CORRIGÉ – CHAPITRE 9

CHAÎNES DE MARKOV

Graphes probabilistes et matrices de transition

EXERCICE 1 ⋆

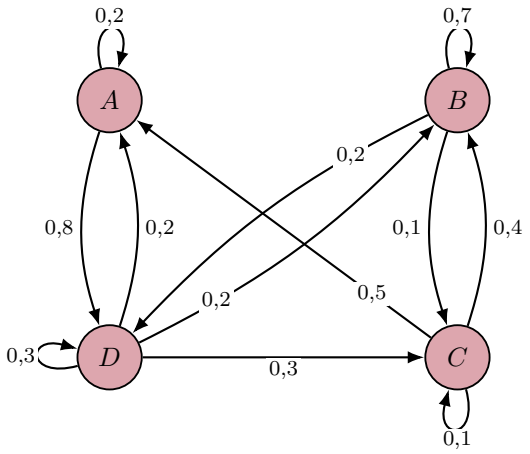
1. On lit sur le graphe, pour chaque sommet, les arêtes qui en *partent*. La ligne i de la matrice regroupe les probabilités de transition depuis l'état i.

Depuis	**Transitions lues sur le graphe**
A	$A \to A : 0{,}2$; $A \to B : 0{,}3$; $A \to C : 0{,}5$
B	$B \to A : 0{,}6$; $B \to C : 0{,}4$; pas de boucle en B
C	$C \to B : 0{,}9$; $C \to C : 0{,}1$; pas d'arête $C \to A$

$$T = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}9 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

On vérifie que chaque ligne a pour somme 1 : la matrice est bien **stochastique**.

2. Chaque coefficient non nul t_{ij} donne une flèche de l'état i vers l'état j, étiquetée par t_{ij}. Les états sont notés A, B, C, D dans l'ordre des lignes.

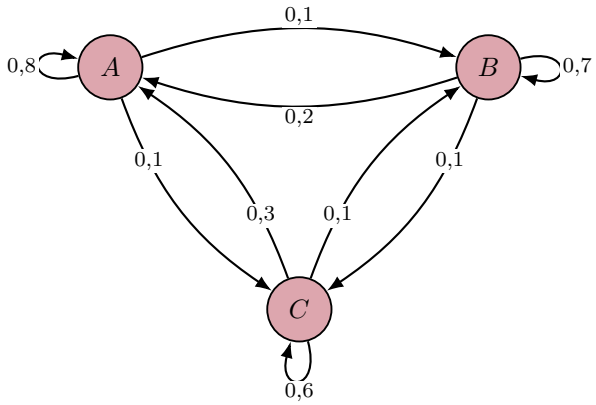


On prendra garde à ne pas oublier les coefficients nuls : ils correspondent simplement à une flèche absente.

EXERCICE 2 ⋆

1. On complète d'abord chaque ligne : les téléspectateurs qui ne changent pas de chaîne restent, ce qui donne la boucle.

$$A : \ 1 - 0{,}1 - 0{,}1 = 0{,}8 \qquad ; \qquad B : \ 1 - 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}7 \qquad ; \qquad C : \ 1 - 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}6$$



2. Un graphe est **probabiliste** lorsque chaque arête est étiquetée par un réel de $[0\,;1]$ et que, pour chaque sommet, la somme des étiquettes des arêtes qui en partent vaut 1.

$$\boxed{\text{Ici : } 0{,}8 + 0{,}1 + 0{,}1 = 1 \ ; \ 0{,}2 + 0{,}7 + 0{,}1 = 1 \ ; \ 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}6 = 1}$$

3.

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}}$$

EXERCICE 3 ⋆

1. Tous les coefficients de A appartiennent à $[0\,;1]$, et la somme de chaque ligne vaut 1 :

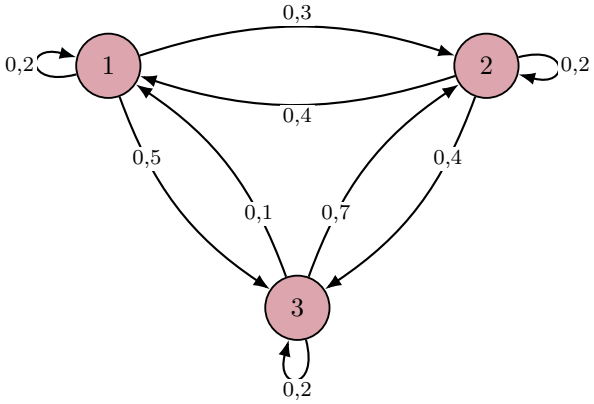
$$0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}5 = 1 \qquad ; \qquad 0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}4 = 1 \qquad ; \qquad 0{,}1 + 0{,}7 + 0{,}2 = 1$$

$$\boxed{A \text{ est une matrice stochastique}}$$

2. (a)

> Une chaîne est *homogène* lorsque les probabilités de transition ne dépendent pas de l'instant n : la matrice A est la même à chaque étape.

(b)



(c) Chaque probabilité demandée se lit directement comme un coefficient de A :

$$\boxed{P_{(X_n=1)}\,(X_{n+1}=3)=a_{13}=0{,}5}$$

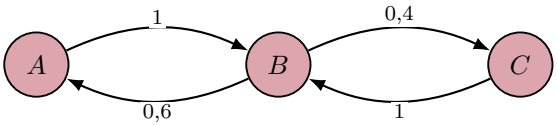
$$\boxed{P_{(X_n=3)}\,(X_{n+1}=1)=a_{31}=0{,}1}$$

$$\boxed{P_{(X_n=2)}\,(X_{n+1}=2)=a_{22}=0{,}2}$$

L'ordre des indices est essentiel : le premier désigne l'état de départ, le second l'état d'arrivée.

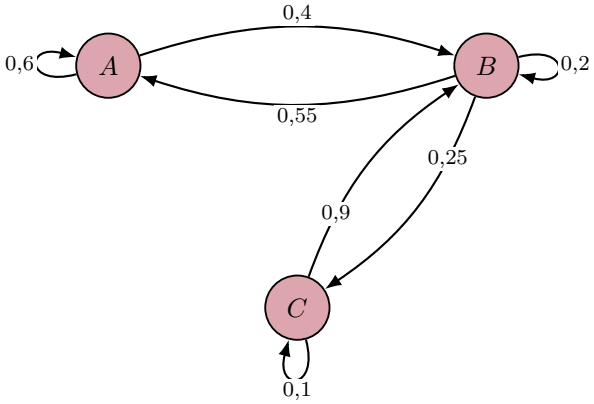
EXERCICE 4 ⋆

1. Les lignes donnent $A \to B$: 1 ; $B \to A$: 0,6 et $B \to C$: 0,4 ; $C \to B$: 1. Aucune boucle.



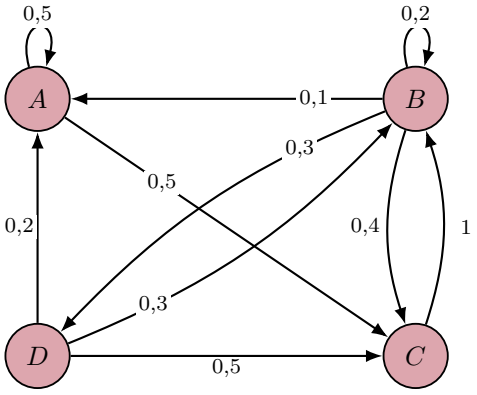
L'état A ne peut être quitté que vers B, et C de même : la chaîne oscille autour de B.

2.



Il n'y a aucune arête entre A et C : les coefficients t_{13} et t_{31} sont nuls.

3.



L'état C ne renvoie que vers B, avec une probabilité 1 : sa ligne ne comporte qu'un seul coefficient non nul. On lit la ligne de A avec soin : A mène à A et à C (troisième colonne), et non à D.

EXERCICE 5 : RECONNAÎTRE UNE MATRICE STOCHASTIQUE ⋆⋆

1. Une matrice est stochastique si ses coefficients sont dans $[0\,;1]$ et si la somme de chaque **ligne** vaut 1.
   - M_1 : $0{,}3+0{,}7=1$ et $0{,}6+0{,}4=1$: **stochastique**.
   - M_2 : $0{,}2+0{,}7=0{,}9\neq 1$: **non stochastique**.
   - M_3 : les lignes ont bien pour somme 1, mais 1,2 et $-0{,}2$ ne sont pas des probabilités : **non stochastique**.
   - M_4 : $0{,}2+0{,}5=0{,}7\neq 1$: **non stochastique**. Ce sont ses *colonnes* qui ont pour somme 1. **L'erreur la plus répandue** est de vérifier les colonnes au lieu des lignes : la ligne i regroupe les probabilités de sortie de l'état i, qui doivent totaliser 1.
2. Si $M=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, alors $MU=\begin{pmatrix}a+b\\ c+d\end{pmatrix}$, qui est égal à U si et seulement si les deux lignes ont pour somme 1. Les coefficients étant positifs, ils sont alors tous inférieurs ou égaux à 1.
   $\boxed{M \text{ stochastique} \iff MU=U}$
3. Si M et N sont stochastiques, MN est à coefficients positifs, comme somme de produits de positifs, et $(MN)U=M(NU)=MU=U$: $\boxed{MN \text{ est stochastique}}$. Par récurrence, $M^nU=U$ pour tout n : toute puissance de M est stochastique. On retrouve que P^n est une matrice de transition, celle du passage en n étapes (relation de Chapman-Kolmogorov). Le même raisonnement vaut pour des matrices de taille quelconque.

CALCUL DE DISTRIBUTIONS

EXERCICE 6 ⋆

1. (a) L'état du système au matin du jour $n+1$ ne dépend que du nombre de machines en panne au matin du jour n : les pannes de la journée sont indépendantes de ce qui s'est produit les jours précédents, et la réparation nocturne ne dépend que de l'état du soir.

   $\boxed{(X_n) \text{ est une chaîne de Markov}}$

   De plus les probabilités de panne, égales à $\dfrac{1}{3}$, ne dépendent pas du jour considéré :

   $\boxed{\text{la chaîne est homogène}}$

   (b) Au soir, il y a au plus 2 machines en panne, et l'on en répare exactement une lorsqu'il y en a au moins une. Il reste donc au matin *au plus une* machine en panne.

   $\boxed{\text{Les états possibles sont 0 et 1}}$

   L'état 2 est inaccessible dès le deuxième matin : c'est ce qui permet de se limiter à deux états.

2. (a) Les deux pannes étant indépendantes, chaque case du tableau est le produit des deux probabilités marginales.

	P_A	$\overline{P_A}$	**Total**
P_B	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$
$\overline{P_B}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$
Total	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

(b) Depuis l'état 0 (les deux machines fonctionnent le matin) : elles peuvent toutes deux tomber en panne dans la journée.

- Aucune panne : probabilité $\frac{4}{9}$, rien à réparer, on repart de 0.
- Une seule panne : probabilité $\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$, elle est réparée la nuit, on repart de 0.
- Deux pannes : probabilité $\frac{1}{9}$, une seule est réparée, on repart de 1.

$$P(0\to 0)=\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=\frac{8}{9} \quad ; \quad P(0\to 1)=\frac{1}{9}$$

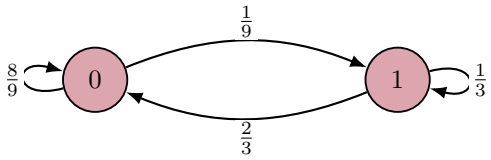
Depuis l'état 1 : une machine est déjà en panne, seule l'autre peut tomber.

$$P(1\to 0)=\frac{2}{3} \qquad \text{(l'autre tient : on répare la seule en panne)}$$

$$P(1\to 1)=\frac{1}{3} \qquad \text{(l'autre tombe : deux pannes, une seule réparée)}$$

$$\boxed{T=\begin{pmatrix}\frac{8}{9} & \frac{1}{9}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}}$$

(c)



EXERCICE 7 ⋆

1. Comme $P(X_0=A)+P(X_0=B)+P(X_0=C)=1$, on a $P(X_0=C)=1-0{,}2-0{,}5=0{,}3$, d'où $\pi_0=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3\end{pmatrix}$.

   On lit sur le graphe les probabilités d'arriver en chaque état, à l'aide de la formule des probabilités totales.

   (a)
   $$P(X_1=A)=0{,}2\times 0{,}3+0{,}5\times 0{,}7+0{,}3\times 0{,}4=0{,}06+0{,}35+0{,}12=\boxed{0{,}53}$$

   (b)
   $$P(X_1=B)=0{,}2\times 0{,}5+0{,}5\times 0{,}3+0{,}3\times 0{,}6=0{,}10+0{,}15+0{,}18=\boxed{0{,}43}$$

   (c)
   $$P(X_1=C)=0{,}2\times 0{,}2+0{,}5\times 0+0{,}3\times 0=\boxed{0{,}04}$$

   On vérifie : $0{,}53+0{,}43+0{,}04=1$.

   (d) On repart de $\pi_1=\begin{pmatrix}0{,}53 & 0{,}43 & 0{,}04\end{pmatrix}$:

   $$P(X_2=A)=0{,}53\times 0{,}3+0{,}43\times 0{,}7+0{,}04\times 0{,}4=0{,}159+0{,}301+0{,}016=\boxed{0{,}476}$$

2. On lit les arêtes partant de chaque sommet :

$$\boxed{M=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2\\ 0{,}7 & 0{,}3 & 0\\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0\end{pmatrix}}$$

Les deux zéros de la dernière colonne traduisent qu'aucune arête n'arrive en C depuis B ou depuis C : une fois quitté, l'état C ne peut être atteint que depuis A.

On retrouve alors les résultats de la question 1 par le calcul matriciel :

$$\pi_1 = \pi_0 M = \begin{pmatrix} 0{,}53 & 0{,}43 & 0{,}04 \end{pmatrix} \quad ; \quad \pi_2 = \pi_1 M = \begin{pmatrix} 0{,}476 & 0{,}418 & 0{,}106 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 8 ⋆

1. Le temps d'un jour ne dépend que de celui de la veille, et les règles données ne dépendent pas de la date.

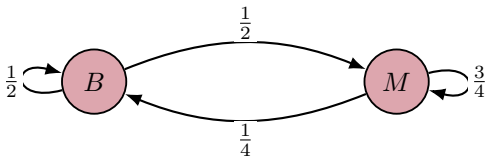
   C'est une chaîne de Markov homogène, à deux états B et M

2. Depuis le beau temps. « Une chance sur deux que le temps change » signifie $P(B \to M) = \dfrac{1}{2}$, donc $P(B \to B) = \dfrac{1}{2}$.

   Depuis le mauvais temps. « Le mauvais temps a trois fois plus de chance de durer » signifie $P(M \to M) = 3\,P(M \to B)$. Comme la somme vaut 1 :

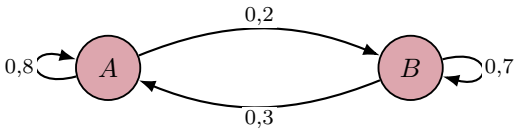
   $$P(M \to B) + 3\,P(M \to B) = 1 \iff P(M \to B) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P(M \to M) = \frac{3}{4}$$

   $$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$



EXERCICE 9 ⋆

1. Depuis A : 0,8 vers A, donc 0,2 vers B. Depuis B : 0,3 vers A, donc 0,7 vers B.



   $$P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

2. $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$, puis :

   $$\pi_1 = \pi_0 P = \begin{pmatrix} 0{,}4 + 0{,}15 & 0{,}1 + 0{,}35 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}45 \end{pmatrix}}$$

   $$\pi_2 = \pi_1 P = \begin{pmatrix} 0{,}44 + 0{,}135 & 0{,}11 + 0{,}315 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0{,}575 & 0{,}425 \end{pmatrix}}$$

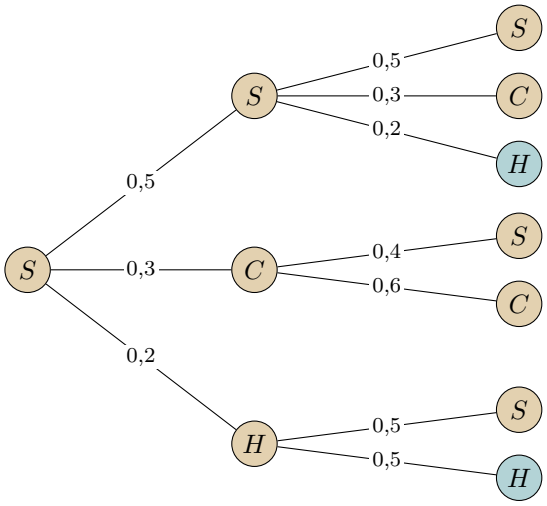
   La marque A gagne des parts de marché.

3.
$$P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}64+0{,}06 & 0{,}16+0{,}14 \\ 0{,}24+0{,}21 & 0{,}06+0{,}49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}45 & 0{,}55 \end{pmatrix}$$

D'après la relation de Chapman-Kolmogorov, la probabilité de passer de B à A en deux mois est le coefficient en ligne 2 et colonne 1 de P^2 : $\boxed{0{,}45}$. On le vérifie en listant les deux trajets : $B \to A \to A$, de probabilité $0{,}3 \times 0{,}8 = 0{,}24$, et $B \to B \to A$, de probabilité $0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}21$.

EXERCICE 10 : ARBRE ET PUISSANCE DE MATRICE ⋆⋆

1. Les branches de probabilité nulle ($C \to H$ et $H \to C$) sont omises.



Les deux chemins menant en H au bout de deux déplacements sont signalés en bleu pétrole.

2. Par la formule des probabilités totales, en suivant les deux chemins bleu pétrole :
$$P(X_2 = H) = 0{,}5 \times 0{,}2 + 0{,}2 \times 0{,}5 = \boxed{0{,}2}$$

3.
$$P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}47 & 0{,}33 & 0{,}2 \\ 0{,}44 & 0{,}48 & 0{,}08 \\ 0{,}5 & 0{,}15 & 0{,}35 \end{pmatrix}$$

Le robot part du salon, état numéro 1. La probabilité cherchée est le coefficient de P^2 en ligne 1 et colonne 3 : on retrouve 0,2. Le calcul de ce coefficient, $0{,}5 \times 0{,}2 + 0{,}3 \times 0 + 0{,}2 \times 0{,}5$, est exactement celui de l'arbre : **un coefficient de P^2 résume un arbre à deux niveaux**.

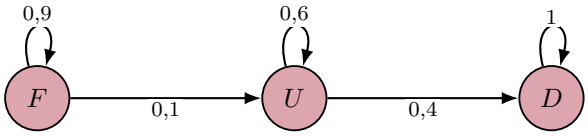
4. On lit le coefficient en ligne 3 et colonne 2 de P^2 : $\boxed{0{,}15}$. Le seul trajet possible est $H \to S \to C$, de probabilité $0{,}5 \times 0{,}3 = 0{,}15$, puisque le robot ne passe jamais directement de la chambre à la cuisine.

EXERCICE 11 ⋆

1. La dernière ligne est $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$: depuis l'état D, on reste en D avec probabilité 1.

   Une pièce défaillante le reste : l'état D est *absorbant*

   C'est cohérent avec l'énoncé : le garagiste constate l'état de la pièce mais ne la remplace pas.

2. 

   Le graphe est « à sens unique » : on ne peut que se dégrader, jamais s'améliorer.

3. La pièce étant neuve au départ, $\pi_0 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, et $\pi_6 = \pi_0 T^6$ est la première ligne de T^6.

   On peut aussi raisonner directement. Pour être encore fonctionnelle au bout de 6 mois, la pièce doit ne jamais s'être usée :

   $$P(X_6 = F) = 0{,}9^6 \approx 0{,}531$$

   Pour être usée sans être défaillante, il faut choisir le mois où elle s'est usée. Enfin :

   $$P(X_6 = D) = 1 - P(X_6 = F) - P(X_6 = U)$$

   La calculatrice donne, en calculant T^6 :

   $$\pi_6 \approx \begin{pmatrix}0{,}531 & 0{,}162 & 0{,}307\end{pmatrix}$$

   $$\boxed{P(X_6 = D) \approx 0{,}307}$$

   Il y a donc environ 31 % de risque que la pièce soit défaillante au bout de six mois.

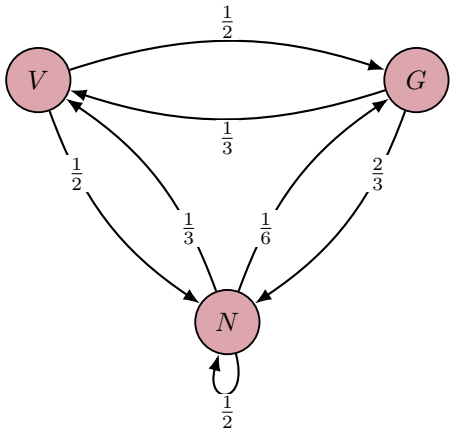
Distribution invariante

EXERCICE 12 ⋆⋆

1. Le temps du lendemain ne dépend que du temps du jour, et les règles énoncées sont les mêmes chaque jour.

   C'est une chaîne de Markov homogène, d'états V, N, G

2. On traduit chaque phrase :
   - « le vent et la grêle ne restent jamais deux jours de suite » : $P(V \to V) = 0$ et $P(G \to G) = 0$;
   - après du vent, neige ou grêle de façon équiprobable : $P(V \to N) = P(V \to G) = \dfrac{1}{2}$;
   - après la neige : $P(N \to V) = \dfrac{1}{3}$ et $P(N \to N) = \dfrac{1}{2}$, d'où $P(N \to G) = 1 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$;
   - après la grêle : $P(G \to N) = 2\,P(G \to V)$ et $P(G \to G) = 0$, donc $3\,P(G \to V) = 1$, soit $P(G \to V) = \dfrac{1}{3}$ et $P(G \to N) = \dfrac{2}{3}$.



$$\boxed{T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}}$$

3. Il s'agit de la probabilité de passer de N à V *en deux étapes*, c'est-à-dire du coefficient d'indice (N, V) de T^2. La formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} P(N \to \cdot \to V) &= P(N \to V)P(V \to V) + P(N \to N)P(N \to V) + P(N \to G)P(G \to V) \\ &= \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{3}{18} + \frac{1}{18} = \boxed{\frac{2}{9}} \end{aligned}$$

4. On cherche $\pi = \begin{pmatrix} v & n & g \end{pmatrix}$ vérifiant $\pi T = \pi$ et $v + n + g = 1$. Le système $\pi T = \pi$ s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{1}{3}n + \frac{1}{3}g = v \\ \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}n + \frac{2}{3}g = n \\ \frac{1}{2}v + \frac{1}{6}n = g \end{cases}$$

La première équation donne $n + g = 3v$, et comme $v + n + g = 1$ il vient $v + 3v = 1$, soit $v = \frac{1}{4}$.
La troisième donne alors $g = \frac{1}{8} + \frac{1}{6}n$, que l'on reporte dans $n + g = \frac{3}{4}$:

$$n + \frac{1}{8} + \frac{1}{6}n = \frac{3}{4} \iff \frac{7}{6}n = \frac{5}{8} \iff n = \frac{15}{28}$$

puis $g = \frac{3}{4} - \frac{15}{28} = \frac{21 - 15}{28} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$.

$$\boxed{\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{15}{28} & \frac{3}{14} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}250 & 0{,}536 & 0{,}214 \end{pmatrix}}$$

Vérification : $\frac{1}{4} + \frac{15}{28} + \frac{3}{14} = \frac{7 + 15 + 6}{28} = 1$.

À long terme, il neige donc un peu plus d'un jour sur deux dans cette ville.

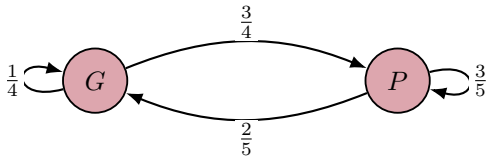
EXERCICE 13 ⋆

1. (a) L'issue du jeu $n+1$ ne dépend que du résultat du jeu n — gagné ou perdu — et non de l'historique complet. Les probabilités énoncées ne dépendent pas du numéro du jeu.

$$\boxed{(X_n) \text{ est une chaîne de Markov homogène d'espace des états } \{G\,;P\}}$$

où G signifie « le joueur gagne » et P « le joueur perd ».

(b) Si le joueur a gagné, il gagne le suivant avec probabilité $\dfrac{1}{4}$, donc il perd avec probabilité $\dfrac{3}{4}$. S'il a perdu, il gagne le suivant avec probabilité $\dfrac{2}{5}$, donc il perd avec probabilité $\dfrac{3}{5}$.



$$\boxed{P = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4} & \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{2}{5} & \dfrac{3}{5} \end{pmatrix}}$$

2. (a) Le premier jeu est réussi avec probabilité 0,15 :

$$\boxed{\pi_0 = \begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}85 \end{pmatrix}}$$

Chaque passage d'un jeu au suivant se traduit par une multiplication à droite par P :

$$\boxed{\pi_n = \pi_0\, P^n}$$

(b) Avec la convention précédente, π_0 décrit le *premier* jeu : le cinquième jeu correspond donc à π_4.

$$\pi_4 = \pi_0\, P^4 \approx \begin{pmatrix} 0{,}3477 & 0{,}6523 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P(\text{gagner le cinquième jeu}) \approx 0{,}348}$$

(c) On cherche $\pi = \begin{pmatrix} g & p \end{pmatrix}$ tel que $\pi P = \pi$ et $g + p = 1$. La première équation s'écrit :

$$\frac{1}{4}g + \frac{2}{5}p = g \iff \frac{2}{5}p = \frac{3}{4}g \iff p = \frac{15}{8}g$$

En reportant dans $g + p = 1$:

$$g\left(1 + \frac{15}{8}\right) = 1 \iff \frac{23}{8}g = 1 \iff g = \frac{8}{23}$$

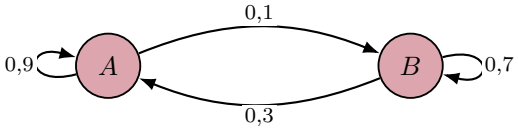
$$\boxed{\pi = \begin{pmatrix} \dfrac{8}{23} & \dfrac{15}{23} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}348 & 0{,}652 \end{pmatrix}}$$

On remarque que π_4 est déjà très proche de π : la convergence est rapide.

(d) Pour que les chances soient les mêmes quel que soit le nombre de parties, il faut que la distribution ne change plus d'un jeu au suivant, c'est-à-dire que π_0 soit déjà la distribution invariante.

$$\boxed{\text{Il faut programmer une probabilité de réussite initiale de } \frac{8}{23} \approx 34{,}8\ \%}$$

EXERCICE 14 : VITESSE DE CONVERGENCE ⋆⋆

1. 

On cherche $\pi = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix}$ avec $\pi P = \pi$: $0{,}9x + 0{,}3(1-x) = x$, soit $0{,}4x = 0{,}3$ et $x = \frac{3}{4}$. $\boxed{\pi = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}$. C'est la formule $\left(\frac{q}{p+q}, \frac{p}{p+q}\right)$ du cours, avec $p = 0{,}1$ et $q = 0{,}3$.

2. $\pi_{n+1} = \pi_n P$ donne, pour la première coordonnée : $x_{n+1} = 0{,}9x_n + 0{,}3(1-x_n) = \boxed{0{,}6\,x_n + 0{,}3}$.

3. $u_{n+1} = 0{,}6x_n + 0{,}3 - 0{,}75 = 0{,}6x_n - 0{,}45 = 0{,}6\,(x_n - 0{,}75) = 0{,}6\,u_n$: (u_n) est géométrique de raison 0,6. Comme la chaîne part de B, $x_0 = 0$ et $u_0 = -\frac{3}{4}$, donc :

$$\boxed{x_n = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \times 0{,}6^n}$$

4. Comme $0 < 0{,}6 < 1$, $0{,}6^n \to 0$, donc $x_n \to \frac{3}{4}$ et $\boxed{\pi_n \to \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \pi}$, conformément à la Proposition 4.
On cherche $\frac{3}{4} \times 0{,}6^n < 0{,}01$. La suite $(0{,}6^n)$ est décroissante, et $\frac{3}{4} \times 0{,}6^8 \approx 0{,}0126$, tandis que $\frac{3}{4} \times 0{,}6^9 \approx 0{,}0076$. $\boxed{n = 9}$. Au bout de neuf étapes, la distribution est donc à moins d'un centième de la distribution invariante.

EXERCICE 15 ⋆⋆

1. Aucun coefficient de P hors de la diagonale n'est nul : d'après la Proposition 3, la chaîne admet une unique distribution invariante.

2. $\pi P = \pi$ s'écrit, colonne par colonne, et en ajoutant la condition $a + b + c = 1$:

$$\begin{cases} 0{,}5a + 0{,}2b + 0{,}1c = a \\ 0{,}3a + 0{,}6b + 0{,}3c = b \\ 0{,}2a + 0{,}2b + 0{,}6c = c \\ a + b + c = 1 \end{cases}$$

La deuxième équation donne $0{,}3(a+c) = 0{,}4b$, et avec $a + c = 1 - b$: $0{,}3 - 0{,}3b = 0{,}4b$, soit $b = \frac{3}{7}$. La troisième donne $0{,}2(a+b) = 0{,}4c$, soit $a + b = 2c$, et avec $a + b = 1 - c$: $c = \frac{1}{3}$. Enfin $a = 1 - \frac{3}{7} - \frac{1}{3} = \frac{5}{21}$. La première équation est alors vérifiée : $0{,}5 \times \frac{5}{21} + 0{,}2 \times \frac{9}{21} + 0{,}1 \times \frac{7}{21} = \frac{2{,}5+1{,}8+0{,}7}{21} = \frac{5}{21} = a$.

$$\boxed{\pi = \begin{pmatrix} \frac{5}{21} & \frac{3}{7} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}238 & 0{,}429 & 0{,}333 \end{pmatrix}}$$

L'erreur la plus répandue est d'oublier la condition $a + b + c = 1$: le système $\pi P = \pi$ seul a une infinité de solutions, toutes proportionnelles.

3. La calculatrice donne $P^{20} \approx \begin{pmatrix} 0{,}238 & 0{,}429 & 0{,}333 \\ 0{,}238 & 0{,}429 & 0{,}333 \\ 0{,}238 & 0{,}429 & 0{,}333 \end{pmatrix}$: **les trois lignes sont presque égales à** π. Quel que soit l'état de départ, la loi de X_{20} est très proche de π : la chaîne a « oublié » son point de départ. C'est ce qu'exprime $\pi_{20} = \pi_0 P^{20} \approx \pi$ pour toute distribution initiale π_0.

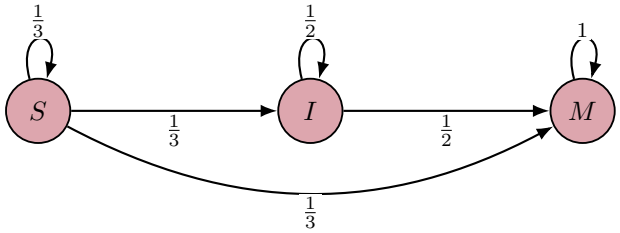
EXERCICE 16 ⋆⋆

Partie A

1. L'état d'un individu la semaine $n+1$ ne dépend que de son état la semaine n, et les proportions de passage sont les mêmes chaque semaine.

$$\boxed{(P_n) \text{ obéit à une chaîne de Markov homogène}}$$

2. Depuis S : $\frac{1}{3}$ vers I, $\frac{1}{3}$ vers M, donc $\frac{1}{3}$ restent en S. Depuis I : $\frac{1}{2}$ vers M, donc $\frac{1}{2}$ restent en I. Depuis M : on reste en M.



3.

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

La matrice est triangulaire supérieure : on ne peut jamais revenir en arrière.

4.

$$\boxed{P_n = P_0\, A^n}$$

5. La calculatrice donne :

$$P_4 = P_0 A^4 = \begin{pmatrix} \frac{11}{900} & \frac{143}{1440} & \frac{6397}{7200} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}01 & 0{,}10 & 0{,}89 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P(\text{être sain au bout de quatre semaines}) \approx 0{,}01}$$

En quatre semaines, la quasi-totalité de la population est donc contaminée, et près de 89 % est déjà malade.

Partie B

1.

$$\boxed{Q_n = Q_0\, B^n} \qquad \text{avec} \qquad Q_0 = P_4$$

2. (a) On calcule d'abord $12B$, dont tous les coefficients sont entiers :

$$12B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

On élève au carré. La première ligne du produit vaut, colonne par colonne :

$$5\times5+3\times5+4\times2=48 \quad ; \quad 5\times3+3\times3+4\times6=48 \quad ; \quad 5\times4+3\times4+4\times4=48$$

La deuxième ligne est identique à la première. Pour la troisième :

$$2\times 5+6\times 5+4\times 2=48 \quad ; \quad 2\times 3+6\times 3+4\times 6=48 \quad ; \quad 2\times 4+6\times 4+4\times 4=48$$

$$(12B)^2 = 48\,J \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad 144\,B^2 = 48\,J$$

$$\boxed{B^2 = \frac{1}{3}\,J, \text{ donc } k = \frac{1}{3}}$$

(b) Démontrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $B^n = B^2$ », pour $n \geqslant 2$.

Initialisation : Pour $n = 2$, l'égalité est immédiate.

Hérédité : Supposons $B^n = B^2$ pour un entier $n \geqslant 2$. Alors :

$$B^{n+1} = B^n \times B = B^2 \times B = \frac{1}{3}\,J\,B$$

Or le produit $J\,B$ a pour coefficients les sommes des colonnes de B, chacune répétée sur les trois lignes :

$$\frac{5}{12}+\frac{5}{12}+\frac{1}{6}=1 \quad ; \quad \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1 \quad ; \quad \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$$

donc $J\,B = J$, et $B^{n+1} = \dfrac{1}{3}J = B^2$: la propriété est héréditaire.

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ B^n = B^2 = \frac{1}{3}\,J}$$

(c) Pour $n \geqslant 2$:

$$Q_n = Q_0 B^n = Q_0 \times \frac{1}{3}J$$

Or Q_0 est une matrice ligne dont la somme des coefficients vaut 1 : le produit $Q_0 J$ vaut donc $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ Q_n = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}}$$

(d) Dès la deuxième semaine après la vaccination, et quelle que soit la situation de départ, la population se répartit en trois tiers égaux.

$$\boxed{\text{L'état se stabilise immédiatement en } \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}$$

$$\boxed{\text{Non, on ne peut pas espérer éradiquer la maladie}}$$

La proportion de malades se stabilise en effet à $\dfrac{1}{3}$, et ne tend pas vers 0. Le vaccin a enrayé l'épidémie — la proportion de malades chute de 89 % à 33 % — mais il ne l'élimine pas : la maladie devient *endémique*.

EXERCICE 17 ⋆⋆⋆

1. (a) L'urne A contient entre 0 et 3 boules :

$$\boxed{E = \{0\,;1\,;2\,;3\}}$$

(b) À chaque instant on tire un numéro entre 1 et 3 de façon équiprobable, et la boule correspondante change d'urne. Le nombre de boules dans A à l'instant $n+1$ ne dépend donc que de celui à l'instant n, et la règle du tirage est la même à chaque étape.

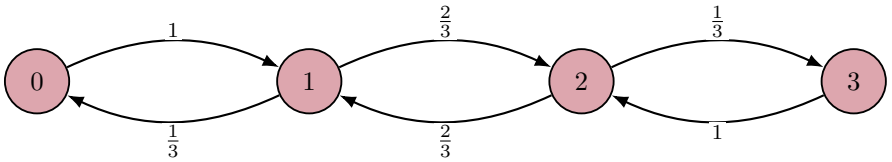
$$\boxed{(X_n) \text{ est une chaîne de Markov homogène}}$$

(c) Initialement les trois boules sont dans A :

$$\boxed{\pi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

(d) Supposons qu'il y ait k boules dans A. Le numéro tiré désigne une boule de A avec probabilité $\dfrac{k}{3}$, auquel cas cette boule part vers B et l'on passe à $k-1$; il désigne une boule de B avec probabilité $\dfrac{3-k}{3}$, et l'on passe à $k+1$.

$$\boxed{P(k \to k-1) = \frac{k}{3} \qquad ; \qquad P(k \to k+1) = \frac{3-k}{3}}$$



Aucune boucle : le nombre de boules change nécessairement à chaque étape.

(e)

$$\boxed{T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

2. La loi binomiale $\mathcal{B}\left(3, \dfrac{1}{2}\right)$ a pour coefficients $\binom{3}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$, soit :

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Il suffit de vérifier que $\pi T = \pi$, en calculant chaque coefficient du produit :

$$\begin{aligned}
\text{coefficient } 0 : &\quad \frac{3}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{8} \\
\text{coefficient } 1 : &\quad \frac{1}{8} \times 1 + \frac{3}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{8} \\
\text{coefficient } 2 : &\quad \frac{3}{8} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{8} \times 1 = \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \\
\text{coefficient } 3 : &\quad \frac{3}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

On retrouve bien π, et la somme des coefficients vaut 1.

$$\boxed{\pi = \mathcal{B}\left(3, \frac{1}{2}\right) \text{ est la répartition stable de la chaîne}}$$

Interprétation : à l'équilibre, chaque boule se trouve dans A ou dans B avec la même probabilité $\frac{1}{2}$, indépendamment des autres.

3. (a) À chaque étape, le nombre de boules dans A augmente ou diminue de 1 : sa **parité change à chaque étape**. Comme $X_0 = 3$ est impair, X_n est impair si n est pair, et pair si n est impair.

$$\boxed{\text{Si } n \text{ est impair, } X_n \text{ est pair, donc } p_n = P(X_n = 3) = 0}$$

(b) Aux instants pairs, la chaîne se trouve nécessairement dans un état impair, c'est-à-dire dans $\{1\,;3\}$. Le graphe proposé décrit donc les transitions *en deux étapes* entre ces deux états. On les retrouve par la formule des probabilités totales.

Depuis 3. On passe forcément en 2, puis :

$$P(3 \to 3 \text{ en 2 étapes}) = 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \qquad ; \qquad P(3 \to 1) = 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Depuis 1. On passe en 0 avec probabilité $\frac{1}{3}$, ou en 2 avec probabilité $\frac{2}{3}$.

$$P(1 \to 1) = \underbrace{\frac{1}{3} \times 1}_{\text{via 0}} + \underbrace{\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}}_{\text{via 2}} = \frac{3}{9} + \frac{4}{9} = \frac{7}{9}$$

$$P(1 \to 3) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

$$\boxed{\text{Les quatre valeurs du graphe sont bien } \frac{7}{9},\ \frac{2}{9},\ \frac{2}{3} \text{ et } \frac{1}{3}}$$

(c) À l'instant $2k$, la chaîne est en 3 avec probabilité p_{2k}, et en 1 avec probabilité $1 - p_{2k}$. La formule des probabilités totales appliquée au graphe précédent donne :

$$\boxed{p_{2k+2} = \frac{1}{3}\, p_{2k} + \frac{2}{9}\,(1 - p_{2k})}$$

(d) On pose $u_k = p_{2k}$. La relation précédente s'écrit :

$$u_{k+1} = \frac{1}{3}u_k + \frac{2}{9} - \frac{2}{9}u_k = \left(\frac{3}{9} - \frac{2}{9}\right) u_k + \frac{2}{9} = \frac{1}{9}u_k + \frac{2}{9}$$

Alors, avec $v_k = u_k - \frac{1}{4}$:

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= u_{k+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{9}u_k + \frac{2}{9} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{9}\left(v_k + \frac{1}{4}\right) + \frac{2}{9} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{9}v_k + \frac{1}{36} + \frac{8}{36} - \frac{9}{36} = \frac{1}{9}v_k \end{aligned}$$

$$\boxed{(v_k) \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{9}}$$

Son premier terme vaut $v_0 = u_0 - \dfrac{1}{4} = p_0 - \dfrac{1}{4} = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$, puisque les trois boules sont initialement dans A.

$$\boxed{v_k = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^k}$$

$$\boxed{p_{2k} = u_k = v_k + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^k}$$

Vérification pour $k = 1$: $\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{3}$, ce qui correspond bien à $P(X_2 = 3) = \dfrac{1}{3}$.

(e) Comme $0 < \dfrac{1}{9} < 1$, on a $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(\dfrac{1}{9}\right)^k = 0$:

$$\boxed{\lim_{k \to +\infty} p_{2k} = \frac{1}{4}}$$

En revanche, la suite (p_n) prend alternativement la valeur 0 (pour n impair) et des valeurs proches de $\dfrac{1}{4}$ (pour n pair) : ses termes de rang impair tendent vers 0 et ses termes de rang pair vers $\dfrac{1}{4}$, elle ne peut donc pas converger.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} p_n \text{ n'existe pas}}$$

(f) La répartition stable donne pourtant $\pi_3 = \dfrac{1}{8}$, alors que p_{2k} tend vers $\dfrac{1}{4}$. Il n'y a pas de contradiction : la chaîne est **périodique de période** 2, donc π_n ne converge pas vers π.

La répartition stable s'interprète ici comme une *moyenne temporelle* : sur deux étapes consécutives, la proportion du temps passé en 3 vaut

$$\frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} = \pi_3$$

$$\boxed{\pi \text{ décrit la fréquence de visite à long terme, non la loi de } X_n}$$

4. (a) Le raisonnement de parité de la question 3a s'applique : partant de 3, la chaîne ne peut revenir en un état impair qu'après un nombre *pair* d'étapes.

$$\boxed{\text{Si } n \text{ est impair, } P(D = n) = 0}$$

(b) Cas $D = 2$. Depuis 3 on passe nécessairement en 2, puis on revient en 3 avec probabilité $\dfrac{1}{3}$:

$$\boxed{P(D = 2) = 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}}$$

Cas $D = 4$. Il faut ne pas être revenu à l'étape 2, puis revenir à l'étape 4. Le seul chemin possible est $3 \to 2 \to 1 \to 2 \to 3$:

- $3 \to 2$: probabilité 1 ;
- $2 \to 1$: probabilité $\dfrac{2}{3}$ (il ne faut pas revenir en 3) ;
- $1 \to 2$: probabilité $\dfrac{2}{3}$ (par 0, on arriverait en 1 à l'étape 4) ;
- $2 \to 3$: probabilité $\dfrac{1}{3}$.

$$\boxed{P(D=4) = 1 \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}}$$

(c) Revenir au moins une fois en moins de cinq étapes signifie $D \leqslant 4$. Les valeurs 1 et 3 étant impossibles :

$$P(D \leqslant 4) = P(D=2) + P(D=4) = \frac{1}{3} + \frac{4}{27} = \frac{9}{27} + \frac{4}{27}$$

$$\boxed{P(D \leqslant 4) = \frac{13}{27} \approx 0{,}481}$$

Il y a donc un peu moins d'une chance sur deux de revoir les trois boules réunies dans l'urne A au cours des quatre premières étapes.

EXERCICE 18 : LA PUCE DU COURS ⋆⋆⋆

1. $J - I$ a des 0 sur la diagonale et des 1 ailleurs : la moitié donne bien P. Chaque coefficient de J^2 est la somme de trois produits 1×1, d'où $J^2 = 3J$.

2. On note $\mathcal{P}_n$ l'égalité annoncée.
Initialisation : Pour $n = 0$: $\frac{1}{3}J + I - \frac{1}{3}J = I = P^0$.
Hérédité : Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. On calcule d'abord, à l'aide de $J^2 = 3J$:

$$JP = \frac{1}{2}\left(J^2 - J\right) = \frac{1}{2}(3J - J) = J$$

$$\left(I - \tfrac{1}{3}J\right)P = P - \tfrac{1}{3}J = \tfrac{1}{2}J - \tfrac{1}{2}I - \tfrac{1}{3}J = -\tfrac{1}{2}\left(I - \tfrac{1}{3}J\right)$$

Ainsi $P^{n+1} = P^n P = \frac{1}{3}J + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(-\frac{1}{2}\right)\left(I - \frac{1}{3}J\right)$, ce qui est $\mathcal{P}_{n+1}$.
Conclusion : L'égalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. r_n est un coefficient diagonal de P^n (Chapman-Kolmogorov) :

$$\boxed{r_n = \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

Pour $n = 3$: $r_3 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$, c'est le coefficient 0,25 calculé dans le cours. On vérifie aussi $r_1 = 0$ (la puce ne reste jamais sur place) et $r_2 = \frac{1}{2}$.

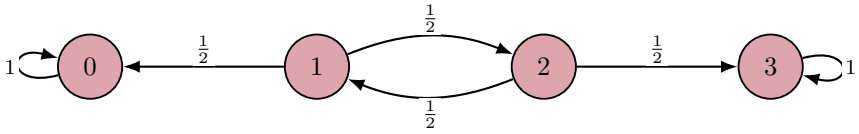
4. Comme $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \to 0$, d'où $\boxed{r_n \to \frac{1}{3}}$. Plus généralement $P^n \to \frac{1}{3}J$, dont toutes les lignes valent $\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$. Cette distribution est invariante, puisque $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, chaque colonne de P ayant pour somme 1. Elle est unique d'après la Proposition 3.

$$\boxed{\pi = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}}$$

À long terme, la puce a autant de chances d'être sur chacun des trois sommets, ce que la symétrie du triangle laissait prévoir. La probabilité de retour oscille autour de $\frac{1}{3}$ en s'en rapprochant, à cause du signe alterné de $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Ce calcul est celui du graphe complet K_3 (exercice 29 du chapitre 6), divisé par 2^n.

EXERCICE 19 : LA RUINE DU JOUEUR ⋆⋆⋆

1.



$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Les états 0 et 3 ont une boucle de probabilité 1 : une fois atteints, on ne les quitte plus. Ce sont des **états absorbants**.

2. Avec $r_0 = 1$ et $r_3 = 0$: $r_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}r_2$ et $r_2 = \frac{1}{2}r_1$. En reportant : $r_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}r_1$, soit $\frac{3}{4}r_1 = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{r_1 = \frac{2}{3} \quad ; \quad r_2 = \frac{1}{3}}$$

Partant de 1 €, le joueur a deux chances sur trois d'être ruiné avant d'avoir atteint 3 €.

3. La calculatrice donne $P^{20} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}667 & 0 & 0 & 0{,}333 \\ 0{,}333 & 0 & 0 & 0{,}667 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, à 10^{-3} près. La deuxième ligne donne la loi de X_{20} en partant de 1 : la chaîne est presque sûrement absorbée, en 0 avec probabilité proche de $\frac{2}{3} = r_1$, en 3 avec probabilité proche de $\frac{1}{3}$. Les deux méthodes concordent.

4. $\begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 1-p \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 1-p \end{pmatrix}$, puisque les lignes 1 et 4 de P sont celles de l'identité. Il y a donc **une infinité de distributions invariantes**. Ce n'est pas contradictoire avec la Proposition 3 : son hypothèse n'est pas vérifiée, car P a des coefficients nuls hors de la diagonale. Une proposition qui donne une condition suffisante ne dit rien quand la condition n'est pas remplie.

POUR ALLER PLUS LOIN

EXERCICE 20 : TOUT CE QUI EST POSSIBLE FINIT PAR ARRIVER ⋆⋆

1. L'état après le lancer $n+1$ ne dépend que de l'état après le lancer n et du résultat du lancer $n+1$, indépendant des précédents, avec les mêmes probabilités à chaque lancer : la chaîne est de Markov et homogène.

$$\boxed{T = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

L'état 1 est **absorbant** : une fois un 6 sorti, on reste dans l'état 1.

2. **Initialisation :** $T^0 = I_2$ correspond bien à la formule pour $n = 0$.
Hérédité : Si la formule est vraie au rang n, alors :

$$T^{n+1} = T^n T = \begin{pmatrix} \left(\frac{5}{6}\right)^n \times \frac{5}{6} & \left(\frac{5}{6}\right)^n \times \frac{1}{6} + 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} & 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

car $\left(\frac{5}{6}\right)^n \left(\frac{1}{6} - 1\right) = -\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}$.
Conclusion : La formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. On part de l'état 0 : p_n est le coefficient en ligne 1 et colonne 2 de T^n.

$$\boxed{p_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$$

car $0 < \frac{5}{6} < 1$. Un événement de probabilité non nulle, répété indépendamment, finit par se produire avec une probabilité aussi proche de 1 que l'on veut.

4. $p_4 = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} \approx 0{,}518 > \frac{1}{2}$: **oui**. Pour le double six, la chaîne est la même avec $\frac{35}{36}$ et $\frac{1}{36}$ à la place de $\frac{5}{6}$ et $\frac{1}{6}$:

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}491 < \frac{1}{2}$$

Non. Le chevalier de Méré pensait, par une règle de proportionnalité, que les deux paris étaient équivalents : 4 est à 6 comme 24 est à 36. Le calcul montre que le premier est favorable et le second défavorable.

5. L'événement $(T_6 = k)$ signifie $X_{k-1} = 0$ et $X_k = 1$. D'après la question 2 et la propriété de Markov :

$$\boxed{P(T_6 = k) = P(X_{k-1} = 0) \times P_{(X_{k-1}=0)}(X_k = 1) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6}}$$

C'est la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$. Contrôle : $P(T_6 = 1) = \frac{1}{6}$, comme attendu.

EXERCICE 21 : PRINCIPE DE HARDY-WEINBERG ⋆⋆⋆

On suppose bien sûr $x_1 + 2y_1 + z_1 = 1$.

a) Un parent pris au hasard transmet l'allèle a s'il est de génotype aa (probabilité x_1, transmission certaine) ou s'il est de génotype aA (probabilité $2y_1$, transmission avec probabilité $\frac{1}{2}$). Par la formule des probabilités totales, il transmet a avec la probabilité $\alpha = x_1 + 2y_1 \times \frac{1}{2} = x_1 + y_1$, et A avec la probabilité $\beta = y_1 + z_1 = 1 - \alpha$. Les deux parents étant indépendants :

$$\boxed{x_2 = \alpha^2 = (x_1 + y_1)^2 \qquad z_2 = \beta^2 = (y_1 + z_1)^2 \qquad 2y_2 = 2\alpha\beta = 2(x_1 + y_1)(y_1 + z_1)}$$

Le facteur 2 du génotype aA vient de ce que l'allèle a peut venir du père ou de la mère.

b) La probabilité de transmettre a à la génération suivante vaut :

$$x_2 + y_2 = \alpha^2 + \alpha\beta = \alpha(\alpha + \beta) = \alpha = x_1 + y_1$$

La fréquence de l'allèle a est conservée. Le même calcul, appliqué entre les générations n et $n+1$, montre par récurrence que $x_n + y_n = \alpha$ pour tout $n \geqslant 1$, et donc $y_n + z_n = \beta$. Pour $n \geqslant 2$, la question a) appliquée entre les générations $n-1$ et n donne :

$$x_n = (x_{n-1} + y_{n-1})^2 = \alpha^2 = x_2, \qquad y_n = \alpha\beta = y_2, \qquad z_n = \beta^2 = z_2$$

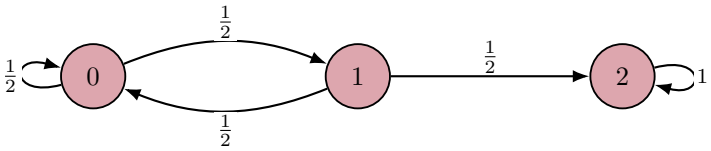
$$\boxed{\text{la répartition des génotypes est stable dès la deuxième génération}}$$

Comme pour la Partie B de l'exercice 16, l'état d'équilibre est atteint en une seule étape. Ce n'est pas tout à fait une chaîne de Markov au sens du cours : les probabilités de la génération suivante dépendent ici de la répartition des génotypes de toute la population, et non d'une matrice fixe.

EXERCICE 22 : PUISSANCES D'UNE MATRICE DE TRANSITION À DEUX ÉTATS ⋆⋆⋆

1. On calcule, en factorisant par $\frac{1}{p+q}$ ou $\frac{1}{(p+q)^2}$:
   - $A+B = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} p+q & 0 \\ 0 & p+q \end{pmatrix} = I_2$;
   - $\begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} q^2+pq & qp+p^2 \\ q^2+pq & qp+p^2 \end{pmatrix} = (p+q)\begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix}$, d'où $A^2 = A$; de même $\begin{pmatrix} p & -p \\ -q & q \end{pmatrix}^2 = (p+q)\begin{pmatrix} p & -p \\ -q & q \end{pmatrix}$, d'où $B^2 = B$;
   - $\begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & -p \\ -q & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qp-pq & -qp+pq \\ qp-pq & -qp+pq \end{pmatrix} = 0$, et de même dans l'autre ordre : $AB = BA = 0$;
   - le coefficient $(1,1)$ de $A+rB$ vaut $\frac{q+(1-p-q)p}{p+q} = \frac{(p+q)-p(p+q)}{p+q} = 1-p$. De même pour les trois autres, on trouve $P = A+rB$.
2. **Initialisation :** $P^0 = I_2 = A+B = A+r^0B$.
   Hérédité : Si $P^n = A+r^nB$, alors $P^{n+1} = (A+r^nB)(A+rB) = A^2+rAB+r^nBA+r^{n+1}B^2 = A+r^{n+1}B$.
   Conclusion : $\boxed{P^n = A+r^nB}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. $0 < p+q < 2$, donc $-1 < r = 1-(p+q) < 1$, et $r^n \to 0$. Ainsi :
$$P^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} A = \begin{pmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \\ \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \end{pmatrix}$$
   Les deux lignes de la limite sont égales à la distribution invariante $\pi = \left(\frac{q}{p+q}, \frac{p}{p+q}\right)$ trouvée dans la démonstration de la Proposition 4. Quel que soit l'état de départ, la loi de X_n tend vers π.
4. Ici $p = 0{,}2$, $q = 0{,}4$ et $r = 0{,}4$:
$$\boxed{P^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + 0{,}4^n \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}}$$
   On retrouve $\pi = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Contrôle pour $n = 1$: $\frac{2}{3} + 0{,}4 \times \frac{1}{3} = \frac{2{,}4}{3} = 0{,}8$. Cette décomposition joue le rôle de la diagonalisation de l'exercice 26 du chapitre 3 : A et B « séparent » les deux comportements, la partie stable A et la partie qui s'éteint, r^nB.

EXERCICE 23 : DEUX PILES CONSÉCUTIFS ⋆⋆⋆⋆



Un pile fait passer de 0 à 1, puis de 1 à l'état absorbant 2 ; un face ramène toujours en 0, sauf depuis l'état 2.

1.
$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   $\pi_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ et $\pi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, donc $\boxed{p_1 = 1}$ et $\boxed{p_2 = \frac{3}{4}}$: sur quatre suites de deux lancers, seule PP est exclue.

2. $\pi_{n+1} = \pi_n T$ donne $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n = \frac{1}{2}p_n$ et $b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$. Alors :

$$p_{n+2} = a_{n+2} + b_{n+2} = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{2}a_{n+1} = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{4}p_n$$

3. Récurrence à deux termes. **Initialisation :** $\frac{F_3}{2} = \frac{2}{2} = 1 = p_1$ et $\frac{F_4}{4} = \frac{3}{4} = p_2$. **Hérédité :** Si la formule est vraie aux rangs n et $n+1$:

$$p_{n+2} = \frac{1}{2} \times \frac{F_{n+3}}{2^{n+1}} + \frac{1}{4} \times \frac{F_{n+2}}{2^n} = \frac{F_{n+3} + F_{n+2}}{2^{n+2}} = \frac{F_{n+4}}{2^{n+2}}$$

Conclusion : $\boxed{p_n = \dfrac{F_{n+2}}{2^n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Autrement dit, parmi les 2^n suites de n lancers, exactement F_{n+2} ne contiennent pas deux piles consécutifs.

4. Récurrence à deux termes encore : $F_1 = 1 \leqslant \frac{7}{4}$ et $F_2 = 1 \leqslant \frac{49}{16}$. Si $F_n \leqslant \left(\frac{7}{4}\right)^n$ et $F_{n+1} \leqslant \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}$, alors :

$$F_{n+2} \leqslant \left(\frac{7}{4}\right)^n \left(1 + \frac{7}{4}\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^n \times \frac{44}{16} \leqslant \left(\frac{7}{4}\right)^n \times \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^{n+2}$$

On en déduit :

$$0 \leqslant p_n \leqslant \frac{1}{2^n}\left(\frac{7}{4}\right)^{n+2} = \frac{49}{16}\left(\frac{7}{8}\right)^n$$

Comme $0 < \frac{7}{8} < 1$, le majorant tend vers 0, et par le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0}$.
Deux piles consécutifs finissent par apparaître avec une probabilité aussi proche de 1 que l'on veut : l'état 2 absorbe la chaîne, comme dans l'exercice 20.