EXERCICES – CHAPITRE 8

CONFIGURATIONS GÉOMÉTRIQUES

RACINES n-IÈMES

EXERCICE 1 ⋆

Résoudre les équations suivantes :

a) $z^6 = 1$ b) $z^4 = -1$ c) $z^5 = -i$

EXERCICE 2 : LES RACINES HUITIÈMES DE L'UNITÉ ⋆

On pose $\omega = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

1. Justifier que $\mathbb{U}_8 = \left\{\omega^k \mid k \in [\![0, 7]\!]\right\}$, puis écrire ses huit éléments sous forme algébrique.
2. Calculer ω^2 et ω^4. En déduire que, pour tout k, $\omega^{k+4} = -\omega^k$, et retrouver ainsi que la somme des éléments de $\mathbb{U}_8$ est nulle.
3. Placer les points images des éléments de $\mathbb{U}_8$ et calculer la longueur d'un côté de l'octogone régulier obtenu.

EXERCICE 3 ⋆⋆

Résoudre les équations suivantes :

a) $z^3 = 1 + i\sqrt{3}$

b) $z^6 = \dfrac{-3}{1 + i\sqrt{3}}$

c) $z^5 = \dfrac{(1 + i\sqrt{3})^4}{(1 + i)^2}$

d) $(z - 1)^5 = (z + 1)^5$

e) $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0$

f) $(z + i)^n = (z - i)^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$

EXERCICE 4 ⋆⋆

1. Déterminer, sous forme algébrique, les racines carrées du nombre complexe $3 - 4i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\omega^2 - i\omega - 1 + i = 0$
3. Rappeler quelles sont les racines cubiques (ou racines 3-ièmes) de 1.
4. Écrire $-1 + i$ sous forme exponentielle.
5. Résoudre l'équation $z^3 = -1 + i$.
6. En déduire les solutions de l'équation $z^6 - iz^3 - 1 + i = 0$.

EXERCICE 5 : LE NOMBRE j ⋆⋆

On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Montrer que $j^3 = 1$, que $1 + j + j^2 = 0$ et que $\overline{j} = j^2 = \dfrac{1}{j}$.
2. Montrer que $1 + j = e^{i\frac{\pi}{3}}$, puis calculer $(1 + j)^{2026}$ en fonction de j.
3. On note A, B et C les points d'affixes 1, j et j^2. Montrer que le triangle ABC est équilatéral et préciser le centre de son cercle circonscrit.

Affixes, distances et ensembles de points

EXERCICE 6 ⋆

Déterminer et construire les ensembles Γ_1, Γ_2 et Γ_3 des points dont l'affixe z vérifie la condition proposée :

1. $z = 3e^{i\alpha}$ où $\alpha \in [0; 2\pi[$
2. $z = re^{i\frac{\pi}{4}}$ où $r \in [0; +\infty[$
3. $z = ke^{-i\frac{\pi}{3}}$ où $k \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 7 ⋆

A et B ont pour affixes respectives 1 et $3 + 2i$. Déterminer puis construire les ensembles Γ_1 et Γ_2 des points M dont l'affixe z satisfait les conditions suivantes :

1. $|z - 1| = |z - 3 - 2i|$
2. $|z - (3 + 2i)| = 1$

EXERCICE 8 ⋆

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $1 + 2i$, $4 + 3i$ et $5 - i$.

1. Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et la longueur AB.
2. Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
3. Calculer l'affixe du centre I de ce parallélogramme de deux façons différentes.
4. Le parallélogramme $ABCD$ est-il un rectangle ?

EXERCICE 9 ⋆⋆

Déterminer puis représenter dans un même repère les ensembles des points M d'affixe z tels que :

1. $|z - 2 + i| = |z + 1|$
2. $|z - i| \leqslant 2$
3. $|\overline{z} + 1 - i| = 3$

Angles, alignement et nature de figures

EXERCICE 10 ⋆

Soient les points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ tels que : $a = 1 + \frac{3}{4}i$, $b = 2 - \frac{5}{4}i$ et $c = 3 + \frac{7}{4}i$.

1. Représenter les points A, B et C dans un repère orthonormé.
2. Quelle est la nature du triangle ABC ?
3. Calculer l'affixe de A' tel que $ABA'C$ soit un carré.

EXERCICE 11 ⋆

Soit le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soient les points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ tels que : $a = -2 + 2i$, $b = -3 - 6i$ et $c = 1$.
Quelle est la nature du triangle ABC ?

EXERCICE 12 ⋆

On considère les points $A(1 + i)$, $B(3 + 2i)$, $C(7 + 4i)$, $D(2 - i)$, $E(6 + i)$ et $G(3i)$.

1. Les points A, B et C sont-ils alignés ?
2. Les droites (AB) et (DE) sont-elles parallèles ? Sont-elles confondues ?
3. Montrer que les droites (AB) et (DG) sont perpendiculaires.

EXERCICE 13 : NATURE D'UN QUADRILATÈRE ⋆⋆

On considère les points $A(1+i)$, $B(4+2i)$, $C(5+5i)$ et $D(2+4i)$.

1. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Calculer $\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$. En déduire que $ABCD$ est un losange, mais pas un carré.
3. Calculer $\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_B}$ et interpréter le résultat.
4. Donner une valeur approchée en degrés de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

EXERCICE 14 : ORTHOCENTRE D'UN TRIANGLE ⋆⋆

On considère les points $A(0)$, $B(4)$ et $C(1+3i)$. On rappelle que la hauteur issue de C est la droite passant par C et perpendiculaire à (AB).

1. À l'aide de la Proposition 8 du cours, montrer qu'un point $M(z)$ appartient à la hauteur issue de C si et seulement si $\dfrac{z - z_C}{z_B - z_A}$ est un imaginaire pur (éventuellement nul). En déduire une équation de cette hauteur.
2. De même, déterminer une équation de la hauteur issue de A, puis l'affixe du point d'intersection H de ces deux hauteurs.
3. Montrer que H appartient aussi à la hauteur issue de B. Que peut-on en conclure ?

Problèmes de synthèse

EXERCICE 15 ⋆⋆

Soit le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2 - 3i$, $z_B = i$ et $z_C = 6 - i$.

1. Réaliser une figure, que l'on complétera au fur et à mesure de l'exercice.
2. (a) Calculer $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.
   (b) En déduire la nature du triangle ABC.
3. On considère l'application f qui, au point $M(z)$ avec $z \neq i$, associe le point $M'(z')$ tel que :

$$z' = f(z) = \frac{i(z - 2 + 3i)}{z - i}$$

   Soit $D(1-i)$. Déterminer l'affixe du point D' image du point D par f.
4. (a) Montrer qu'il existe un unique point, noté E, dont l'image par f est le point d'affixe $2i$.
   (b) Démontrer que E est un point de la droite (AB).
5. Démontrer que, pour tout point M distinct de B, $OM' = \dfrac{AM}{BM}$.
6. Démontrer que, pour tout point M distinct de A et du point B, on a l'égalité :

$$(\vec{i}, \overrightarrow{OM'}) \equiv (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) + \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

7. Démontrer que si le point M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$ alors le point M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
8. Démontrer que si le point M' appartient à l'axe des imaginaires purs, privé du point B, alors le point M appartient à la droite (AB).

EXERCICE 16 ⋆⋆

Soit le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Soit f l'application définie pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\{-2i\}$ par : $f(z) = \dfrac{z-2+i}{z+2i}$.

1. On pose $z = x + iy$, avec x, $y \in \mathbb{R}$, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$ en fonction de x et de y puis montrer que :

$$\text{Re}[f(z)] = \frac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2} \qquad \text{et} \qquad \text{Im}[f(z)] = \frac{-x+2y+4}{x^2+(y+2)^2}$$

2. En déduire la nature de :
   (a) l'ensemble E des points M d'affixe z du plan, tels que $f(z)$ soit un réel ;
   (b) l'ensemble F des points M d'affixe z du plan, tels que $f(z)$ soit un imaginaire pur ou éventuellement nul.
   (c) Représenter ces deux ensembles.

EXERCICE 17 ⋆⋆

Soit le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
On considère l'équation : (E) : $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$.

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
2. Soit la suite (M_n) des points d'affixe $z_n = 2^n e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}}$, définie pour $n \geqslant 1$.
   (a) Vérifier que z_1 est une solution de (E).
   (b) Écrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.
   (c) Représenter le repère, puis placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 et tracer les segments $[M_1M_2]$, $[M_2M_3]$ et $[M_3M_4]$.
3. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$: $z_n = 2^n \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{(-1)^n i}{2}\right)$.
4. Calculer les longueurs M_1M_2 et M_2M_3. On admet par la suite que pour tout entier $n \geqslant 1$, $M_nM_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$
5. On note $l_n = M_1M_2 + M_2M_3 + \cdots + M_nM_{n+1}$.
   (a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $l_n = 2\sqrt{3}(2^n - 1)$.
   (b) Déterminer le plus petit entier n tel que $l_n > 1000$.

EXERCICE 18 : LE CERCLE DE THALÈS ⋆⋆⋆

On considère les points A et B d'affixes 1 et -1, et, pour $z \neq -1$, le nombre complexe $Z = \dfrac{z-1}{z+1}$.

1. On pose $z = x + iy$ avec x et y réels. Montrer que :

$$Z = \frac{x^2+y^2-1+2iy}{(x+1)^2+y^2}$$

2. En déduire l'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M(z)$ tels que Z soit un imaginaire pur (éventuellement nul).
3. Pour M distinct de A et de B, interpréter géométriquement l'argument de Z. Quel théorème de géométrie retrouve-t-on ?
4. Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points $M(z)$ tels que $\arg(Z) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, et représenter $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.

Pour aller plus loin

EXERCICE 19 ⋆⋆

a) Déterminer, en utilisant la forme trigonométrique, les nombres complexes z tels que $z^2 = i$.

b) Exprimer les racines carrées de $2i\,e^{-i\pi/4}$ sous forme trigonométrique.

EXERCICE 20 ⋆⋆

Déterminer l'ensemble des nombres complexes non nuls z tels que $\dfrac{1+z}{z}$ soit réel. Quelle est l'image de cet ensemble ?

EXERCICE 21 ⋆⋆

Quels sont les nombres complexes non nuls z tels que les points d'affixes i, z, $\dfrac{1}{z}$ soient alignés ?

EXERCICE 22 ⋆⋆

Quels sont les nombres complexes z tels que le triangle dont les sommets ont pour affixes 1, i, z soit rectangle en z ?

EXERCICE 23 ⋆⋆⋆

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme des éléments de $\mathbb{U}_n$.

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme des puissances p-ièmes des éléments de $\mathbb{U}_n$.

EXERCICE 24 : NOMBRES COMPLEXES ET THÉORÈME DE LA MÉDIANE ⋆⋆⋆

a) Soient z et z' deux nombres complexes. Montrer :

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right).$$

b) Donner une interprétation géométrique de cette égalité en considérant un parallélogramme, les longueurs de ses côtés, les longueurs de ses diagonales.

c) Soient A, B, C trois points non alignés du plan, I le milieu de $[BC]$. Déduire de b) une expression de AI^2 en fonction de AB^2, BC^2, CA^2.

EXERCICE 25 : POINT DE CONCOURS DES MÉDIANES ⋆⋆⋆

Soient a, b, c trois nombres complexes, A, B, C leurs images dans le plan. On suppose que A, B, C ne sont pas alignés. Montrer que les médianes du triangle ABC passent par le point G d'affixe $g = \dfrac{a+b+c}{3}$ (qui est le centre de gravité du triangle ABC).

EXERCICE 26 ⋆⋆⋆

Soient a, b, c trois nombres complexes distincts, A, B, C leurs images dans le plan.

a) À quelle condition sur $\dfrac{c-a}{b-a}$ le triangle ABC est-il équilatéral de sens direct ? de sens indirect ?

b) Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$.

EXERCICE 27 ⋆⋆⋆

Soit n un entier $\geqslant 3$. On note P_n et A_n le périmètre et l'aire du polygone (régulier) dont les sommets sont les racines n-ièmes de 1. Donner une expression simple de P_n et de A_n. Déterminer les limites des suites $(P_n)_{n\geqslant 3}$ et $(A_n)_{n\geqslant 3}$.

EXERCICE 28 : INÉGALITÉ DE PTOLÉMÉE ⋆⋆⋆

a) Soient a, b, c, d quatre nombres complexes. Vérifier que

$$(a-c)(b-d) = (b-a)(d-c) + (b-c)(a-d).$$

b) Soient A, B, C, D quatre points du plan. Montrer que

$$AC \cdot BD \leqslant AB \cdot CD + BC \cdot DA.$$

EXERCICE 29 ⋆⋆⋆⋆

Montrer que l'ensemble des nombres complexes non nuls z tels que $\left|z + \dfrac{1}{z}\right| = 2$ a pour image la réunion de deux cercles que l'on précisera.

EXERCICE 30 ⋆⋆⋆⋆

Soient m et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$. À quelle condition a-t-on l'inclusion $\mathbb{U}_m \subset \mathbb{U}_n$?

EXERCICE 31 : DROITE D'EULER D'UN TRIANGLE ⋆⋆⋆⋆

Soient, dans les questions a) à c), a, b, c trois éléments distincts de $\mathbb{U}$, A, B, C leurs images.

a) Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ?

b) Soit M un point du plan d'affixe z. En remarquant que le conjugué d'un élément de $\mathbb{U}$ est égal à son inverse, montrer que M appartient à la hauteur du triangle ABC issue de C si et seulement si

$$\overline{z} = \frac{z}{ab} + \frac{1}{c} - \frac{c}{ab}.$$

c) Montrer que les trois hauteurs de ABC concourent au point d'affixe $h = a + b + c$.

d) Montrer que dans un triangle quelconque ABC, l'orthocentre H, le centre de gravité G et le centre du cercle circonscrit O sont alignés et vérifient la relation d'Euler

$$\overrightarrow{OH} = 3\,\overrightarrow{OG}.$$