EXERCICES – CHAPITRE 6

APPLICATIONS DES MATRICES

Systèmes linéaires

EXERCICE 1 ⋆

Résoudre à l'aide d'un calcul matriciel les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 2x-3y=7 \\ -2x+y=-5 \end{cases}$
2. $\begin{cases} -6x+7y=-3 \\ 3x+14y=-1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x\sqrt{2}-y\sqrt{3}=-1 \\ x\sqrt{8}+y\sqrt{27}=13 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 6x-9y=6 \\ x+3y=\dfrac{7}{6} \end{cases}$

EXERCICE 2 ⋆

1. Donner à l'aide de la calculatrice l'inverse de la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. En déduire la solution du système : $\begin{cases} x-y+z=3 \\ x+y-z=-1 \\ -x+y+z=5 \end{cases}$

EXERCICE 3 : QUAND LA MATRICE N'EST PAS INVERSIBLE ⋆

On considère les trois systèmes suivants :

$$(S_1):\begin{cases} 3x-y=2 \\ x+2y=10 \end{cases} \qquad (S_2):\begin{cases} 2x+4y=6 \\ x+2y=3 \end{cases} \qquad (S_3):\begin{cases} 2x+4y=1 \\ x+2y=3 \end{cases}$$

1. Écrire chacun de ces systèmes sous la forme $AX=B$ et calculer le déterminant de chaque matrice A.
2. Résoudre (S_1) à l'aide de la Proposition 1 du cours.
3. Pourquoi la Proposition 1 ne s'applique-t-elle pas à (S_2) et (S_3) ? Montrer que (S_3) n'admet aucune solution, et que (S_2) en admet une infinité, que l'on décrira.
4. Interpréter graphiquement les trois résultats, en considérant chaque équation comme l'équation d'une droite.

EXERCICE 4 ⋆

On cherche à déterminer l'équation de la parabole, $y=ax^2+bx+c$, passant par les points : $P(1;4)$, $Q(-2;-5)$ et $R(-1;0)$.

1. Traduire l'appartenance de ces trois points à la parabole par un système (S). En déduire l'écriture de ce système sous la forme matricielle $AX=B$.
2. Montrer que la matrice $C=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de A.
3. En déduire la valeur des coefficients a, b et c.

EXERCICE 5 : À LA BOULANGERIE ⋆⋆

Trois clients achètent des croissants, des pains au chocolat et des baguettes, dont on note respectivement x, y et z les prix unitaires en euros. Le premier achète 3 croissants, 2 pains au chocolat et 1 baguette, et paie 7,10 €. Le deuxième achète 2 croissants, 4 pains au chocolat et 2 baguettes, et paie 9,80 €. Le troisième achète 5 croissants, 1 pain au chocolat et 3 baguettes, et paie 10,40 €.

1. Traduire l'énoncé par un système, puis l'écrire sous la forme matricielle $AX = B$.
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer A^{-1}, puis le prix de chaque article.
3. Un quatrième client achète 4 croissants, 3 pains au chocolat et 2 baguettes. Combien paie-t-il ?

EXERCICE 6 : SYSTÈME À PARAMÈTRE ⋆⋆

Soit m un nombre réel. On considère le système :

$$(S_m) : \begin{cases} mx + 2y = 1 \\ 2x + my = m - 1 \end{cases}$$

1. Écrire (S_m) sous la forme $AX = B$, et déterminer les valeurs de m pour lesquelles A est inversible.
2. Pour ces valeurs de m, résoudre (S_m) en exprimant x et y en fonction de m. On simplifiera les fractions obtenues.
3. Résoudre (S_m) dans chacun des cas restants.

EXERCICE 7 : CERCLE PASSANT PAR TROIS POINTS ⋆⋆

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(5;3)$, $B(-3;-1)$ et $C(6;-4)$.

1. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(x_0;y_0)$ et de rayon $r > 0$. Justifier qu'un point $M(x;y)$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$, puis que cette équation peut s'écrire sous la forme $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, où a, b et c sont trois réels.
2. On cherche un cercle passant par A, B et C. Montrer que ses coefficients a, b et c sont solutions d'un système que l'on écrira sous la forme matricielle $MX = N$.
3. À l'aide de la calculatrice, résoudre ce système.
4. En déduire le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

Transformations du plan

EXERCICE 8 ⋆

Pour chacun des cas, déterminer l'opération matricielle associée à la transformation et calculer les coordonnées de l'image demandée :

1. A' l'image de $A(3;7)$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.
2. B' l'image de $B\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{6}\right)$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
3. C' l'image de $C(1;\sqrt{3})$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
4. D' l'image de $D\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$ par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{3\pi}{4}$.

EXERCICE 9 : RECONNAÎTRE UNE TRANSFORMATION ⋆

On considère les matrices :

$$T_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. À l'aide du cours, reconnaître la transformation associée à chacune de ces matrices. La matrice T_4 admet deux interprétations : lesquelles ?
2. On considère le triangle ABC avec $A(1;1)$, $B(3;1)$ et $C(1;2)$. Calculer les coordonnées des images de A, B et C par chacune des quatre transformations.
3. Représenter le triangle ABC et ses images par T_1 et par T_3.

EXERCICE 10 ⋆

$D(-4\sqrt{3};-2)$ est l'image de $A(\sqrt{3};7)$ par une rotation de centre O. Quel est l'angle de cette rotation ?

EXERCICE 11 : COMPOSER DES TRANSFORMATIONS ⋆⋆

1. Soient T et T' deux matrices de transformation. On note M' l'image d'un point M par la transformation de matrice T, puis M'' l'image de M' par la transformation de matrice T'. Montrer que les coordonnées de M'' s'obtiennent en multipliant celles de M par la matrice $T'T$. Attention à l'ordre des facteurs !
2. On note S_x et S_y les matrices des symétries d'axes respectifs l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. Calculer S_yS_x et reconnaître la transformation obtenue.
3. On note $R(\theta)$ la matrice de la rotation de centre O et d'angle θ. Calculer $R\left(\frac{\pi}{6}\right)^2$ et vérifier que l'on obtient $R\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Était-ce prévisible ?
4. Calculer $R(\theta)R(-\theta)$. En déduire l'inverse de la matrice $R(\theta)$, et interpréter géométriquement ce résultat.
5. Calculer $S_xR\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $R\left(\frac{\pi}{2}\right)S_x$. Que peut-on en conclure ?

EXERCICE 12 : REMONTER À L'ANTÉCÉDENT ⋆⋆

1. Le point $B'\left(-\sqrt{2};3\sqrt{2}\right)$ est l'image d'un point B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Déterminer les coordonnées de B à l'aide d'une matrice inverse.
2. Une transformation de matrice $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ transforme le point $I(1;0)$ en $I'(0;3)$ et le point $J(0;1)$ en $J'(-3;0)$.
   (a) Montrer que la première colonne de T donne les coordonnées de I', et la seconde celles de J'. En déduire T.
   (b) Montrer que T est le produit d'une matrice d'homothétie et d'une matrice de rotation, que l'on précisera.
   (c) Calculer les coordonnées de l'image du point $K(2;1)$.
3. Existe-t-il une matrice de transformation qui envoie le point $(1;2)$ sur le point $(3;1)$ et le point $(2;4)$ sur le point $(5;2)$?

EXERCICE 13 : ROTATION COMPLEXE ⋆

Soient $M(z)$ et $M'(z')$ deux points du plan complexe. Le point M' est l'image du point M par la rotation r de centre O et d'angle θ. On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

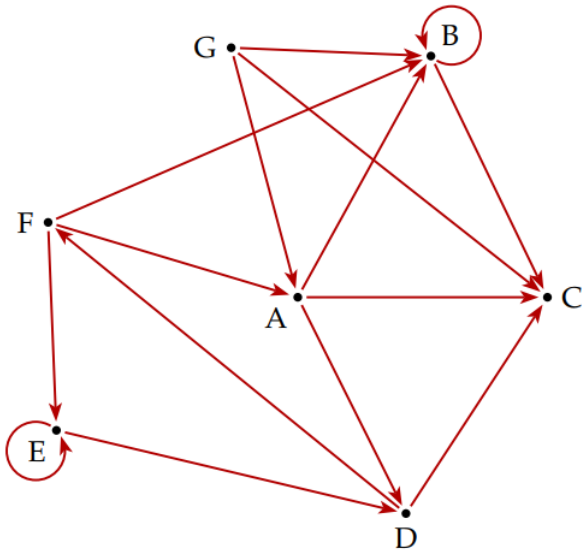
1. Donner la matrice de la rotation r dans le plan complexe.
2. Déterminer x' et y' en fonction de x et de y.
3. Développer $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))(x + iy)$.
4. En déduire une relation entre les complexes z et z'.

Graphes et matrices d'adjacence

EXERCICE 14 ⋆

On considère le graphe orienté ci-contre.

1. Déterminer l'ordre du graphe.
2. Déterminer le degré de chaque sommet.
3. En déduire par un calcul le nombre d'arcs de ce graphe.
4. Déterminer un chemin de longueur 5 reliant A à C.
5. Peut-on trouver un circuit d'origine A ?
6. Peut-on trouver un circuit d'origine C ?
7. Déterminer la matrice d'adjacence du graphe.



EXERCICE 15 ⋆

Un site de rencontre prend en compte quatre critères : aimer les musées, aimer le sport, aimer les rencontres et aimer la montagne. Les personnes A, B, C, D et E sont inscrites sur ce site. Leurs profils sont inscrits dans le tableau suivant :

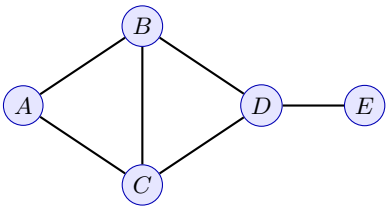
	Aime la montagne	Aime les musées	Aime le sport	Aime les rencontres
A	oui	non	oui	non
B	non	non	oui	oui
C	non	oui	non	non
D	oui	non	oui	oui
E	oui	oui	oui	non

On admet que deux personnes sont compatibles si elles ont au moins deux affinités en commun. Construire un graphe modélisant les compatibilités possibles entre les inscrits puis en donner la matrice d'adjacence.

EXERCICE 16 ⋆⋆

On considère le graphe non orienté G ci-contre.

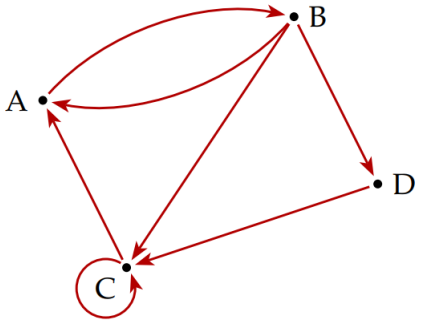
1. Donner l'ordre de G et le degré de chacun de ses sommets. Le graphe G est-il complet ? Est-il connexe ?
2. Donner la matrice d'adjacence M de G, les sommets étant rangés dans l'ordre alphabétique.
3. À l'aide de la calculatrice, calculer M^2. Que remarque-t-on sur sa diagonale ? Expliquer ce résultat à l'aide de la Proposition 2 du cours.
4. Combien existe-t-il de chaînes de longueur 3 reliant A à E ? Les écrire toutes.



EXERCICE 17 ⋆

Soit le graphe orienté suivant :

1. Donner la matrice d'adjacence de ce graphe.
2. Combien existe-t-il de chemins :
   (a) de longueur 4 reliant D à A ?
   (b) de longueur 6 reliant B à C ?



EXERCICE 18 ⋆

On donne les matrices d'adjacence A et B correspondant aux graphes G_1 et G_2 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Comment peut-on savoir sans tracer son graphe qu'une matrice d'adjacence correspond à un graphe non orienté ?
2. (a) Tracer les graphes G_1 et G_2.
   (b) Déterminer le nombre de chaînes ou de chemins de longueur 3 reliant le sommet 2 au sommet 4 pour chaque graphe.

EXERCICE 19 : LIAISONS AÉRIENNES ⋆⋆

Une compagnie aérienne dessert cinq villes : Paris (P), Lyon (L), Marseille (M), Nice (N) et Bordeaux (B). Certains vols ne fonctionnent que dans un sens. Les liaisons directes sont les suivantes :

$$P \to L, \quad P \to N, \quad L \to M, \quad L \to B, \quad M \to P, \quad M \to N, \quad N \to B, \quad B \to P.$$

1. Représenter la situation par un graphe orienté, puis donner sa matrice d'adjacence A, les sommets étant rangés dans l'ordre P, L, M, N, B.
2. À l'aide de la calculatrice, calculer A^2 et A^3. Combien existe-t-il de trajets de Paris à Marseille comportant exactement deux vols ? Exactement trois vols ?
3. On pose $S = A + A^2 + A^3$. Que représente le coefficient de S situé en ligne i et colonne j ?
4. Calculer S. Peut-on aller de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre en prenant au plus trois vols ? Si non, combien de vols faut-il au minimum pour le trajet qui pose problème ?

Exercices d'approfondissement

EXERCICE 20 : ROTATION DE CENTRE QUELCONQUE ⋆⋆⋆

Le cours ne donne l'écriture matricielle que des rotations de centre O. On considère ici le point $\Omega(1;2)$ et la rotation r de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$: le point M' est l'image de M par r lorsque le vecteur $\overrightarrow{\Omega M'}$ s'obtient en faisant tourner le vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ d'un angle $\frac{\pi}{2}$. On admet que cela se traduit par :

$$\begin{pmatrix} x'-1 \\ y'-2 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}, \qquad \text{où} \qquad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Exprimer x' et y' en fonction de x et y. Écrire cette relation sous la forme $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$: la rotation r est la composée d'une rotation de centre O et d'une translation.

2. Calculer les coordonnées de l'image A' du point $A(4;2)$, et vérifier que $\Omega A = \Omega A'$.
3. Montrer que Ω est le seul point du plan qui est sa propre image par r. On écrira un système et on utilisera la Proposition 1.
4. Calculer R^4. Que donne la rotation r appliquée quatre fois de suite ?

EXERCICE 21 : COMPTER LES TRIANGLES ⋆⋆⋆

On appelle *trace* d'une matrice carrée la somme de ses coefficients diagonaux. Dans un graphe non orienté sans boucle, on appelle *triangle* un ensemble de trois sommets deux à deux adjacents.

1. Soit G un graphe non orienté sans boucle, de matrice d'adjacence M. Montrer que le coefficient diagonal de M^3 en position $(i;i)$ est le nombre de chaînes fermées de longueur 3 partant du sommet i, et que chacune de ces chaînes parcourt un triangle.
2. En déduire que la trace de M^3 est égale à six fois le nombre de triangles de G.
3. Vérifier ce résultat sur le graphe de l'exercice 16.
4. On considère le graphe complet à 4 sommets. Donner sa matrice d'adjacence, calculer la trace de son cube et en déduire son nombre de triangles. Retrouver ce nombre directement.

EXERCICE 22 : SYMÉTRIES AXIALES QUELCONQUES ⋆⋆⋆

Pour tout réel φ, on pose $S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{D}_\varphi$ la droite passant par O et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$, et on pose $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$.

1. Calculer S_0 et $S_{\frac{\pi}{2}}$ et les comparer aux matrices de symétrie du cours.
2. À l'aide des formules d'addition (chapitre 5), montrer que $S_\varphi \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$ et $S_\varphi \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$.
3. Tout point M du plan s'écrit $M = O + a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$ avec a et b réels. En déduire que l'image de M par la transformation de matrice S_φ est le point $O + a\overrightarrow{u} - b\overrightarrow{v}$: c'est le symétrique de M par rapport à la droite $\mathcal{D}_\varphi$.
4. Calculer S_φ^2 et interpréter.
5. Soit ψ un autre réel. Montrer que $S_\varphi S_\psi = R\big(2(\varphi - \psi)\big)$, où $R(\theta)$ désigne la matrice de la rotation de centre O et d'angle θ. Énoncer ce résultat par une phrase.
6. Donner $S_{\frac{\pi}{4}}$ et décrire simplement l'image d'un point $M(x;y)$ par la symétrie d'axe la droite d'équation $y = x$.

POUR ALLER PLUS LOIN

EXERCICE 23 : LES FORMULES D'ADDITION RETROUVÉES ⋆⋆

On note $R(\theta)$ la matrice de la rotation de centre O et d'angle θ. On admet que faire tourner un point d'un angle b, puis d'un angle a, revient à le faire tourner d'un angle $a + b$.

1. À l'aide de l'exercice 11, en déduire que $R(a)R(b) = R(a+b)$ pour tous réels a et b.
2. En développant le produit $R(a)R(b)$, retrouver les formules donnant $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.
3. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel x, $R(x)^n = R(nx)$.
4. Pour x dans $\mathbb{R}$, exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$, et $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$, en calculant $R(x)^3$.

EXERCICE 24 : SOMME DES CARRÉS DES PREMIERS ENTIERS ⋆⋆

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

1. Calculer S_1, S_2 et S_3.
2. On cherche trois réels a, b et c tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = an^3 + bn^2 + cn$. En écrivant cette égalité pour $n = 1$, 2 et 3, montrer que a, b et c sont solutions d'un système que l'on résoudra à l'aide de la calculatrice.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
4. Pourquoi la question 2 ne suffit-elle pas à démontrer la formule de la question 3 ?
5. Par la même méthode, trouver quatre réels a, b, c, d tels que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn$ pour $n \in \{1; 2; 3; 4\}$, puis démontrer par récurrence la formule obtenue pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 25 : INTERPOLATION DE LAGRANGE ⋆⋆⋆

Soient y_0, y_1 et y_2 trois réels. On cherche une fonction polynôme P de degré au plus 2, $P(x) = ax^2 + bx + c$, telle que $P(-1) = y_0$, $P(0) = y_1$ et $P(1) = y_2$.

1. Montrer que ce problème s'écrit $VX = Y$, avec $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, où V est une matrice que l'on précisera.
2. Vérifier, sans calculatrice, que la matrice $W = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est l'inverse de V. En déduire que le problème admet une unique solution, et exprimer a, b et c en fonction de y_0, y_1 et y_2.
3. On pose $L_0(x) = \dfrac{x(x-1)}{2}$, $L_1(x) = 1 - x^2$ et $L_2(x) = \dfrac{x(x+1)}{2}$. Calculer $L_j(-1)$, $L_j(0)$ et $L_j(1)$ pour $j \in \{0; 1; 2\}$, puis montrer que $P = y_0L_0 + y_1L_1 + y_2L_2$. Quel lien y a-t-il entre les polynômes L_j et la matrice W ?
4. Exprimer $P(2)$ en fonction de y_0, y_1 et y_2. Contrôler ce résultat avec $y_0 = 1$, $y_1 = 4$ et $y_2 = 9$.

EXERCICE 26 : ROTATIONS À COEFFICIENTS RATIONNELS ⋆⋆⋆

Pour tout réel t, on pose $c(t) = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$ et $s(t) = \dfrac{2t}{1 + t^2}$.

1. Vérifier que $c(t)^2 + s(t)^2 = 1$. On admet qu'il existe alors un réel θ tel que $c(t) = \cos(\theta)$ et $s(t) = \sin(\theta)$, de sorte que $R_t = \begin{pmatrix} c(t) & -s(t) \\ s(t) & c(t) \end{pmatrix}$ est une matrice de rotation.
2. Dans cette question, $t = \dfrac{1}{2}$. Écrire R_t, puis calculer les images des points $A(5; 0)$ et $B(0; 5)$.
3. Toujours avec $t = \dfrac{1}{2}$, calculer R_t^2 et R_t^3. En déduire deux triplets d'entiers $(p; q; r)$ tels que $p^2 + q^2 = r^2$.
4. Soient p et q deux entiers, $q \neq 0$, et $t = \dfrac{p}{q}$. Montrer que les coefficients de R_t sont rationnels, et en déduire que $\left(q^2 - p^2\right)^2 + (2pq)^2 = \left(q^2 + p^2\right)^2$. Vérifier cette identité directement.

EXERCICE 27 : TRANSFORMATION DE $a\cos(x) + b\sin(x)$ ⋆⋆⋆

Soient a et b deux réels non tous deux nuls, et $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

1. Justifier qu'il existe un réel φ tel que $a = r\cos(\varphi)$ et $b = r\sin(\varphi)$. En déduire que la matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est le produit de la matrice de l'homothétie de centre O et de rapport r par celle de la rotation de centre O et d'angle φ.

2. Pour x réel, on considère le point $M(\cos(x);\sin(x))$. En calculant de deux façons les coordonnées de son image par la transformation de matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, montrer que :

$$a\cos(x) + b\sin(x) = r\cos(x-\varphi).$$

3. Application : écrire $\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x)$ sous la forme $r\cos(x-\varphi)$. En déduire la valeur maximale de cette expression, puis résoudre dans $[0;2\pi[$ l'équation $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{2}$.

4. Calculer $\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}^6$ sans calculatrice. Quel résultat du chapitre 5 retrouve-t-on ?

EXERCICE 28 : MARCHE SUR UN CARRÉ ⋆⋆⋆

Un pion se déplace sur les sommets d'un carré $ABCD$: à chaque étape, il passe d'un sommet à l'un des deux sommets voisins. On modélise la situation par le graphe non orienté dont les arêtes sont les côtés du carré, et on note M sa matrice d'adjacence, les sommets étant rangés dans l'ordre A, B, C, D.

1. Donner M, puis calculer M^2 et M^3. Vérifier que $M^3 = 4M$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $M^{2k+1} = 4^k M$ et $M^{2k} = 4^{k-1}M^2$.
3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre de trajets de n étapes partant de A et revenant en A.
4. Combien y a-t-il de trajets de n étapes partant de A, sans condition d'arrivée ? En déduire que, lorsque n est pair, exactement la moitié de ces trajets reviennent en A, et expliquer pourquoi l'autre moitié se termine en C.

EXERCICE 29 : CHAÎNES DANS UN GRAPHE COMPLET ⋆⋆⋆⋆

Soit $n \geqslant 3$ un entier. On considère le graphe complet K_n à n sommets, sans boucle, et sa matrice d'adjacence M. On note I la matrice identité et J la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients valent 1.

1. Justifier que $M = J - I$ et que $J^2 = nJ$. En déduire que $M^2 = (n-2)M + (n-1)I$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe deux réels a_p et b_p tels que $M^p = a_p M + b_p I$, avec $a_1 = 1$, $b_1 = 0$ et :
$$a_{p+1} = (n-2)a_p + b_p, \qquad b_{p+1} = (n-1)a_p.$$
3. En déduire que $a_{p+2} = (n-2)a_{p+1} + (n-1)a_p$, puis démontrer par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:
$$a_p = \frac{(n-1)^p - (-1)^p}{n}.$$
4. En déduire, pour $p \in \mathbb{N}^*$, le nombre de chaînes de longueur p reliant deux sommets distincts de K_n, et le nombre de chaînes fermées de longueur p partant d'un sommet donné.
5. Contrôler ces formules pour $n = 4$ et $p = 3$ à l'aide de l'exercice 21, puis vérifier que le nombre total de chaînes de longueur p partant d'un sommet donné vaut $(n-1)^p$, et expliquer ce résultat directement.