CORRIGÉ – CHAPITRE 8

CONFIGURATIONS GÉOMÉTRIQUES

Racines n-ièmes

EXERCICE 1 ⋆

On utilise la méthode du cours pour résoudre $z^n = a$: si $a = \rho e^{i\varphi}$ est un complexe non nul et $n \in \mathbb{N}^*$, alors l'équation $z^n = a$ admet exactement n solutions, données par :

$$z_k = \rho^{\frac{1}{n}}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \qquad \text{avec} \qquad k \in \{0\,;1\,;\ldots\,;n-1\}$$

a) On a $1 = e^{i0}$, donc $\rho = 1$ et $\varphi = 0$. Les six solutions sont les racines 6-ièmes de l'unité :

$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{6}} = e^{i\frac{k\pi}{3}} \qquad \text{avec} \qquad k \in \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$$

Autrement dit, sous forme algébrique :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{1\,;\ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\ -1\,;\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\ \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}}$$

b) On a $-1 = e^{i\pi}$, donc $\rho = 1$ et $\varphi = \pi$. Les quatre solutions sont :

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)} \qquad \text{avec} \qquad k \in \{0\,;1\,;2\,;3\}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{e^{i\frac{\pi}{4}}\,;\ e^{i\frac{3\pi}{4}}\,;\ e^{i\frac{5\pi}{4}}\,;\ e^{i\frac{7\pi}{4}}\right\} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(\pm 1 \pm i)\right\}}$$

c) On a $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$, donc $\rho = 1$ et $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$. Les cinq solutions sont :

$$z_k = e^{i\left(-\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}\right)} \qquad \text{avec} \qquad k \in \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{e^{-i\frac{\pi}{10}}\,;\ e^{i\frac{3\pi}{10}}\,;\ e^{i\frac{7\pi}{10}}\,;\ e^{i\frac{11\pi}{10}}\,;\ e^{i\frac{3\pi}{2}}\right\}}$$

On remarque en particulier que $-i$ est bien lui-même solution, ce qui correspond à $k = 4$.

EXERCICE 2 ⋆

1. Pour $k \in [\![0, 7]\!]$, $\omega^k = e^{i\frac{k\pi}{4}} = e^{i\frac{2k\pi}{8}}$: ce sont exactement les éléments de $\mathbb{U}_8$ décrits par la Proposition 2. En utilisant les valeurs remarquables de cos et sin :

$$\mathbb{U}_8 = \left\{1\,;\ \tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{2}}{2}\,;\ i\,;\ -\tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{2}}{2}\,;\ -1\,;\ -\tfrac{\sqrt{2}}{2} - i\tfrac{\sqrt{2}}{2}\,;\ -i\,;\ \tfrac{\sqrt{2}}{2} - i\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

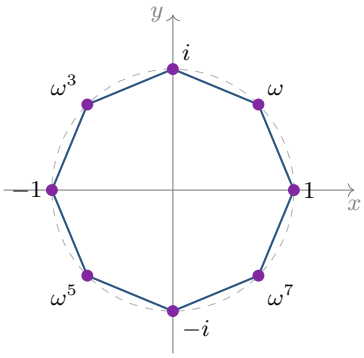
2. $\omega^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ et $\omega^4 = e^{i\pi} = -1$. Ainsi $\omega^{k+4} = \omega^k\omega^4 = -\omega^k$: les éléments de $\mathbb{U}_8$ se regroupent en quatre paires d'opposés, (ω^0, ω^4), (ω^1, ω^5), (ω^2, ω^6) et (ω^3, ω^7). Chaque paire a une somme nulle :

$$\sum_{k=0}^{7} \omega^k = \sum_{k=0}^{3} \left(\omega^k + \omega^{k+4}\right) = \sum_{k=0}^{3} 0 = \boxed{0}$$

C'est le résultat de la Proposition 2, retrouvé ici par symétrie : l'octogone est symétrique par rapport à O.

3. Le côté a pour longueur $|\omega - 1|$:

$$|\omega-1|^2 = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{2} - \sqrt{2} + 1 + \tfrac{1}{2} = 2 - \sqrt{2} \qquad \boxed{|\omega-1| = \sqrt{2-\sqrt{2}} \approx 0{,}765}$$



Les huit racines, en violet, sont régulièrement réparties sur le cercle unité : on passe de l'une à la suivante par un huitième de tour, ce qui revient à multiplier par ω (chapitre 5).

EXERCICE 3 ⋆⋆

Pour les questions d) à f), on utilisera la *technique de l'angle moitié* : pour tout réel θ tel que $e^{i\theta} \neq 1$,

$$\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)} = \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = i\,\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

en utilisant que $\dfrac{1}{-i} = i$. Lorsque de plus $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \neq 0$, ce quotient s'écrit aussi $\dfrac{i}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$; mais il vaut 0 lorsque $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$, c'est-à-dire lorsque $e^{i\theta} = -1$, et l'écriture avec la tangente n'a alors plus de sens.

a) On écrit le second membre sous forme exponentielle : son module vaut $\sqrt{1+3} = 2$ et $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \sqrt[3]{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)},\ k \in \{0\,;1\,;2\} \right\} = \left\{ \sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{\pi}{9}}\ ;\ \sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{7\pi}{9}}\ ;\ \sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{13\pi}{9}} \right\}}$$

b) On simplifie d'abord le second membre en utilisant $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $-1 = e^{i\pi}$:

$$\frac{-3}{1+i\sqrt{3}} = \frac{3\,e^{i\pi}}{2\,e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{3}{2}e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{3}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Les six solutions sont donc :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \sqrt[6]{\frac{3}{2}}\,e^{i\left(\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}\right)},\ k \in \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\} \right\}}$$

c) On simplifie de même le second membre, en utilisant $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$:

$$\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^4}{(1+i)^2} = \frac{2^4 e^{i\frac{4\pi}{3}}}{2\,e^{i\frac{\pi}{2}}} = 8\,e^{i\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)} = 8\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

Les cinq solutions sont donc :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \sqrt[5]{8}\,e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{5}\right)},\ k \in \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\} \right\}}$$

d) On constate tout d'abord que $z=-1$ n'est pas solution, car l'équation donnerait alors $(-2)^5=0$, ce qui est absurde. On peut donc diviser par $(z+1)^5$:

$$(z-1)^5=(z+1)^5 \iff \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5=1$$

Le quotient $\dfrac{z-1}{z+1}$ est donc une racine 5-ième de l'unité, autrement dit il existe $k\in\{0\,;1\,;2\,;3\,;4\}$ tel que $\dfrac{z-1}{z+1}=\omega_k=e^{i\frac{2k\pi}{5}}$. Or $k=0$ donnerait $z-1=z+1$, ce qui est impossible : on a donc $k\neq 0$, et :

$$z-1=\omega_k(z+1) \iff z(1-\omega_k)=1+\omega_k \iff z=\frac{1+\omega_k}{1-\omega_k}$$

D'après la technique de l'angle moitié appliquée à $\theta=\dfrac{2k\pi}{5}$, on en déduit :

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{\frac{i}{\tan\left(\frac{k\pi}{5}\right)}\ ,\ k\in\{1\,;2\,;3\,;4\}\right\}}$$

Les quatre solutions sont donc des imaginaires purs, ce qui était prévisible : l'équation $|z-1|=|z+1|$ qui en découle signifie que le point $M(z)$ est équidistant des points d'affixes 1 et -1, il appartient donc à l'axe des ordonnées.

e) Les valeurs $z=1$ et $z=-1$ sont exclues. En posant $Z=\dfrac{z+1}{z-1}$, qui est non nul, l'équation s'écrit :

$$Z^3+\frac{1}{Z^3}=0 \iff \frac{Z^6+1}{Z^3}=0 \iff Z^6=-1$$

Il existe donc $k\in\{0\,;\ldots\,;5\}$ tel que $Z=e^{i\theta_k}$ avec $\theta_k=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3}$. On revient alors à z :

$$\frac{z+1}{z-1}=Z \iff z+1=Z(z-1) \iff z(1-Z)=-1-Z \iff z=-\frac{1+Z}{1-Z}=-\frac{i}{\tan\left(\frac{\theta_k}{2}\right)}$$

Or $\dfrac{\theta_k}{2}=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{6}$, et on connaît les valeurs $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=2-\sqrt{3}$ et $\tan\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)=2+\sqrt{3}$. En traitant les six valeurs de k, on obtient enfin :

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{\pm i\ ;\ \pm i\left(2-\sqrt{3}\right)\ ;\ \pm i\left(2+\sqrt{3}\right)\right\}}$$

f) On constate de même que $z=i$ n'est pas solution, car l'équation donnerait alors $(2i)^n=0$, ce qui est absurde. On peut donc diviser par $(z-i)^n$:

$$(z+i)^n=(z-i)^n \iff \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n=1$$

Le quotient est donc une racine n-ième de l'unité : il existe $k\in\{0\,;\ldots\,;n-1\}$ tel que $\dfrac{z+i}{z-i}=\omega_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, et $k=0$ est à exclure car il donnerait $i=-i$. Ainsi, pour $k\neq 0$:

$$z+i=\omega_k(z-i) \iff z(1-\omega_k)=-i(1+\omega_k) \iff z=-i\,\frac{1+\omega_k}{1-\omega_k}=-i\times i\,\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$$

Or $-i\times i=1$, et $\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)\neq 0$ pour $1\leqslant k\leqslant n-1$. On en déduit donc que l'équation admet $n-1$ solutions, toutes réelles et distinctes :

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\ ,\ k\in\{1\,;\ldots\,;n-1\}\right\}}$$

Attention : lorsque n est pair, la valeur $k=\frac{n}{2}$ donne la solution $z=0$ (en effet $i^n=(-i)^n$ pour n pair). L'écriture $\dfrac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$ serait alors incorrecte, puisque $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$ n'est pas défini.

EXERCICE 4 ⋆⋆

1. On cherche les complexes $\delta = x + iy$, avec x et y réels, tels que $\delta^2 = 3 - 4i$. On traduit cette égalité par un système, en identifiant les parties réelles et imaginaires, et en ajoutant l'égalité des modules :

$$\delta^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \qquad \text{et} \qquad |\delta|^2 = x^2 + y^2 = |3-4i| = \sqrt{9+16} = 5$$

Ce qui donne le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

En additionnant puis en soustrayant les première et troisième équations, on obtient $2x^2 = 8$ et $2y^2 = 2$, autrement dit $x = \pm 2$ et $y = \pm 1$. La deuxième équation impose enfin que x et y soient de signes contraires, d'où :

$$\boxed{\delta \in \{2 - i\ ;\ -2 + i\}}$$

2. On calcule le discriminant de l'équation $\omega^2 - i\omega - 1 + i = 0$:

$$\Delta = (-i)^2 - 4 \times 1 \times (-1+i) = -1 + 4 - 4i = 3 - 4i$$

D'après la question précédente, les racines carrées de Δ sont $\pm(2-i)$. Les deux solutions sont donc :

$$\omega_1 = \frac{i - (2-i)}{2} = \frac{-2+2i}{2} = -1 + i \qquad \text{et} \qquad \omega_2 = \frac{i + (2-i)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{1\ ;\ -1+i\}}$$

3. Les racines cubiques de 1 sont les solutions de $z^3 = 1$, c'est-à-dire :

$$\boxed{1\ ;\ j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ j^2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

4. Le module de $-1+i$ vaut $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ et $-1 + i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, où on reconnaît le cosinus et le sinus de $\dfrac{3\pi}{4}$, d'où :

$$\boxed{-1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}}$$

5. D'après la question précédente, l'équation s'écrit $z^3 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$, dont les trois solutions sont, en remarquant que $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{6}}$:

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \sqrt[6]{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)}\ ,\ k \in \{0\,;1\,;2\} \right\} = \left\{ \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\ ;\ \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{11\pi}{12}}\ ;\ \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{19\pi}{12}} \right\}}$$

6. On reconnaît l'équation de la question 2. en posant $\omega = z^3$:

$$z^6 - iz^3 - 1 + i = 0 \iff \omega^2 - i\omega - 1 + i = 0 \iff \omega = 1 \ \text{ ou } \ \omega = -1 + i$$

Il reste alors à revenir à z : le cas $z^3 = 1$ a été traité à la question 3., et le cas $z^3 = -1 + i$ à la question 5. On en déduit donc les six solutions :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ 1\ ;\ e^{i\frac{2\pi}{3}}\ ;\ e^{-i\frac{2\pi}{3}}\ ;\ \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\ ;\ \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{11\pi}{12}}\ ;\ \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{19\pi}{12}} \right\}}$$

EXERCICE 5 : LE NOMBRE j ⋆⋆

1. $j^3 = e^{i2\pi} = 1$. D'après la Proposition 2 avec $n = 3$, la somme des éléments de $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$ est nulle : $1 + j + j^2 = 0$. Enfin, $\overline{j} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$, et $j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{4\pi}{3} - 2\pi\right)} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. Comme $j \in \mathbb{U}$, $\frac{1}{j} = \overline{j}$.

$$\boxed{j^3 = 1 \qquad 1 + j + j^2 = 0 \qquad \overline{j} = j^2 = \frac{1}{j}}$$

2. D'après la question 1, $1+j=-j^2=e^{i\pi}e^{-i\frac{2\pi}{3}}=e^{i\frac{\pi}{3}}$. Comme $2026=6\times337+4$:

$$(1+j)^{2026}=e^{i\frac{2026\pi}{3}}=e^{i\left(674\pi+\frac{4\pi}{3}\right)}=e^{i\frac{4\pi}{3}}=\boxed{j^2}$$

3. $AB=|j-1|$, $BC=|j^2-j|=|j|\times|j-1|=|j-1|$ et $CA=|1-j^2|=|\overline{1-j}|=|1-j|$. Les trois côtés ont la même longueur :

$$|j-1|=\left|-\tfrac{3}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{\tfrac{9}{4}+\tfrac{3}{4}}=\sqrt{3}\qquad\boxed{ABC \text{ est équilatéral de côté } \sqrt{3}}$$

Les trois sommets sont sur le cercle unité : le centre du cercle circonscrit est O. On remarque que O est aussi le centre de gravité, puisque $\frac{1+j+j^2}{3}=0$ (voir l'exercice 25).

Affixes, distances et ensembles de points

EXERCICE 6 ⋆

On rappelle que le point d'affixe $re^{i\alpha}$, avec $r>0$, est situé sur le cercle de centre O et de rayon r, dans la direction faisant un angle α avec l'axe des abscisses.

1. Ici le module est constant, égal à 3, tandis que l'argument α parcourt tout l'intervalle $[0\,;2\pi[$: le point M décrit donc l'ensemble des points situés à la distance 3 de l'origine, autrement dit :

$$\boxed{\Gamma_1 \text{ est le cercle de centre } O \text{ et de rayon } 3}$$

2. Ici c'est l'inverse : l'argument est constant, égal à $\dfrac{\pi}{4}$, tandis que le module r parcourt $[0\,;+\infty[$. Le point M décrit donc :

$$\boxed{\Gamma_2 \text{ est la demi-droite d'origine } O \text{ dirigée par l'angle } \frac{\pi}{4}}$$

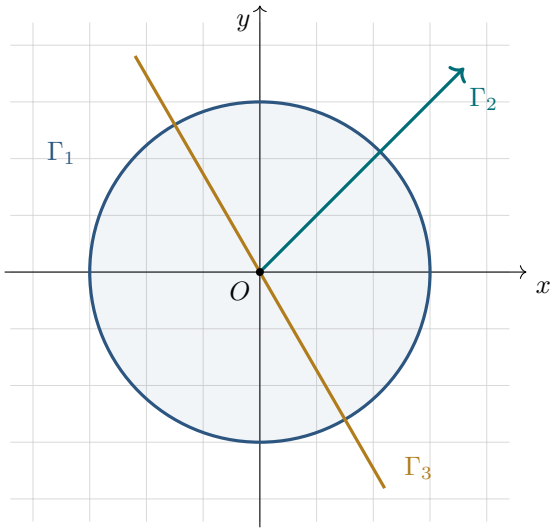
La valeur $r=0$ étant autorisée, l'origine O appartient bien à Γ_2.

3. L'argument est de nouveau constant, mais k peut cette fois être négatif. Or pour $k<0$, on a $k=-|k|$ et $-1=e^{i\pi}$, donc :

$$ke^{-i\frac{\pi}{3}}=|k|\,e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)}=|k|\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

On obtient donc la demi-droite opposée à la précédente, ce qui donne :

$$\boxed{\Gamma_3 \text{ est la droite passant par } O \text{ dirigée par l'angle } -\frac{\pi}{3}}$$



EXERCICE 7 ⋆

On rappelle que pour deux points $M(z)$ et $N(z_N)$, on a $MN = |z_N - z|$.

1. En notant $A(1)$ et $B(3+2i)$, on reconnaît :

$$|z-1| = |z-3-2i| \iff |z-z_A| = |z-z_B| \iff AM = BM$$

Le point M est donc équidistant de A et de B :

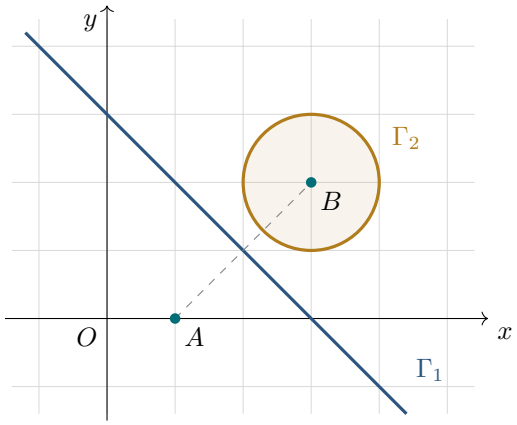
$$\boxed{\Gamma_1 \text{ est la médiatrice du segment } [AB]}$$

On peut en donner une équation : en posant $z = x + iy$, l'égalité des carrés des distances donne $(x-1)^2 + y^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2$, soit après simplification $4x + 4y = 12$, autrement dit la droite d'équation $x + y = 3$.

2. De la même manière :

$$|z-(3+2i)| = 1 \iff BM = 1$$

$$\boxed{\Gamma_2 \text{ est le cercle de centre } B \text{ et de rayon } 1}$$



EXERCICE 8 ⋆

1. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 4 + 3i - 1 - 2i = \boxed{3+i}$ et $AB = |3+i| = \boxed{\sqrt{10}}$.

2. $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, c'est-à-dire $z_B - z_A = z_C - z_D$:

$$z_D = z_C - z_B + z_A = 5 - i - 4 - 3i + 1 + 2i = \boxed{2-2i}$$

L'erreur la plus répandue est d'écrire $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$: on obtiendrait alors le parallélogramme $ABDC$, dont les sommets ne sont pas dans le bon ordre.

3. Le centre I est le milieu des deux diagonales :

$$z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{6+i}{2} = 3 + \frac{1}{2}i \qquad \text{et} \qquad \frac{z_B + z_D}{2} = \frac{6+i}{2} = 3 + \frac{1}{2}i$$

Les deux calculs coïncident, ce qui confirme que les diagonales ont le même milieu. $\boxed{z_I = 3 + \frac{1}{2}i}$

4. Un parallélogramme est un rectangle si et seulement si ses diagonales ont la même longueur. Or $AC = |4-3i| = 5$ et $BD = |-2-5i| = \sqrt{29}$. $\boxed{ABCD \text{ n'est pas un rectangle}}$

EXERCICE 9 ⋆⋆

1. On note $P(2-i)$ et $Q(-1)$: l'égalité s'écrit $PM = QM$, donc **l'ensemble est la médiatrice de** $[PQ]$. En élevant au carré avec $z = x + iy$:

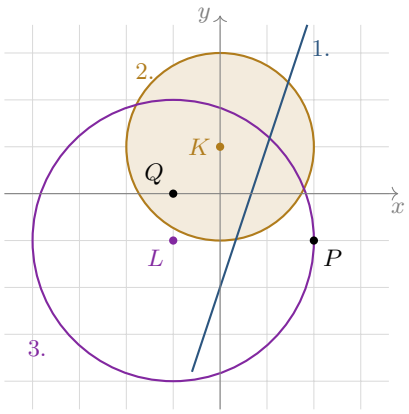
$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = (x+1)^2 + y^2 \iff -4x + 4 + 2y + 1 = 2x + 1 \iff \boxed{y = 3x - 2}$$

2. $|z - i| \leqslant 2$ signifie que la distance de M au point $K(i)$ est au plus 2 : **c'est le disque fermé de centre** K **et de rayon** 2.

3. **Attention au conjugué.** Un nombre complexe et son conjugué ont le même module, et $\overline{z+1-i} = z + 1 + i$, donc :

$$|\overline{z} + 1 - i| = 3 \iff |z + 1 + i| = 3 \iff |z - (-1 - i)| = 3$$

C'est le cercle de centre $L(-1-i)$ **et de rayon** 3, et non le cercle de centre $-1+i$ que l'on obtiendrait en oubliant le conjugué.

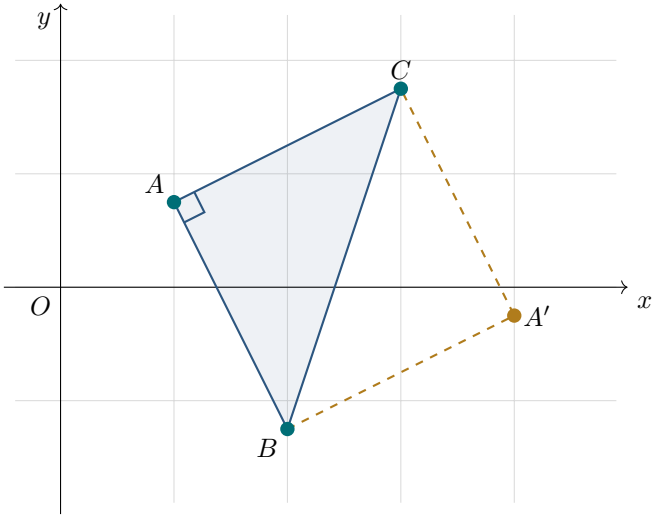


La médiatrice de $[PQ]$ est en bleu ardoise, le disque de centre K en ocre, le cercle de centre L en violet. On vérifie sur la figure que la droite bleu ardoise coupe bien le segment $[PQ]$ en son milieu, à angle droit.

Angles, alignement et nature de figures

EXERCICE 10 ⋆

1. Les points ont pour coordonnées $A\left(1\,;\frac{3}{4}\right)$, $B\left(2\,;-\frac{5}{4}\right)$ et $C\left(3\,;\frac{7}{4}\right)$, ce qui donne, avec le point A' de la question 3. :



2. On calcule les affixes des vecteurs, puis leurs modules :

$$b-a = 2-\frac{5}{4}i-1-\frac{3}{4}i = 1-2i \qquad \text{d'où } AB=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$
$$c-a = 3+\frac{7}{4}i-1-\frac{3}{4}i = 2+i \qquad \text{d'où } AC=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$
$$c-b = 3+\frac{7}{4}i-2+\frac{5}{4}i = 1+3i \qquad \text{d'où } BC=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

On constate ainsi que $AB=AC$, et de plus :

$$AB^2+AC^2 = 5+5 = 10 = BC^2$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est donc rectangle en A :

$$\boxed{ABC \text{ est un triangle rectangle isocèle en } A}$$

On peut aussi le justifier directement par un quotient :

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{2+i}{1-2i} = \frac{(2+i)(1+2i)}{1^2+2^2} = \frac{2+4i+i-2}{5} = i$$

Ce quotient a pour module 1 (donc $AC=AB$) et pour argument $\frac{\pi}{2}$ (donc $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}$).

3. Le quadrilatère $ABA'C$ est un carré si et seulement si c'est un parallélogramme dont deux côtés consécutifs sont perpendiculaires et de même longueur, ce qui est déjà acquis d'après la question 2. Il suffit donc d'écrire que $ABA'C$ est un parallélogramme, c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA'}$:

$$b-a = a'-c \iff a' = b+c-a$$

On calcule alors :

$$a' = \left(2-\frac{5}{4}i\right)+\left(3+\frac{7}{4}i\right)-\left(1+\frac{3}{4}i\right) = (2+3-1)+\left(-\frac{5}{4}+\frac{7}{4}-\frac{3}{4}\right)i$$

$$\boxed{a' = 4-\frac{1}{4}i}$$

EXERCICE 11 ⋆

On calcule les affixes des trois vecteurs du triangle, puis leurs modules :

$$b-a = -3-6i+2-2i = -1-8i \qquad \text{d'où } AB=\sqrt{1+64}=\sqrt{65}$$
$$c-a = 1+2-2i = 3-2i \qquad \text{d'où } AC=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$$
$$c-b = 1+3+6i = 4+6i \qquad \text{d'où } BC=\sqrt{16+36}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$$

Les trois longueurs étant deux à deux différentes, le triangle n'est pas isocèle. En revanche :

$$AC^2+BC^2 = 13+52 = 65 = AB^2$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit donc que :

$$\boxed{ABC \text{ est un triangle rectangle en } C}$$

On peut également le vérifier à l'aide du quotient :

$$\frac{b-c}{a-c} = \frac{-4-6i}{-3+2i} = \frac{(-4-6i)(-3-2i)}{3^2+2^2} = \frac{12+8i+18i-12}{13} = 2i$$

Ce quotient est un imaginaire pur, son argument vaut donc $\frac{\pi}{2}$, ce qui confirme que l'angle en C est droit. Son module valant 2, on obtient de plus $CB=2\,CA$.

EXERCICE 12 ⋆

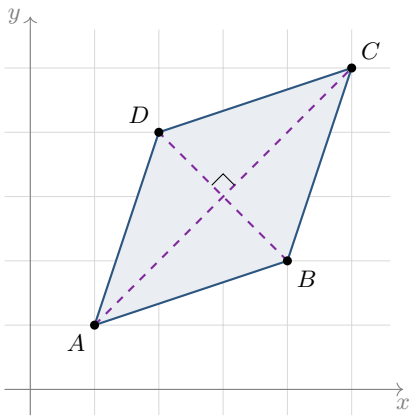
On utilise la Proposition 8 du cours, en calculant à chaque fois un quotient.

1. $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{6+3i}{2+i} = 3 \in \mathbb{R}$. $\boxed{A, B, C \text{ sont alignés}}$ On a même $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$.
2. $\dfrac{z_E - z_D}{z_B - z_A} = \dfrac{4+2i}{2+i} = 2 \in \mathbb{R}$: $\boxed{(AB) \parallel (DE)}$. Pour savoir si elles sont confondues, on teste si D appartient à (AB) :
$$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1-2i}{2+i} = \frac{(1-2i)(2-i)}{5} = \frac{2-i-4i-2}{5} = -i \notin \mathbb{R}$$
$D \notin (AB)$: les droites sont **strictement** parallèles.
3. $\dfrac{z_G - z_D}{z_B - z_A} = \dfrac{-2+4i}{2+i} = \dfrac{(-2+4i)(2-i)}{5} = \dfrac{-4+2i+8i+4}{5} = 2i \in i\mathbb{R}$. $\boxed{(AB) \perp (DG)}$

Le calcul de la question 2 montre aussi que $(AD) \perp (AB)$ et $AD = AB$, puisque le quotient vaut $-i$.

EXERCICE 13 : NATURE D'UN QUADRILATÈRE ⋆⋆

1. $z_B - z_A = 3 + i$ et $z_C - z_D = 3 + i$: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, donc $\boxed{ABCD \text{ est un parallélogramme}}$.
2. $$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1+3i}{3+i} = \frac{(1+3i)(3-i)}{10} = \frac{3-i+9i+3}{10} = \boxed{\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i}$$
Son module vaut $\sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1$, donc $AD = AB$: le parallélogramme a deux côtés consécutifs égaux, **c'est un losange**. Ce quotient n'est pas un imaginaire pur, donc (AB) et (AD) ne sont pas perpendiculaires : **ce n'est pas un carré**.
3. $$\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B} = \frac{4+4i}{-2+2i} = \frac{(4+4i)(-2-2i)}{8} = \frac{-8-8i-8i+8}{8} = -2i \in i\mathbb{R}$$
Les diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires, comme dans tout losange, et $AC = 2BD$.
4. D'après la Proposition 7, $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \arg\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)$. C'est l'angle $\theta \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\cos(\theta) = \frac{3}{5}$ et $\sin(\theta) = \frac{4}{5}$:
$$\boxed{\theta \approx 0{,}927 \text{ rad} \approx 53{,}1°}$$



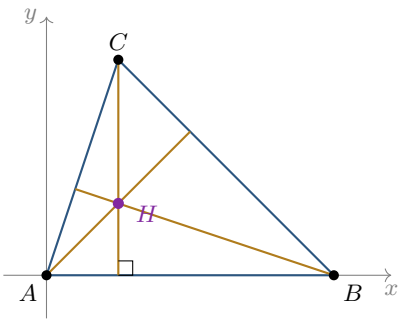
Le losange $ABCD$ est en bleu ardoise. Ses diagonales, en pointillés violets, se coupent à angle droit en leur milieu, le point d'affixe $3 + 3i$.

EXERCICE 14 : ORTHOCENTRE D'UN TRIANGLE ⋆⋆

1. Si $M \neq C$, M est sur la hauteur issue de C si et seulement si $(CM) \perp (AB)$, c'est-à-dire, d'après la Proposition 8, $\frac{z - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$. Le point C lui-même donne le quotient 0. D'où l'équivalence annoncée. Avec $z = x + iy$:
$$\frac{z - z_C}{z_B - z_A} = \frac{(x-1) + i(y-3)}{4} \in i\mathbb{R} \iff x - 1 = 0 \qquad \boxed{\text{hauteur issue de } C : x = 1}$$
C'est cohérent : (AB) est l'axe des abscisses, et la hauteur est la verticale passant par C.

2. $M(z)$ est sur la hauteur issue de A si et seulement si $\frac{z-z_A}{z_C-z_B} = \frac{x+iy}{-3+3i} \in i\mathbb{R}$. On multiplie par le conjugué du dénominateur :
$$\frac{(x+iy)(-3-3i)}{18} = \frac{(-3x+3y)+i(-3x-3y)}{18}$$
La partie réelle est nulle si et seulement si $y = x$: $\boxed{\text{hauteur issue de } A : y = x}$. L'intersection avec $x = 1$ donne $\boxed{z_H = 1+i}$.

3. $\frac{z_H - z_B}{z_C - z_A} = \frac{-3+i}{1+3i} = \frac{(-3+i)(1-3i)}{10} = \frac{-3+9i+i+3}{10} = i \in i\mathbb{R}$, donc $(BH) \perp (AC)$: H est aussi sur la hauteur issue de B. **Les trois hauteurs sont concourantes** en H, appelé *orthocentre* du triangle. L'exercice 31 démontre ce résultat pour un triangle quelconque.

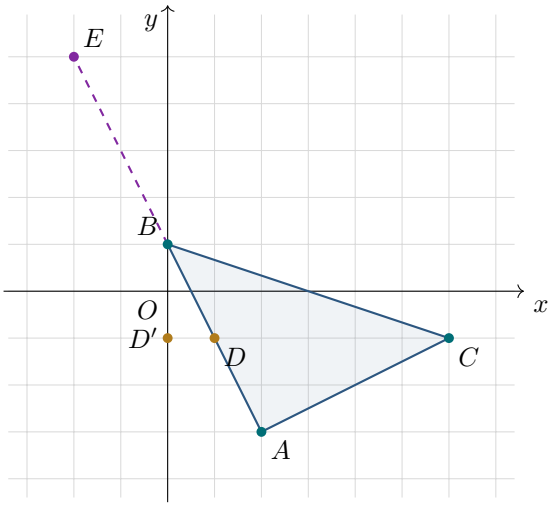


Les trois hauteurs, en ocre, passent toutes par le point violet $H(1+i)$. La hauteur issue de B coupe (AC) au point d'affixe $0{,}4 + 1{,}2i$.

Problèmes de synthèse

EXERCICE 15 ⋆⋆

1. Les points ont pour coordonnées $A(2\,;-3)$, $B(0\,;1)$ et $C(6\,;-1)$. On y ajoute les points $D(1\,;-1)$, $D'(0\,;-1)$ et $E(-2\,;5)$ obtenus aux questions 3. et 4. :



2. (a) On calcule le quotient demandé :
$$\begin{aligned}\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} &= \frac{i-(2-3i)}{6-i-(2-3i)} \\ &= \frac{-2+4i}{4+2i} \\ &= \frac{(-2+4i)(4-2i)}{4^2+2^2} \\ &= \frac{-8+4i+16i+8}{20} = \frac{20i}{20}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i}$$

(b) Ce quotient a pour module 1 et pour argument $\dfrac{\pi}{2}$, or :

$$\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \frac{AB}{AC} \qquad \text{et} \qquad \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) \ [2\pi]$$

On en déduit donc que $AB = AC$ et que l'angle en A est droit :

$$\boxed{ABC \text{ est un triangle rectangle isocèle en } A}$$

3. On applique f à l'affixe $z_D = 1 - i$, qui est bien différente de i :

$$\begin{aligned} z_{D'} = f(1-i) &= \frac{i\,(1 - i - 2 + 3i)}{1 - i - i} \\ &= \frac{i(-1 + 2i)}{1 - 2i} \\ &= \frac{-i - 2}{1 - 2i} = \frac{(-2 - i)(1 + 2i)}{1^2 + 2^2} \\ &= \frac{-2 - 4i - i + 2}{5} = \frac{-5i}{5} \end{aligned}$$

$$\boxed{z_{D'} = -i}$$

4. (a) On cherche les antécédents de $2i$ par f, autrement dit les complexes $z \neq i$ tels que :

$$\begin{aligned} \frac{i(z - 2 + 3i)}{z - i} = 2i &\iff i(z - 2 + 3i) = 2i(z - i) \\ &\iff z - 2 + 3i = 2(z - i) \qquad \text{(en divisant par } i \neq 0) \\ &\iff z - 2 + 3i = 2z - 2i \\ &\iff -z = 2 - 5i \end{aligned}$$

Cette équation admet une unique solution, différente de i, ce qui prouve l'existence et l'unicité du point E :

$$\boxed{z_E = -2 + 5i}$$

(b) On calcule les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$:

$$z_B - z_A = i - 2 + 3i = -2 + 4i \qquad \text{et} \qquad z_E - z_A = -2 + 5i - 2 + 3i = -4 + 8i$$

On constate alors que $z_E - z_A = 2\,(z_B - z_A)$, autrement dit $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$: les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires, d'où :

$$\boxed{E \text{ appartient à la droite } (AB)}$$

5. Soit $M(z)$ un point distinct de B, c'est-à-dire tel que $z \neq i$. On remarque que $z - 2 + 3i = z - z_A$ et $z - i = z - z_B$, ce qui permet d'écrire :

$$z' = \frac{i\,(z - z_A)}{z - z_B}$$

On passe alors au module, en utilisant que le module d'un quotient est le quotient des modules et que $|i| = 1$:

$$OM' = |z'| = \frac{|i| \times |z - z_A|}{|z - z_B|} = \frac{|z - z_A|}{|z - z_B|}$$

$$\boxed{OM' = \frac{AM}{BM}}$$

6. Soit M un point distinct de A et de B : le complexe z' est alors non nul, et son argument est bien défini. On utilise les propriétés de l'argument d'un produit et d'un quotient :

$$\begin{aligned}\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM'}\right) &\equiv \arg(z') \\ &\equiv \arg(i) + \arg(z - z_A) - \arg(z - z_B) \\ &\equiv \frac{\pi}{2} + \left(\vec{\imath}, \overrightarrow{AM}\right) - \left(\vec{\imath}, \overrightarrow{BM}\right) \ [2\pi]\end{aligned}$$

Or d'après la relation de Chasles sur les angles orientés :

$$\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{AM}\right) - \left(\vec{\imath}, \overrightarrow{BM}\right) = \left(\overrightarrow{BM}, \vec{\imath}\right) + \left(\vec{\imath}, \overrightarrow{AM}\right) = \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) \ [2\pi]$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) + \frac{\pi}{2} \ [2\pi]}$$

7. Supposons que M appartienne à la médiatrice du segment $[AB]$. Par définition de la médiatrice, on a alors $AM = BM$, et comme $M \neq B$, la question 5. donne :

$$OM' = \frac{AM}{BM} = 1$$

La distance de M' à l'origine est donc constante égale à 1 :

$$\boxed{M' \text{ appartient au cercle de centre } O \text{ et de rayon } 1}$$

8. Supposons que M' appartienne à l'axe des imaginaires purs. Le nombre z' est alors un imaginaire pur, autrement dit $\dfrac{z'}{i}$ est un réel. Or d'après la question 5. :

$$\frac{z'}{i} = \frac{z - z_A}{z - z_B}$$

Ce quotient est donc réel, ce qui signifie que les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires (son argument vaut 0 ou π), autrement dit que les points A, B et M sont alignés :

$$\boxed{M \text{ appartient à la droite } (AB)}$$

On peut aussi conclure avec la question 6. : z' imaginaire pur signifie

$$\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM'}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi] \quad \text{donc} \quad \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) \equiv 0 \ [\pi]$$

ce qui traduit bien l'alignement de A, B et M.

EXERCICE 16 ⋆⋆

1. Soit $z = x + iy$ avec x et y réels. On a alors :

$$f(z) = \frac{z - 2 + i}{z + 2i} = \frac{(x-2) + i(y+1)}{x + i(y+2)}$$

On multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur :

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{\big((x-2) + i(y+1)\big)\big(x - i(y+2)\big)}{x^2 + (y+2)^2} \\ &= \frac{x(x-2) + (y+1)(y+2) + i\big(x(y+1) - (x-2)(y+2)\big)}{x^2 + (y+2)^2}\end{aligned}$$

On développe alors séparément les deux parenthèses du numérateur :

$$\begin{aligned}x(x-2) + (y+1)(y+2) &= x^2 - 2x + y^2 + 3y + 2 \\ x(y+1) - (x-2)(y+2) &= xy + x - (xy + 2x - 2y - 4) = -x + 2y + 4\end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\mathcal{R}e\big[f(z)\big] = \frac{x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2}{x^2 + (y+2)^2} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{I}m\big[f(z)\big] = \frac{-x + 2y + 4}{x^2 + (y+2)^2}}$$

2. Dans les deux cas, le dénominateur $x^2+(y+2)^2$ est strictement positif, puisque $z \neq -2i$: seul le numérateur intervient.

   (a) Le nombre $f(z)$ est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle :

   $$\mathcal{I}m\big[f(z)\big] = 0 \iff -x+2y+4=0 \iff x = 2y+4$$

   On reconnaît une équation de droite :

   $$\boxed{E \text{ est la droite d'équation } x-2y-4=0, \text{ privée du point } A(0\,;-2)}$$

   Le point A d'affixe $-2i$ appartient en effet à cette droite, mais est exclu du domaine de f.

   (b) Le nombre $f(z)$ est un imaginaire pur (éventuellement nul) si et seulement si sa partie réelle est nulle :

   $$\mathcal{R}e\big[f(z)\big] = 0 \iff x^2+y^2-2x+3y+2=0$$

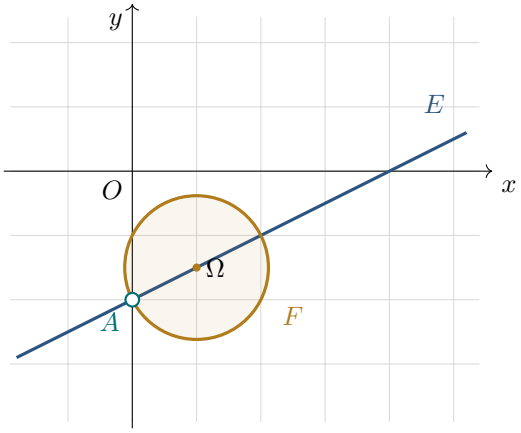
   On reconnaît le début de deux identités remarquables, que l'on complète :

   $$\begin{aligned} x^2-2x+y^2+3y+2=0 &\iff (x-1)^2-1+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+2=0 \\ &\iff (x-1)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{4} \end{aligned}$$

   On reconnaît l'équation d'un cercle :

   $$\boxed{F \text{ est le cercle de centre } \Omega\left(1\,;-\frac{3}{2}\right) \text{ et de rayon } \frac{\sqrt{5}}{2}, \text{ privé du point } A(0\,;-2)}$$

   (c) On obtient la figure suivante :



   Le point A, exclu des deux ensembles, est représenté par un cercle évidé : on constate qu'il s'agit bien du point d'intersection de la droite E et du cercle F.

EXERCICE 17 ⋆⋆

1. On calcule le discriminant de (E) :

   $$\Delta = \left(-2\sqrt{3}\right)^2 - 4\times 1\times 4 = 12-16 = -4 < 0$$

   Comme $\Delta<0$, on a $\sqrt{-\Delta}=2$ et les deux solutions sont :

   $$z = \frac{2\sqrt{3}\pm 2i}{2} = \sqrt{3}\pm i$$

   $$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\sqrt{3}-i\,;\ \sqrt{3}+i\right\}}$$

2. (a) Pour $n = 1$, on a $(-1)^1 = -1$, donc :

$$z_1 = 2\,e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i$$

On reconnaît l'une des deux solutions trouvées à la question 1. :

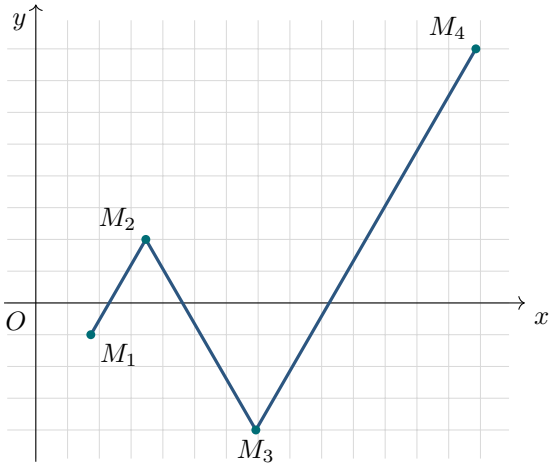
$$\boxed{z_1 \text{ est bien une solution de } (E)}$$

(b) Pour $n = 2$, on a $(-1)^2 = 1$, et pour $n = 3$, $(-1)^3 = -1$, ce qui donne :

$$z_2 = 4\,e^{i\frac{\pi}{6}} = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \qquad ; \qquad z_3 = 8\,e^{-i\frac{\pi}{6}} = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{z_2 = 2\sqrt{3} + 2i \qquad \text{et} \qquad z_3 = 4\sqrt{3} - 4i}$$

(c) On calcule enfin $z_4 = 16\,e^{i\frac{\pi}{6}} = 8\sqrt{3} + 8i$, ce qui permet de placer les quatre points, d'abscisses approchées 1,73 ; 3,46 ; 6,93 et 13,86 :



3. Soit $n \geqslant 1$. On passe de la forme exponentielle à la forme algébrique :

$$z_n = 2^n\,e^{i(-1)^n\frac{\pi}{6}} = 2^n\left(\cos\left((-1)^n\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left((-1)^n\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

Or la fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire, et $(-1)^n$ vaut 1 ou -1, ainsi :

$$\cos\left((-1)^n\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\left((-1)^n\frac{\pi}{6}\right) = (-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{(-1)^n}{2}$$

On en déduit donc que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\boxed{z_n = 2^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2}\right)}$$

4. On utilise la relation $M_nM_{n+1} = |z_{n+1} - z_n|$:

$$M_1M_2 = |z_2 - z_1| = \left|2\sqrt{3} + 2i - \sqrt{3} + i\right| = \left|\sqrt{3} + 3i\right| = \sqrt{3+9} = \sqrt{12}$$
$$M_2M_3 = |z_3 - z_2| = \left|4\sqrt{3} - 4i - 2\sqrt{3} - 2i\right| = \left|2\sqrt{3} - 6i\right| = \sqrt{12+36} = \sqrt{48}$$

$$\boxed{M_1M_2 = 2\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad M_2M_3 = 4\sqrt{3}}$$

Ces deux valeurs sont bien conformes à la formule admise $M_nM_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$, pour $n = 1$ et $n = 2$.

5. (a) Soit $n \geqslant 1$. D'après la formule admise, l_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $2\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned} l_n &= \sum_{k=1}^{n} M_k M_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} 2^k \sqrt{3} \\ &= \sqrt{3}\left(2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n\right) \\ &= \sqrt{3} \times 2 \times \frac{1-2^n}{1-2} \end{aligned}$$

On en déduit donc que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\boxed{l_n = 2\sqrt{3}\,(2^n - 1)}$$

(b) On résout l'inéquation :

$$\begin{aligned} l_n > 1000 &\iff 2\sqrt{3}\,(2^n - 1) > 1000 \\ &\iff 2^n - 1 > \frac{500}{\sqrt{3}} \\ &\iff 2^n > \frac{500\sqrt{3}}{3} + 1 \approx 289{,}7 \end{aligned}$$

Or les puissances de 2 successives valent $2^8 = 256$ et $2^9 = 512$, et la suite (2^n) est strictement croissante. On en déduit donc que le plus petit entier cherché est :

$$\boxed{n = 9}$$

On peut le vérifier : $l_8 = 2\sqrt{3} \times 255 = 510\sqrt{3} \approx 883$, tandis que $l_9 = 2\sqrt{3} \times 511 = 1022\sqrt{3} \approx 1770$.

EXERCICE 18 : LE CERCLE DE THALÈS ⋆⋆⋆

1. On multiplie par le conjugué du dénominateur, $\overline{z+1} = (x+1) - iy$:

$$Z = \frac{\big((x-1)+iy\big)\big((x+1)-iy\big)}{(x+1)^2+y^2} = \frac{x^2-1+y^2+i\big(y(x+1)-y(x-1)\big)}{(x+1)^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-1+2iy}{(x+1)^2+y^2}$$

2. Z est imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle : $x^2 + y^2 = 1$.

$$\boxed{\mathcal{E} \text{ est le cercle unité, privé du point } B(-1)}$$

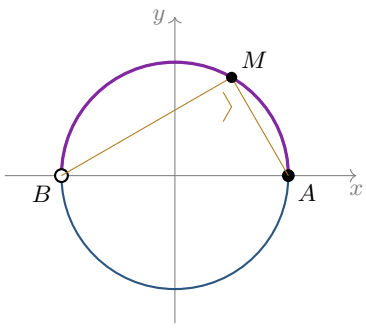
3. D'après la Proposition 7, pour M distinct de A et B :

$$\arg(Z) = \arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) \ [2\pi]$$

$Z \in i\mathbb{R}^*$ signifie donc que $(MA) \perp (MB)$: le triangle AMB est rectangle en M. On retrouve le **théorème de Thalès sur le cercle** : AMB est rectangle en M si et seulement si M appartient au cercle de diamètre $[AB]$, privé de A et B. Ici, ce cercle est le cercle unité.

4. $\arg(Z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ signifie que Z est un imaginaire pur de partie imaginaire strictement positive : $x^2+y^2 = 1$ et $y > 0$.

$$\boxed{\mathcal{F} \text{ est le demi-cercle unité supérieur, extrémités } A \text{ et } B \text{ exclues}}$$



L'ensemble $\mathcal{E}$ est tout le cercle bleu ardoise, sauf le point B dessiné évidé ; le point A en fait partie, car il donne $Z = 0$. L'ensemble $\mathcal{F}$ est l'arc violet, sans ses extrémités. Pour un point M de l'arc violet, l'angle $\widehat{AMB}$ est droit, comme le montre le triangle ocre.

Pour aller plus loin

EXERCICE 19 ⋆⋆

a) On cherche $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$, puisque $z = 0$ n'est pas solution. Comme $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$:

$$z^2 = i \iff r^2 e^{2i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}} \iff \begin{cases} r^2 = 1 \\ 2\theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta \equiv \frac{\pi}{4}\ [\pi] \end{cases}$$

$$\boxed{z = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \quad \text{ou} \quad z = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}$$

b) $2i\,e^{-i\pi/4} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$. Par la même méthode, $z^2 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ équivaut à $|z| = \sqrt{2}$ et $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{8}\ [\pi]$:

$$\boxed{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{8}} \quad \text{et} \quad \sqrt{2}\,e^{i\frac{9\pi}{8}} = -\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{8}}}$$

Comme pour les réels, les deux racines carrées d'un complexe non nul sont opposées.

EXERCICE 20 ⋆⋆

Pour $z \neq 0$, $\dfrac{1+z}{z} = \dfrac{1}{z} + 1$. Ce nombre est réel si et seulement si $\frac{1}{z}$ est réel, c'est-à-dire si et seulement si $z = \frac{1}{1/z}$ est réel (l'inverse d'un réel non nul est réel).

$$\boxed{\text{l'ensemble est } \mathbb{R}^* \text{ ; son image est l'axe des abscisses privé de } O}$$

EXERCICE 21 ⋆⋆

Si $z = i$, deux des trois points sont confondus : ils sont alignés. Supposons $z \neq i$, et notons $A(i)$, $M(z)$, $N\left(\frac{1}{z}\right)$. D'après la Proposition 8, ils sont alignés si et seulement si $\dfrac{\frac{1}{z} - i}{z - i}$ est réel, ce qui revient à dire que $\left(\frac{1}{z} - i\right)\overline{(z-i)}$ est réel, puisqu'on a multiplié par $|z-i|^2 > 0$. Avec $z = x + iy$ et $r^2 = x^2 + y^2$:

$$\frac{1}{z} - i = \frac{x - iy}{r^2} - i = \frac{x - i\left(y + r^2\right)}{r^2} \qquad ; \qquad \overline{z - i} = x - i(y-1)$$

La partie imaginaire du produit $\big(x - i(y+r^2)\big)\big(x - i(y-1)\big)$ vaut $-x(y-1) - x(y+r^2) = -x\left(x^2 + y^2 + 2y - 1\right)$. Elle est nulle si et seulement si $x = 0$ ou $x^2 + (y+1)^2 = 2$. Le cas $z = i$ est contenu dans le premier.

$$\boxed{\text{les points sont alignés} \iff z \in i\mathbb{R}^* \ \text{ ou } \ |z + i| = \sqrt{2}}$$

L'image est la réunion de l'axe des ordonnées privé de O et du cercle de centre $-i$ et de rayon $\sqrt{2}$, qui ne passe pas par O. Exemple : $z = \sqrt{2} - i$ est sur ce cercle, puisque $2 + 0 = 2$. On a alors $\frac{1}{z} = \frac{\sqrt{2}+i}{3}$, et l'on vérifie que $\dfrac{\frac{1}{z} - i}{z - i} = \dfrac{1}{3}$ est réel.

EXERCICE 22 ⋆⋆

Le triangle doit avoir trois sommets distincts : $z \neq 1$ et $z \neq i$. Il est rectangle en z si et seulement si $\frac{1-z}{i-z} \in i\mathbb{R}$ (Proposition 8), c'est-à-dire si la partie réelle de $(1-z)\overline{(i-z)}$ est nulle. Avec $z = x + iy$:

$$(1-z)\overline{(i-z)} = \big((1-x) - iy\big)\big(-x - i(1-y)\big)$$

dont la partie réelle vaut $-x(1-x) - y(1-y) = x^2 - x + y^2 - y$. Elle est nulle si et seulement si :

$$\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{2}$$

$$\boxed{z \text{ décrit le cercle de centre } \tfrac{1+i}{2} \text{ et de rayon } \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \text{ privé des points 1 et } i}$$

C'est le cercle de diamètre $[AB]$, avec $A(1)$ et $B(i)$: on retrouve le résultat de l'exercice 18.

EXERCICE 23 ⋆⋆⋆

Notons $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, de sorte que $\mathbb{U}_n = \{\omega^k \ ; \ 0 \leqslant k \leqslant n-1\}$.

a) Si $n = 1$, $\mathbb{U}_1 = \{1\}$ et la somme vaut 1. Si $n \geqslant 2$, $\omega \neq 1$, et la somme géométrique donne $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = 0$.

$$\boxed{\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}}$$

b) La somme cherchée est $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega^k\right)^p = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega^p\right)^k$, somme géométrique de raison $\omega^p = e^{i\frac{2p\pi}{n}}$.

- Si n divise p, $\omega^p = 1$, et la somme vaut n.
- Sinon, $\frac{2p\pi}{n} \not\equiv 0\ [2\pi]$, donc $\omega^p \neq 1$, et la somme vaut $\frac{(\omega^p)^n - 1}{\omega^p - 1} = \frac{(\omega^n)^p - 1}{\omega^p - 1} = 0$.

$$\boxed{\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z^p = \begin{cases} n & \text{si } n \mid p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

La question a) est le cas $p = 1$. Par exemple, avec $n = 4$: $1^2 + i^2 + (-1)^2 + (-i)^2 = 0$ et $1^4 + i^4 + (-1)^4 + (-i)^4 = 4$.

EXERCICE 24 : NOMBRES COMPLEXES ET THÉORÈME DE LA MÉDIANE ⋆⋆⋆

a) On utilise $|w|^2 = w\overline{w}$:

$$|z+z'|^2 = (z+z')\left(\overline{z}+\overline{z'}\right) = |z|^2 + |z'|^2 + z\overline{z'} + \overline{z}z'$$
$$|z-z'|^2 = (z-z')\left(\overline{z}-\overline{z'}\right) = |z|^2 + |z'|^2 - z\overline{z'} - \overline{z}z'$$

En additionnant, les termes croisés disparaissent : $\boxed{|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)}$.

b) Soit $OACB$ le parallélogramme construit sur $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, d'affixes z et z'. Ses côtés mesurent $|z|$ et $|z'|$, ses diagonales $OC = |z+z'|$ et $AB = |z-z'|$. **La somme des carrés des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés de ses quatre côtés.** Pour un rectangle, on retrouve que les deux diagonales sont égales, chacune de carré $|z|^2 + |z'|^2$ (Pythagore).

c) Appliquons a) à $z = z_B - z_A$ et $z' = z_C - z_A$. Alors $z + z' = 2(z_I - z_A)$ et $z' - z = z_C - z_B$, d'où $4AI^2 + BC^2 = 2\left(AB^2 + AC^2\right)$:

$$\boxed{AI^2 = \frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4}}$$

Contrôle sur le triangle rectangle de côtés 3, 4, 5 (rectangle en A, $BC = 5$) : $AI^2 = \frac{18+32-25}{4} = \frac{25}{4}$, donc $AI = \frac{5}{2} = \frac{BC}{2}$, comme attendu pour la médiane issue de l'angle droit.

EXERCICE 25 : POINT DE CONCOURS DES MÉDIANES ⋆⋆⋆

Soit A' le milieu de $[BC]$, d'affixe $a' = \frac{b+c}{2}$; la médiane issue de A est la droite (AA'), et $A' \neq A$ puisque A, B, C ne sont pas alignés. On calcule :

$$g - a = \frac{a+b+c}{3} - a = \frac{b+c-2a}{3} = \frac{2}{3}\left(\frac{b+c}{2} - a\right) = \frac{2}{3}(a' - a)$$

Ainsi $\frac{g-a}{a'-a} = \frac{2}{3} \in \mathbb{R}$: G appartient à (AA'), et même $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$. L'expression de g étant symétrique en a, b, c, le même calcul montre que G appartient aux deux autres médianes.

$$\boxed{\text{les trois médianes passent par } G, \text{ situé aux deux tiers de chacune à partir du sommet}}$$

EXERCICE 26 ⋆⋆⋆

a) ABC est équilatéral direct si et seulement si $AC = AB$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, c'est-à-dire, d'après la Proposition 7, si et seulement si :

$$\boxed{\frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}} \qquad \text{et pour le sens indirect :} \qquad \boxed{\frac{c-a}{b-a} = e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

b) Posons $u = \frac{c-a}{b-a}$. Les nombres $e^{\pm i\frac{\pi}{3}} = \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$ sont exactement les deux racines de $X^2 - X + 1$, de discriminant -3. D'après a) :

$$ABC \text{ équilatéral} \iff u^2 - u + 1 = 0 \iff (c-a)^2 - (c-a)(b-a) + (b-a)^2 = 0$$

en multipliant par $(b-a)^2 \neq 0$. On développe :

$$c^2 - 2ac + a^2 - \big(bc - ac - ab + a^2\big) + b^2 - 2ab + a^2 = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

$$\boxed{ABC \text{ équilatéral} \iff a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0}$$

Avec $a = 1$, $b = j$, $c = j^2$ (exercice 5) : $1 + j^2 + j^4 - j - j^3 - j^2 = 1 + j - j - 1 = 0$, puisque $j^4 = j$ et $j^3 = 1$.

EXERCICE 27 ⋆⋆⋆

Les sommets sont les points M_k d'affixes ω^k, avec $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

- Périmètre. Tous les côtés ont la longueur $|\omega - 1|$. Par la technique de l'arc moitié (chapitre 5) :

$$\omega - 1 = e^{i\frac{\pi}{n}}\left(e^{i\frac{\pi}{n}} - e^{-i\frac{\pi}{n}}\right) = 2i\sin\left(\tfrac{\pi}{n}\right)e^{i\frac{\pi}{n}} \qquad \text{d'où} \qquad |\omega - 1| = 2\sin\left(\tfrac{\pi}{n}\right)$$

car $0 < \frac{\pi}{n} < \pi$. Ainsi $\boxed{P_n = 2n\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}$.

- Aire. Le polygone est formé de n triangles OM_kM_{k+1}, isocèles en O de côtés 1 et d'angle au sommet $\frac{2\pi}{n}$. Chacun a pour aire $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, donc $\boxed{A_n = \dfrac{n}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}$.

- Limites. On sait que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x} = 1$: c'est le nombre dérivé de sin en 0, qui vaut $\cos(0) = 1$. Alors :

$$P_n = 2\pi \times \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\pi \qquad ; \qquad A_n = \pi \times \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi$$

On retrouve le périmètre et l'aire du disque unité : c'est l'idée d'Archimède, qui encadrait π par des polygones réguliers. Pour $n = 6$: $P_6 = 12 \times \frac{1}{2} = 6$ et $A_6 = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}60$.

EXERCICE 28 : INÉGALITÉ DE PTOLÉMÉE ⋆⋆⋆

a) On développe chaque membre :

$$(a-c)(b-d) = ab - ad - bc + cd$$
$$(b-a)(d-c) + (b-c)(a-d) = (bd - bc - ad + ac) + (ab - bd - ac + cd) = ab - ad - bc + cd$$

Les deux membres sont égaux.

b) On note a, b, c, d les affixes de A, B, C, D. On passe au module dans l'égalité a), puis on applique l'inégalité triangulaire (Proposition 5) et $|zz'| = |z|\,|z'|$:

$$AC \cdot BD = |a-c|\,|b-d| = |(b-a)(d-c) + (b-c)(a-d)| \leqslant |b-a|\,|d-c| + |b-c|\,|a-d|$$

$$\boxed{AC \cdot BD \leqslant AB \cdot CD + BC \cdot DA}$$

Pour un carré de côté 1, $AC \cdot BD = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 = 1 \times 1 + 1 \times 1$ *: il y a égalité. Le théorème de Ptolémée affirme que l'égalité a lieu exactement lorsque $ABCD$ est un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle.*

EXERCICE 29 ⋆⋆⋆⋆

Pour $z \neq 0$: $\left|z+\frac{1}{z}\right| = 2 \iff \left|\frac{z^2+1}{z}\right| = 2 \iff |z^2+1|^2 = 4|z|^2$. On développe avec le conjugué, en posant $z = x+iy$:

$$|z^2+1|^2 = \left(z^2+1\right)\left(\overline{z}^2+1\right) = |z|^4 + z^2 + \overline{z}^2 + 1 = |z|^4 + 2\left(x^2-y^2\right) + 1$$

car $z^2+\overline{z}^2 = 2\mathcal{R}e\left(z^2\right) = 2(x^2-y^2)$. En notant $\rho = |z|^2 = x^2+y^2$, l'équation devient :

$$\rho^2 + 2x^2 - 2y^2 + 1 - 4x^2 - 4y^2 = 0 \iff \rho^2 - 2\rho + 1 - 4y^2 = 0 \iff (\rho-1)^2 = (2y)^2$$

c'est-à-dire $\rho - 1 = 2y$ ou $\rho - 1 = -2y$, soit :

$$x^2 + (y-1)^2 = 2 \qquad \text{ou} \qquad x^2 + (y+1)^2 = 2$$

Aucun de ces deux cercles ne passe par O, car $0+1 \neq 2$: la condition $z \neq 0$ n'enlève aucun point.

$$\boxed{\text{réunion des cercles de centres } i \text{ et } -i, \text{ de rayon } \sqrt{2}}$$

Contrôle : $z = (\sqrt{2}+1)i$ est sur le premier cercle, et $z + \frac{1}{z} = (\sqrt{2}+1)i - \frac{i}{\sqrt{2}+1} = \left(\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)\right)i = 2i$, de module 2.

EXERCICE 30 ⋆⋆⋆⋆

Montrons que $\mathbb{U}_m \subset \mathbb{U}_n \iff m \mid n$.

- Si $m \mid n$, on écrit $n = mq$. Pour $z \in \mathbb{U}_m$, $z^n = (z^m)^q = 1^q = 1$, donc $z \in \mathbb{U}_n$.
- Si $\mathbb{U}_m \subset \mathbb{U}_n$, alors en particulier $e^{i\frac{2\pi}{m}} \in \mathbb{U}_n$, donc $e^{i\frac{2n\pi}{m}} = 1$, c'est-à-dire $\frac{2n\pi}{m} \equiv 0\ [2\pi]$: il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{n}{m} = k$, donc $m \mid n$.

$$\boxed{\mathbb{U}_m \subset \mathbb{U}_n \iff m \text{ divise } n}$$

Par exemple $\mathbb{U}_3 \subset \mathbb{U}_6$: les sommets du triangle équilatéral 1, j, j^2 sont des sommets de l'hexagone régulier. En revanche $\mathbb{U}_4 \not\subset \mathbb{U}_6$, puisque $i^6 = -1$.

EXERCICE 31 : DROITE D'EULER D'UN TRIANGLE ⋆⋆⋆⋆

a) $OA = |a| = 1$, $OB = |b| = 1$, $OC = |c| = 1$: le point O est équidistant des trois sommets. $\boxed{\text{c'est le centre du cercle circonscrit}}$

b) Comme dans l'exercice 14, M est sur la hauteur issue de C si et seulement si $w = \frac{z-c}{b-a}$ est un imaginaire pur, éventuellement nul, c'est-à-dire si et seulement si $\overline{w} = -w$. Or $\overline{a} = \frac{1}{a}$, $\overline{b} = \frac{1}{b}$, $\overline{c} = \frac{1}{c}$, donc :

$$\overline{b-a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} = -\frac{b-a}{ab} \qquad \text{et} \qquad \overline{w} = \frac{\overline{z} - \frac{1}{c}}{-\frac{b-a}{ab}} = -\frac{ab\left(\overline{z}-\frac{1}{c}\right)}{b-a}$$

Ainsi $\overline{w} = -w \iff ab\left(\overline{z}-\frac{1}{c}\right) = z - c \iff \boxed{\overline{z} = \frac{z}{ab} + \frac{1}{c} - \frac{c}{ab}}$.

c) Vérifions que $h = a+b+c$ satisfait cette relation :

$$\frac{h}{ab} + \frac{1}{c} - \frac{c}{ab} = \frac{a+b}{ab} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{h}$$

Le point $H(h)$ est donc sur la hauteur issue de C. L'expression $h = a+b+c$ étant symétrique en a, b, c, le même calcul, en échangeant les rôles des lettres, montre que H est sur les hauteurs issues de A et de B. $\boxed{\text{les trois hauteurs concourent en } H(a+b+c)}$

d) Soit ABC un triangle quelconque, O le centre de son cercle circonscrit et R son rayon. On choisit le repère orthonormé d'origine O et d'unité R : les affixes a, b, c des sommets sont alors de module 1, et les questions précédentes s'appliquent. Le centre de gravité a pour affixe $g = \frac{a+b+c}{3}$ (exercice 25), et l'orthocentre $h = a+b+c$. Donc $h = 3g$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}}$$

Les points O, G et H sont alignés : lorsqu'ils sont distincts, la droite qui les porte est la *droite d'Euler* du triangle. Ils sont confondus lorsque $a+b+c = 0$, par exemple pour le triangle équilatéral de sommets 1, j, j^2 de l'exercice 5.