-2)a_p + b_p\big)M + (n-1)a_pI$$

c'est-à-dire $M^{p+1} = a_{p+1}M + b_{p+1}I$.
Conclusion : $\mathcal{P}_p$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

3. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $a_{p+2} = (n-2)a_{p+1} + b_{p+1} = (n-2)a_{p+1} + (n-1)a_p$.
On note $\mathcal{Q}_p$: « $a_p = \dfrac{(n-1)^p - (-1)^p}{n}$ et $a_{p+1} = \dfrac{(n-1)^{p+1} - (-1)^{p+1}}{n}$ ». Cette récurrence porte sur deux termes consécutifs, puisque a_{p+2} dépend de a_{p+1} et de a_p.
Initialisation : $a_1 = 1 = \dfrac{(n-1)+1}{n}$ et $a_2 = (n-2) \times 1 + 0 = n-2 = \dfrac{n^2-2n}{n} = \dfrac{(n-1)^2-1}{n}$.
Hérédité : Supposons $\mathcal{Q}_p$ vraie. Les réels $q = n-1$ et $q = -1$ vérifient tous deux $q^2 = (n-2)q + (n-1)$, puisque $(n-1)^2 = n^2 - 2n + 1 = (n-2)(n-1) + (n-1)$ et $1 = -(n-2) + (n-1)$. On les multiplie par q^p : $q^{p+2} = (n-2)q^{p+1} + (n-1)q^p$. Alors :

$$n\,a_{p+2} = (n-2)\left[(n-1)^{p+1} - (-1)^{p+1}\right] + (n-1)\left[(n-1)^p - (-1)^p\right] = (n-1)^{p+2} - (-1)^{p+2}$$

donc $\mathcal{Q}_{p+1}$ est vraie.
Conclusion : Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{a_p = \dfrac{(n-1)^p - (-1)^p}{n}}$.

4. La matrice M a des 0 sur la diagonale et des 1 ailleurs. Le coefficient de $M^p = a_pM + b_pI$ hors diagonale vaut donc a_p, et le coefficient diagonal vaut b_p. Pour $p \geqslant 2$, $b_p = (n-1)a_{p-1}$, et la formule obtenue vaut aussi pour $p = 1$ puisque $b_1 = 0$:

chaînes de longueur p entre deux sommets distincts : $\dfrac{(n-1)^p - (-1)^p}{n}$
chaînes fermées de longueur p partant d'un sommet : $\dfrac{(n-1)^p + (n-1)(-1)^p}{n}$

Le calcul de b_p est le suivant : $(n-1)\dfrac{(n-1)^{p-1} - (-1)^{p-1}}{n} = \dfrac{(n-1)^p + (n-1)(-1)^p}{n}$.

5. Pour $n = 4$ et $p = 3$: $a_3 = \frac{27+1}{4} = 7$ et $b_3 = \frac{27-3}{4} = 6$. Ce sont exactement les coefficients de K^3 calculés à l'exercice 21.
Depuis un sommet donné, on compte les chaînes fermées, plus celles qui aboutissent à l'un des $n-1$ autres sommets :

$$b_p + (n-1)a_p = \frac{(n-1)^p + (n-1)(-1)^p + (n-1)(n-1)^p - (n-1)(-1)^p}{n} = \frac{n(n-1)^p}{n}$$

soit $b_p + (n-1)a_p = (n-1)^p$. Directement : à chaque étape, on peut aller vers n'importe lequel des $n-1$ autres sommets, d'où $(n-1)^p$ chaînes de longueur p. La formule de a_p dit alors que ces chaînes se répartissent presque également entre les n sommets d'arrivée, à ± 1 près.