CORRIGÉ – CHAPITRE 1

LOGIQUE ET ENSEMBLES

⋆ *application directe* ⋆⋆ *mise en œuvre* ⋆⋆⋆ *problème* ⋆⋆⋆⋆ *problème long, en autonomie*

Assertions et connecteurs logiques

EXERCICE 1 ⋆

1. Pour chaque assertion, on cherche les valeurs de P, Q, R qui pourraient la rendre fausse : c'est plus rapide qu'une table complète à huit lignes, puisqu'une implication n'est fausse que dans un seul cas.

(a) Si $P \Rightarrow Q$ est fausse, alors P est vraie et Q est fausse ; mais dans ce cas $Q \Rightarrow P$ est vraie. Les deux membres ne peuvent donc pas être faux simultanément.

$$\boxed{(P \Rightarrow Q) \text{ ou } (Q \Rightarrow P) \text{ est toujours vraie.}}$$

(b) Le membre de gauche est faux exactement lorsque P est vraie et $Q \Rightarrow R$ fausse, c'est-à-dire lorsque P et Q sont vraies et R fausse. Le membre de droite est faux exactement lorsque P et Q est vraie et R fausse : c'est la même situation. Les deux membres ont donc toujours la même valeur.

$$\boxed{\text{L'équivalence (b) est toujours vraie.}}$$

(c) Prenons P et R fausses, et Q quelconque. Alors $P \Rightarrow Q$ est vraie, donc $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ est fausse ; tandis que $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ est vraie, son hypothèse P étant fausse.

$$\boxed{\text{(c) est fausse pour } P \text{ et } R \text{ fausses.}}$$

(d) On distingue deux cas. Si P est vraie, le membre de gauche vaut Q et $\text{non}\, Q$, qui est faux, comme $\text{non}\, P$. Si P est fausse, les deux implications sont vraies, et $\text{non}\, P$ aussi.

$$\boxed{\text{L'équivalence (d) est toujours vraie.}}$$

(e) Supposons $P \Rightarrow Q$ et P ou R vraies. Si P est vraie, alors Q est vraie, donc Q ou R aussi ; sinon R est vraie, et Q ou R aussi.

$$\boxed{\text{(e) est toujours vraie.}}$$

Piège : l'assertion (c) montre que l'implication n'est pas « associative ». Une écriture comme $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ est donc ambiguë et doit toujours être parenthésée.

2. L'assertion (d) affirme que si, en supposant P, on aboutit à la fois à Q et à $\text{non}\, Q$, alors P est fausse.

$$\boxed{\text{C'est le principe du raisonnement par l'absurde.}}$$

3. Un habitant dit la vérité si et seulement si c'est un chevalier. Les deux déclarations se traduisent donc par :

$$a \Leftrightarrow (a \Leftrightarrow b) \qquad \text{et} \qquad b \Leftrightarrow \text{non}\, a$$

Étudions la première. Si a est vraie, elle se réduit à b ; si a est fausse, elle s'écrit « faux $\Leftrightarrow$ (faux $\Leftrightarrow b$) », c'est-à-dire « faux $\Leftrightarrow \text{non}\, b$ », ce qui équivaut encore à b. Dans tous les cas, la première déclaration impose donc que b soit vraie : B est un chevalier. La seconde donne alors $\text{non}\, a$ vraie.

$$\boxed{A \text{ est un fripon et } B \text{ un chevalier.}}$$

Vérification : A ment bien en affirmant qu'ils sont de même nature, et B dit vrai en affirmant que A est un fripon. ✓

À retenir : quelle que soit la nature de A, la phrase « B et moi sommes de même nature » prononcée par A révèle toujours que B est un chevalier. C'est le genre de résultat que le calcul logique fait apparaître sans effort, et que l'intuition manque facilement.

EXERCICE 2 ⋆

1. La règle s'écrit, pour chaque carte : « voyelle ⇒ pair ». Une implication n'est fausse que lorsque son hypothèse est vraie et sa conclusion fausse ; une carte ne peut donc contredire la règle que si elle porte une voyelle *et* un nombre impair. On examine chaque carte.

- La carte A montre une voyelle : si son dos est impair, la règle est violée. Il faut la retourner.
- La carte B montre une consonne : l'hypothèse est fausse, l'implication est vraie quel que soit le dos.
- La carte 1 montre un nombre impair : par contraposée, la règle équivaut à « impair ⇒ consonne », et il faut vérifier que son dos n'est pas une voyelle.
- La carte 2 montre un nombre pair : la conclusion est vraie, donc l'implication aussi, quel que soit le dos.

$$\boxed{\text{Il faut retourner les cartes A et 1, et elles seules.}}$$

Piège : dans l'expérience de Peter Wason (1966), la plupart des personnes interrogées choisissent A et 2. Retourner 2 revient à tester la réciproque « pair ⇒ voyelle », que la règle n'affirme pas ; oublier 1, c'est oublier la contraposée, qui est pourtant équivalente à la règle.

2. Notons $\mathcal{R}$ l'ensemble des représentations passées de l'opéra. Le compliment (i) affirme que pour *toute* représentation $r \in \mathcal{R}$, la chanteuse de r a moins bien chanté. Le compliment (ii) affirme la même chose, mais seulement pour les représentations r dont la chanteuse était au moins aussi jeune et avait d'aussi beaux cheveux : c'est une assertion universelle sur une partie $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$. Or

$$(\forall r \in \mathcal{R},\ P(r)) \Rightarrow (\forall r \in \mathcal{R}',\ P(r)),$$

et la réciproque est fausse en général : la chanteuse peut être surpassée par une interprète plus âgée.

$$\boxed{\text{Le compliment (i) est le plus fort : (i) entraîne (ii).}}$$

À retenir : restreindre le domaine d'un « pour tout » affaiblit l'assertion, tandis que restreindre celui d'un « il existe » la renforce. Les adjectifs flatteurs de (ii) sont autant de restrictions : le journaliste qui les ajoute retire en réalité au compliment. L'exemple est dû à Roger Godement, dans son *Cours d'algèbre* (1963).

EXERCICE 3 ⋆⋆⋆

1. On commence par la négation, qui servira à tout le reste :

$$\boxed{\text{non } P \Leftrightarrow P \uparrow P}$$

car non (P et P) a la même valeur que non P. La conjonction s'obtient en niant $P \uparrow Q$, la disjonction grâce à une loi de De Morgan, et l'implication grâce au point (iv) de la proposition 1 du cours :

$$\boxed{P \text{ et } Q \Leftrightarrow (P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)} \qquad \boxed{P \text{ ou } Q \Leftrightarrow (P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)} \qquad \boxed{P \Rightarrow Q \Leftrightarrow P \uparrow (Q \uparrow Q)}$$

Pour la disjonction : $(P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q) = \text{non}\,(\text{non}\,P \text{ et non}\,Q)$, qui équivaut à P ou Q. Pour l'implication : $P \uparrow (\text{non}\,Q) = \text{non}\,(P \text{ et non}\,Q)$, qui équivaut à $P \Rightarrow Q$.

2. Une table de vérité à deux variables comporte quatre lignes, et chacune peut recevoir l'une des deux valeurs **V** ou **F**, indépendamment des autres :

$$\boxed{2^4 = 16 \text{ connecteurs binaires.}}$$

Parmi eux figurent « et », « ou », $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\uparrow$, le « ou exclusif », mais aussi des connecteurs dégénérés comme « toujours vrai » ou « valeur de P ».

3. Soit c un connecteur binaire. S'il est toujours faux, il équivaut à P et non P. Sinon, à chaque ligne de sa table où il vaut **V**, on associe la conjonction qui n'est vraie que sur cette ligne : par exemple P et non Q pour la ligne où P est vraie et Q fausse. La disjonction de ces conjonctions est vraie exactement sur les lignes où c vaut **V** :

$$\boxed{\text{tout connecteur s'écrit comme une disjonction de conjonctions de } P,\ Q,\ \text{non } P,\ \text{non } Q.}$$

Par exemple, le « ou exclusif » s'écrit (P et non Q) ou (non P et Q). Comme la question 1 exprime « non », « et » et « ou » à l'aide de $\uparrow$, il suffit de remplacer chacun d'eux par son expression :

$$\boxed{\text{tout connecteur binaire s'exprime à l'aide du seul connecteur } \uparrow.}$$

4. Montrons que toute assertion construite à partir de P avec les seuls connecteurs « et », « ou » et $\Rightarrow$ est vraie lorsque P est vraie. On raisonne par récurrence forte sur le nombre k de connecteurs utilisés. Si $k = 0$, l'assertion est P elle-même. Si $k \geqslant 1$, l'assertion s'écrit $F_1 * F_2$, où $*$ est l'un des trois connecteurs et où F_1, F_2 utilisent chacune strictement moins de k connecteurs ; par hypothèse de récurrence, F_1 et F_2 sont vraies lorsque P l'est, et l'on conclut car « **V** et **V** », « **V** ou **V** » et « **V** $\Rightarrow$ **V** » valent tous **V**. Or non P est fausse lorsque P est vraie.

$$\boxed{\text{Non : non } P \text{ ne s'exprime pas à l'aide de } P \text{ et des seuls connecteurs « et », « ou », } \Rightarrow.}$$

À retenir : pour démontrer une impossibilité, on cherche une propriété conservée par toutes les constructions autorisées et que l'objet visé ne possède pas : c'est la méthode de l'*invariant*. On en reverra des exemples tout au long de l'année. Par ailleurs, le connecteur $\uparrow$ est le « NAND » des électroniciens : un circuit logique arbitraire peut être réalisé avec ce seul type de porte.

Quantificateurs

EXERCICE 4 ⋆

1. On donne pour chaque phrase l'assertion quantifiée, puis sa négation obtenue par la méthode du cours.

(a) Ne pas s'annuler, c'est ne jamais prendre la valeur 0 :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0} \qquad \text{négation :} \qquad \boxed{\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0}$$

(b) Une fonction constante prend partout la même valeur :

$$\boxed{\exists c \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = c} \qquad \text{négation :} \qquad \boxed{\forall c \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq c}$$

Une forme équivalente sans constante auxiliaire est $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) = f(y)$, dont la négation $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) \neq f(y)$ est souvent plus commode.

(c) Deux réels distincts ont toujours des images distinctes :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)} \qquad \text{négation :} \qquad \boxed{\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y \text{ et } f(x) = f(y)}$$

Par contraposition, l'assertion équivaut à $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$: c'est la notion d'*injectivité*, qui sera étudiée au chapitre 2.

(d) Il existe un rang à partir duquel deux termes consécutifs sont égaux :

$$\boxed{\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_{n+1} = u_n} \qquad \text{négation :} \qquad \boxed{\forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N,\ u_{n+1} \neq u_n}$$

(e) Une fonction est périodique s'il existe une période *strictement positive* :

$$\boxed{\exists T > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)} \qquad \text{négation :} \qquad \boxed{\forall T > 0,\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x+T) \neq f(x)}$$

(f) Chaque réel positif admet au moins un antécédent :

$$\boxed{\forall y \geqslant 0,\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = y} \qquad \text{négation :} \qquad \boxed{\exists y \geqslant 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq y}$$

Piège : dans (e), oublier la condition $T > 0$ rend l'assertion vide de sens, puisque $T = 0$ convient pour toute fonction. Une traduction correcte doit être fausse pour au moins une fonction : c'est un bon test.

2. On traduit, puis on cherche des exemples.

(a) Pour toute valeur prise par f, il existe une valeur strictement plus grande :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ n'atteint pas de maximum.}}$$

La fonction $x \mapsto x$ vérifie (a) ; la fonction cosinus ne la vérifie pas, puisqu'elle atteint son maximum 1 en 0.

(b) Il existe un réel en lequel f prend sa plus petite valeur :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ atteint un minimum.}}$$

La fonction $x \mapsto x^2$ vérifie (b), son minimum valant 0 ; la fonction exponentielle ne la vérifie pas : elle est minorée par 0, mais n'atteint jamais cette valeur.

Piège : l'assertion (a) est la négation de « f atteint un maximum », et non de (b). L'exemple de la fonction exponentielle montre aussi qu'une fonction minorée n'atteint pas forcément un minimum, distinction qui sera au cœur du chapitre 7.

EXERCICE 5 ⋆⋆

(a) Fausse : pour $x = -1$, aucun réel y ne vérifie $y^2 = -1$.

$$\boxed{\text{Fausse}} \qquad \text{négation :} \quad \boxed{\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x \neq y^2}$$

(b) Vraie : $y = 0$ convient, puisque $x^2 \geqslant 0$ pour tout réel x.

$$\boxed{\text{Vraie}} \qquad \text{négation :} \quad \boxed{\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ y > x^2}$$

(c) Vraie : c'est exactement la propriété d'Archimède, admise dans le cours.

$$\boxed{\text{Vraie}} \qquad \text{négation :} \quad \boxed{\exists \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \tfrac{1}{n} \geqslant \varepsilon}$$

(d) Fausse : soit $n \in \mathbb{N}^*$; le réel $\varepsilon = \frac{1}{n}$ ne vérifie pas $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

$$\boxed{\text{Fausse}} \qquad \text{négation :} \quad \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists \varepsilon > 0,\ \tfrac{1}{n} \geqslant \varepsilon}$$

(e) Fausse : pour $(a, b) = (2, 4)$, tout entier $2u + 4v$ est pair, donc différent de 1.

$$\boxed{\text{Fausse}} \qquad \text{négation :} \quad \boxed{\exists (a,b) \in \mathbb{Z}^2,\ \forall (u,v) \in \mathbb{Z}^2,\ au + bv \neq 1}$$

(f) Vraie : le cours a signalé que les intervalles $[n\,, n+1[$, pour $n \in \mathbb{Z}$, forment une partition de $\mathbb{R}$. Tout réel appartient donc à l'un d'eux, qui est unique ; l'entier n correspondant sera appelé la partie entière de x au chapitre 7.

$$\boxed{\text{Vraie}} \qquad \text{négation :} \quad \boxed{\exists x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ x < n \text{ ou } x \geqslant n+1}$$

(g) Vraie : pour $a = 0$, on a $x^2 + 1 > 0$ pour tout réel x.

$$\boxed{\text{Vraie}} \qquad \text{négation : } \boxed{\forall a \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ x^2 - ax + 1 \leqslant 0}$$

(h) Fausse : pour $a = 0$, aucun réel ne vérifie $x^2 + 1 < 0$.

$$\boxed{\text{Fausse}} \qquad \text{négation : } \boxed{\exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - ax + 1 \geqslant 0}$$

À retenir : les paires (c)–(d) et (g)–(h) illustrent la proposition 3 du cours. Dans (c), l'entier n peut dépendre de ε ; dans (d), il devrait convenir pour tous les ε à la fois, ce qui est impossible. Pour (g), une étude du discriminant $a^2 - 4$ montre plus précisément que les réels a qui conviennent sont exactement ceux de $]-2\,,2[$. Enfin, le théorème de Bézout de Terminale montre que (e) devient vraie dès que a et b sont premiers entre eux.

EXERCICE 6 ⋆⋆

(a) Incorrecte. Le quantificateur n'a pas été changé : la négation de « pour tout » est « il existe ».

$$\boxed{\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant 0}$$

(b) Correcte. L'assertion (b) signifie « la suite (u_n) est majorée », et la négation proposée signifie qu'elle n'est pas majorée : aucun réel M ne majore tous ses termes.

(c) Correcte. Les quantificateurs sont échangés, leurs domaines ($\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N$) conservés, et l'inégalité finale niée. L'assertion de départ exprime que (u_n) converge vers ℓ, comme on le verra au chapitre 7.

(d) Incorrecte. La négation d'une implication $A \Rightarrow B$ est A et non B, et non une autre implication :

$$\boxed{\exists x \in \mathbb{R},\ x > 0 \text{ et } f(x) \leqslant 0}$$

La proposition de l'élève est vraie pour toute fonction f : le réel $x = -1$ la vérifie, puisque l'hypothèse $x > 0$ y est fausse. Or pour $f = \exp$, l'assertion (d) est vraie elle aussi. Une assertion et sa négation ne pouvant être vraies simultanément, la proposition ne peut pas être la négation de (d).

(e) Incorrecte. Nier « il existe un unique x », c'est dire qu'il n'en existe aucun, ou qu'il en existe au moins deux :

$$\boxed{(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0) \text{ ou } (\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y \text{ et } f(x) = f(y) = 0)}$$

Pour la fonction nulle, l'assertion (e) et la proposition de l'élève sont toutes deux fausses, ce qui confirme l'erreur.

(f) Incorrecte. Le domaine du premier quantificateur a été modifié : on nie la propriété, pas l'ensemble sur lequel porte la variable.

$$\boxed{\exists x > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) \leqslant n}$$

À retenir : l'assertion (f) cache une curiosité. Pour un réel t, dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $t > n$ revient à dire que $t > 0$ (prendre $n = 0$ dans un sens, et utiliser $n \geqslant 0$ dans l'autre). L'assertion (f) signifie donc simplement que f est strictement positive sur $]0\,,+\infty[$, et sa négation qu'elle prend une valeur négative ou nulle en un réel strictement positif. Simplifier une assertion avant de la nier évite bien des erreurs.

EXERCICE 7 ⋆⋆

(a) **Vraie** L'hypothèse $1 = 0$ est fausse, donc l'implication est vraie, quelle que soit la valeur de vérité de la conclusion. Le choix de 114 n'est pas innocent : on ne sait pas, à ce jour, si 114 est somme

de trois cubes d'entiers relatifs. On a donc démontré une implication dont on ignore si la conclusion est vraie.

(b) **Fausse** Le réel $x = \frac{5}{2}$ vérifie $x > 2$ mais pas $x \geqslant 3$. L'implication serait vraie pour des *entiers* : l'erreur est de raisonner sur $\mathbb{R}$ comme sur $\mathbb{Z}$.

(c) **Fausse** Pour $x = -1$ et $y = 1$, on a $x < y$ mais $\frac{1}{x} = -1 < 1 = \frac{1}{y}$. La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, mais pas sur $\mathbb{R}^*$, comme l'exercice 12 l'a déjà montré pour d'autres fonctions.

(d) **Vraie** Pour $x = 4$: $\sqrt{4} = 2 < 4$. Plus généralement, tout $x > 1$ convient.

(e) **Fausse** Les réels $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ sont deux solutions distinctes : l'existence est vraie, mais pas l'unicité. La négation de (e) est « aucune solution, ou au moins deux ».

(f) **Fausse** La fonction $g : x \mapsto x - \mathrm{e}^{-x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, comme somme de deux fonctions strictement croissantes ; elle s'annule donc au plus une fois. Comme $g(0) = -1 < 0$ et $g(1) = 1 - \mathrm{e}^{-1} > 0$, le théorème des valeurs intermédiaires (Terminale) donne un unique $\alpha \in]0, 1[$ tel que $\alpha = \mathrm{e}^{-\alpha}$. Mais pour $0 < \alpha < 1$, on a $\alpha^2 < \alpha$, donc $\alpha \leqslant \alpha^2$ est fausse. Numériquement, $\alpha \approx 0{,}567$.

(g) **Fausse** La négation est $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ nm$ est pair : elle est vraie pour $n = 0$ (ou tout n pair), car nm est alors pair quel que soit m.

(h) **Fausse** Soit $\eta > 0$. Le réel $x = -2$ vérifie $x \leqslant \eta$, mais $x^2 = 4 > 1$. La condition $x \leqslant \eta$ ne contrôle pas les grands négatifs.

(i) **Vraie** Avec $\eta = 1$: si $|x| \leqslant 1$, alors $x^2 = |x|^2 \leqslant 1$.

(j) **Vraie** Avec $\eta = 10^{-9}$: si $|x| \leqslant 10^{-9}$, alors $x^2 \leqslant 10^{-18}$.

(k) **Vraie** Soit $\varepsilon > 0$. Avec $\eta = \sqrt{\varepsilon}$, si $|x| \leqslant \eta$, alors $x^2 \leqslant \eta^2 = \varepsilon$.

L'assertion (k) dit que x^2 est aussi proche de 0 qu'on le souhaite, pourvu que x soit assez proche de 0 : c'est la continuité en 0 de la fonction carré, au sens de l'assertion (C) de l'exercice 9. Les assertions (i) et (j) en sont des cas particuliers, pour $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon = 10^{-18}$; mais aucune liste finie de tels cas ne suffit à établir (k), qui porte sur *tous* les $\varepsilon > 0$. D'où la nécessité d'exprimer η en fonction de ε.

EXERCICE 8 ⋆⋆

1. On applique la méthode de négation du cours :

$$\boxed{f \text{ n'est pas bornée } \iff \forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ |f(x)| > M}$$

La fonction sinus est bornée : $|\sin x| \leqslant 1$ pour tout réel x, donc $M = 1$ convient. La fonction identité ne l'est pas : pour tout réel M, le réel $x = |M| + 1$ vérifie $|x| = |M| + 1 > M$.

2. Pour tout réel x, le réel $M = |f(x)|$ convient. L'assertion est donc vraie pour toute fonction.

$$\boxed{\text{Toutes les fonctions de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ vérifient cette assertion.}}$$

C'est le cas typique où l'échange des quantificateurs vide l'assertion de son contenu : M peut maintenant dépendre de x, et la valeur $|f(x)|$ elle-même convient.

3. Si $|f(x)| \leqslant M$ pour tout x, alors $-M \leqslant f(x) \leqslant M$: le couple $(a, b) = (-M, M)$ convient. Réciproquement, si $a \leqslant f(x) \leqslant b$ pour tout x, posons $M = \max(|a|, |b|)$. Alors $-M \leqslant -|a| \leqslant a \leqslant f(x) \leqslant b \leqslant |b| \leqslant M$, donc $|f(x)| \leqslant M$.

$$\boxed{f \text{ bornée } \iff f \text{ est minorée et majorée.}}$$

4. Si $|f| \leqslant M$, alors $-2M \leqslant f(x) - f(y) \leqslant 2M$ pour tous x, y : $(a, b) = (-2M, 2M)$ convient. Réciproquement, supposons la condition vérifiée, et choisissons $y = 0$: pour tout x, $a + f(0) \leqslant f(x) \leqslant b + f(0)$. La question 3 permet de conclure.

$$\boxed{f \text{ bornée } \iff \text{les écarts } f(x) - f(y) \text{ sont bornés.}}$$

À retenir : dans le sens réciproque, il suffisait de *fixer* la variable y : une assertion universelle peut toujours être spécialisée, et choisir la bonne valeur est souvent toute la démonstration.

EXERCICE 9 ⋆⋆⋆

1. Supposons (L) et fixons un réel $\delta_0 > 0$ qui convient. Soit $\varepsilon > 0$. Le réel $\delta = \delta_0$ convient alors dans (C) : pour tout réel x tel que $|x| < \delta_0$, l'assertion (L) appliquée à ce ε donne $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$.

$$\boxed{(L) \Longrightarrow (C)}$$

C'est un cas particulier de la proposition 3 du cours : « $\exists\delta\ \forall\varepsilon$ » entraîne « $\forall\varepsilon\ \exists\delta$ ».

2. Montrons que (L) équivaut à l'existence d'un intervalle $]-\delta\,,\delta[$ sur lequel f est constante.

$$\boxed{(L) \Longleftrightarrow \exists\delta > 0,\ \forall x \in\,]-\delta\,,\delta[,\ f(x) = f(0)}$$

Si (L) est vraie avec un certain δ, alors pour $|x| < \delta$, le réel $|f(x) - f(0)|$ est inférieur à tout $\varepsilon > 0$, donc il est nul d'après la question 4 de l'exercice 11. Réciproquement, si $f(x) = f(0)$ sur $]-\delta\,,\delta[$, alors $|f(x) - f(0)| = 0 < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

La fonction $x \mapsto x$ vérifie (C) : pour $\varepsilon > 0$, le réel $\delta = \varepsilon$ convient. Elle ne vérifie pas (L), puisqu'elle n'est constante sur aucun intervalle $]-\delta\,,\delta[$.

$$\boxed{x \mapsto x \text{ vérifie } (C) \text{ mais pas } (L).}$$

3. Montrons que (M) équivaut au fait que f soit bornée sur chaque intervalle $]-\delta\,,\delta[$.

$$\boxed{(M) \Longleftrightarrow \forall\delta > 0,\ f \text{ est bornée sur }]-\delta\,,\delta[}$$

Si (M) est vraie, soit $\delta > 0$ et ε le réel associé ; pour $|x| < \delta$, on a $|f(x)| \leqslant |f(0)| + |f(x) - f(0)| < |f(0)| + \varepsilon$. Réciproquement, si $|f(x)| \leqslant K$ sur $]-\delta\,,\delta[$, le réel $\varepsilon = K + |f(0)| + 1$ convient, puisque $|f(x) - f(0)| \leqslant K + |f(0)| < \varepsilon$.

La fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ ne vérifie pas (M) : elle n'est bornée sur aucun intervalle $]-\delta\,,\delta[$, puisque $f(\frac{1}{n}) = n$ et que $\frac{1}{n} < \delta$ pour n assez grand.

$$\boxed{x \mapsto \tfrac{1}{x} \text{ (prolongée par 0 en 0) ne vérifie pas } (M).}$$

4. Aucune des deux assertions n'entraîne l'autre.

- La fonction définie par $g(x) = \frac{1}{x-1}$ pour $x \neq 1$ et $g(1) = 0$ vérifie (C) : pour $|x| < \frac{1}{2}$, on a $|x-1| \geqslant \frac{1}{2}$, donc $|g(x) - g(0)| = \frac{|x|}{|x-1|} \leqslant 2|x|$, et $\delta = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ convient. Elle ne vérifie pas (M), n'étant pas bornée sur $]-2\,,2[$ au voisinage de 1.
- La fonction h qui vaut 1 sur $]0\,,+\infty[$ et 0 sur $]-\infty\,,0]$ vérifie (M), puisqu'elle est bornée. Elle ne vérifie pas (C) : pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et tout $\delta > 0$, le réel $x = \frac{\delta}{2}$ donne $|h(x) - h(0)| = 1 \geqslant \varepsilon$.

$$\boxed{(C) \text{ et } (M) \text{ ne sont pas comparables.}}$$

À retenir : déplacer un seul quantificateur change complètement le sens d'une définition. Au chapitre 8, la continuité uniforme ne différera de la continuité que par la place d'un quantificateur, exactement comme ici.

EXERCICE 10 ⋆⋆⋆

1. Une suite est pseudo-croissante si chacun de ses termes est dépassé, au sens large, par tous les termes à partir d'un certain rang, ce rang pouvant dépendre du terme considéré. Si (u_n) est croissante et $n \in \mathbb{N}$, le rang $M = n$ convient : $m \geqslant n \Rightarrow u_m \geqslant u_n$.

$$\boxed{\text{Toute suite croissante est pseudo-croissante.}}$$

2. Soit (u_n) et (v_n) pseudo-croissantes, et $n \in \mathbb{N}$. On dispose de rangs M_1 et M_2 tels que $u_m \geqslant u_n$ pour $m \geqslant M_1$ et $v_m \geqslant v_n$ pour $m \geqslant M_2$. Posons $M = \max(M_1, M_2)$: pour $m \geqslant M$, les deux inégalités sont vraies et s'additionnent.

$$\boxed{u_m + v_m \geqslant u_n + v_n \text{ pour tout } m \geqslant \max(M_1, M_2).}$$

3. La négation de la définition est $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall M \in \mathbb{N},\ \exists m \geqslant M,\ u_m < u_n$. Prenons $n = 0$, de sorte que $u_n = 1$. Pour tout M, l'entier impair $m = 2M + 1 \geqslant M$ vérifie $u_m = -1 < 1$.

$$\boxed{((-1)^n) \text{ n'est pas pseudo-croissante.}}$$

4. Posons $u_n = n + (-1)^n$. Elle n'est pas croissante : $u_0 = 1 > 0 = u_1$. Elle est pseudo-croissante : pour tout n, on a $u_n \leqslant n + 1$, et pour $m \geqslant n + 2$, on a $u_m \geqslant m - 1 \geqslant n + 1 \geqslant u_n$. Le rang $M = n + 2$ convient.

$$\boxed{\text{La suite } \left(n + (-1)^n\right) \text{ est pseudo-croissante sans être croissante.}}$$

5. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Il existe M_1 tel que $u_n \geqslant u_k$ pour $n \geqslant M_1$, et M_2 tel que $u_n \leqslant u_k$ pour $n \geqslant M_2$. Avec $N = \max(M_1, M_2)$, on a $u_n = u_k$ pour tout $n \geqslant N$.

5. (b) Soit k et j deux entiers. La question (a) fournit N_k et N_j ; pour $n = \max(N_k, N_j)$, on obtient $u_k = u_n = u_j$.

$$\boxed{\text{Une suite pseudo-croissante et pseudo-décroissante est constante.}}$$

À retenir : la technique du « max des rangs », employée trois fois ici, est omniprésente en analyse : deux propriétés vraies à partir d'un certain rang sont simultanément vraies à partir du plus grand des deux rangs. Elle servira constamment au chapitre 7 sur les suites.

Modes de raisonnement

EXERCICE 11 ⋆

1. On démontre la contraposée : si n est impair, alors 8 divise $n^2 - 1$. Écrivons $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$:

$$n^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)$$

Des deux entiers consécutifs k et $k + 1$, l'un est pair, donc $k(k + 1)$ est pair et $4k(k + 1)$ est divisible par 8.

$$\boxed{n \text{ impair} \Rightarrow 8 \mid n^2 - 1, \text{ ce qui est la contraposée demandée.}}$$

2. Les réels $\ln 2$ et $\ln 3$ sont strictement positifs. Supposons par l'absurde que $\frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{p}{q}$ avec p, q entiers naturels non nuls. Alors $q \ln 2 = p \ln 3$, soit $\ln(2^q) = \ln(3^p)$, et donc $2^q = 3^p$ puisque ln est strictement croissante. Or 2^q est pair car $q \geqslant 1$, tandis que 3^p est impair : contradiction.

$$\boxed{\frac{\ln 2}{\ln 3} \text{ est irrationnel.}}$$

Piège : il faut justifier que l'on peut prendre p et q positifs ; c'est le signe du quotient qui le permet.

3. Supposons par l'absurde que $a_k < \frac{1}{5}$ pour tout k. En additionnant ces cinq inégalités strictes, on obtient $a_1 + \cdots + a_5 < 1$, ce qui contredit l'hypothèse.

$$\boxed{\text{L'un des } a_k \text{ est supérieur ou égal à } \tfrac{1}{5}.}$$

C'est une version du principe des tiroirs : une quantité répartie en cinq parts en possède au moins une qui atteint la moyenne.

4. Raisonnons par contraposition : si $x \neq 0$, le réel $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$ est strictement positif et vérifie $|x| > \varepsilon$. Ainsi l'hypothèse « $|x| \leqslant \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ » est fausse.

$$\boxed{x = 0}$$

Ce résultat est l'outil standard pour démontrer une égalité en analyse : on montre que $|a - b|$ est plus petit que tout réel strictement positif. C'est lui qui sert à la question 2 de l'exercice 9.

5. Supposons par l'absurde que $r+x$ soit un rationnel s. Alors $x = s - r$ est une différence de rationnels, donc un rationnel : contradiction. De même, si $r \neq 0$ et si rx est un rationnel s, alors $x = \frac{s}{r}$ est rationnel : contradiction.

$$\boxed{r+x \text{ est irrationnel, et } rx \text{ aussi lorsque } r \neq 0.}$$

La somme et le produit de deux irrationnels ne sont pas toujours irrationnels. Le réel $\sqrt{2}$ est irrationnel (théorème 1 du cours), donc $-\sqrt{2}$ aussi d'après ce qui précède avec $r = -1$; or $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ et $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ sont rationnels.

$$\boxed{\text{Non dans les deux cas : } \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \text{ et } \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2.}$$

Ils peuvent aussi l'être : $\sqrt{2}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ est irrationnel. L'hypothèse $r \neq 0$ était indispensable, puisque $0 \times x = 0$.

EXERCICE 12 ⋆

1. Pour $x = 0$, l'inégalité $0^2 > 0$ est fausse.

$$\boxed{x = 0}$$

2. Pour $a = 1$ et $b = -1$, on a $|a+b| = 0$ alors que $|a| + |b| = 2$.

$$\boxed{(a,b) = (1,-1)}$$

3. L'entier 12 est divisible par 4 et par 6, mais pas par 24.

$$\boxed{12}$$

Le bon énoncé fait intervenir le PPCM : un entier divisible par 4 et par 6 est divisible par $\text{ppcm}(4,6) = 12$, et pas davantage. On le verra au chapitre 12.

4. Pour $n = 40$:

$$40^2 + 40 + 41 = 1\,681 = 41^2$$

qui n'est pas premier.

$$\boxed{n = 40}$$

Pour $n = 0, 1, \ldots, 39$, l'entier n^2+n+41 est premier : il faut donc tester 41 valeurs avant de trouver le premier contre-exemple. On pouvait pourtant le trouver sans calcul, en remarquant que pour $n = 41$ les trois termes 41^2, 41 et 41 sont divisibles par 41.

À retenir : vérifier une affirmation sur quarante cas ne prouve rien. Une affirmation universelle se démontre ; un seul contre-exemple suffit à la réfuter, et le chercher par la réflexion est souvent plus efficace que par le calcul.

5. Soit f la fonction égale à 1 sur $]-\infty\,,0[$ et à 0 sur $[0\,,+\infty[$. Elle est constante, donc croissante, sur chacun des deux intervalles, mais $f(-1) = 1 > 0 = f(0)$.

$$\boxed{f = 1 \text{ sur }]-\infty\,,0[\text{ et } f = 0 \text{ sur } [0\,,+\infty[}$$

Avec $]-\infty\,,0]$, le résultat devient vrai. Soit $x < y$ deux réels. Si x et y sont dans un même intervalle, on conclut directement. Sinon, $x < 0 < y$, et l'on passe par le point commun 0 : $f(x) \leqslant f(0)$ par croissance sur $]-\infty\,,0]$, puis $f(0) \leqslant f(y)$ par croissance sur $[0\,,+\infty[$.

$$\boxed{\text{Oui : le point commun 0 sert de relais entre les deux intervalles.}}$$

EXERCICE 13 ⋆

1. Raisonnement par l'absurde : on suppose le contraire de ce que l'on veut établir (« supposons que l'ensemble… soit fini ») et l'on aboutit à « c'est impossible ». C'est la structure de la démonstration d'Euclide de l'infinitude des nombres premiers.

2. Raisonnement par contraposée : pour montrer « la série converge $\Rightarrow u_n \to 0$ », on montre « $u_n \not\to 0 \Rightarrow$ la série diverge ». Le mot « Ainsi » final reformule le résultat sous sa forme directe.

3. Disjonction de cas : le cas $p = 2$ est traité à part, puis « on peut donc supposer » annonce le cas restant, p impair.

4. Analyse-synthèse : on suppose l'objet trouvé, on en déduit sa seule forme possible (« nécessairement »), puis « Réciproquement » ouvre la synthèse. L'analyse établit l'unicité de la décomposition, la synthèse son existence.

5. Raisonnement par récurrence sur la dimension : initialisation pour $n = 1$, puis « supposons le résultat établi » au rang $n-1$ pour l'établir au rang n.

6. Double implication : une équivalence est démontrée en deux sens, signalés par « Si… alors » puis « Inversement ».

À retenir : une démonstration bien rédigée annonce son mode de raisonnement dès sa première phrase. Le lecteur sait alors ce qui est supposé, ce qui est visé, et peut suivre sans se perdre : c'est cette discipline qu'il faut adopter dans les copies.

EXERCICE 14 ⋆

1. Supposons la conjecture forte vraie, et soit $n \geqslant 7$ un entier impair. L'entier $n-3$ est pair et supérieur ou égal à 4 : d'après la conjecture forte, il s'écrit $n-3 = p+q$ avec p et q premiers. Alors $n = 3+p+q$ est somme de trois nombres premiers.

$$\boxed{\text{Goldbach forte} \Rightarrow \text{Goldbach faible.}}$$

2. Savoir que la conclusion d'une implication est vraie ne renseigne en rien sur son hypothèse : l'implication « forte $\Rightarrow$ faible » est vraie aussi bien si la conjecture forte est vraie que si elle est fausse.

$$\boxed{\text{On ne peut rien en déduire sur la conjecture forte.}}$$

Piège : conclure que la conjecture forte est vraie serait confondre une implication et sa réciproque, comme dans la tâche de Wason de l'exercice 2. La conjecture de Goldbach forte, énoncée en 1742, reste ouverte ; la démonstration de Helfgott de la conjecture faible, annoncée en 2013, est en cours de relecture en vue de sa publication définitive.

EXERCICE 15 ⋆⋆

1. Il suffit de montrer que $N = n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 2 et par 3 : comme 2 et 3 sont premiers entre eux, N sera alors divisible par 6 (lemme de Gauss, vu en mathématiques expertes). Parmi n et $n+1$, l'un est pair, donc $2 \mid N$. Pour la divisibilité par 3, on distingue les trois restes possibles de n modulo 3 :

- si $n \equiv 0\ [3]$, alors $3 \mid n$;
- si $n \equiv 1\ [3]$, alors $2n+1 \equiv 3 \equiv 0\ [3]$;
- si $n \equiv 2\ [3]$, alors $n+1 \equiv 0\ [3]$.

$$\boxed{6 \mid n(n+1)(2n+1) \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}}$$

Cette divisibilité n'est pas un hasard : le chapitre 3 établira que $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ est la somme $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

2. Les valeurs absolues changent d'expression en -1 et en $\frac{3}{2}$, ce qui conduit à trois cas, qui recouvrent $\mathbb{R}$.

- Si $x \leqslant -1$: l'inéquation s'écrit $-(x+1)-(3-2x) \geqslant 1$, soit $x-4 \geqslant 1$, c'est-à-dire $x \geqslant 5$; aucune solution dans ce cas.
- Si $-1 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}$: elle s'écrit $(x+1)-(3-2x) \geqslant 1$, soit $3x \geqslant 3$; solutions $\left[1\,,\frac{3}{2}\right]$.
- Si $x \geqslant \frac{3}{2}$: elle s'écrit $(x+1)-(2x-3) \geqslant 1$, soit $x \leqslant 3$; solutions $\left[\frac{3}{2}\,,3\right]$.

$$\boxed{S = [1\,,3]}$$

Vérification aux bornes : $|2| - |-1| = 1$ et $|4| - |3| = 1$. ✓

3. Si $x \geqslant y$, alors $|x-y| = x - y$ et $\frac{x+y+(x-y)}{2} = x = \max(x,y)$; si $x < y$, alors $|x-y| = y - x$ et l'on obtient y. En remplaçant $+|x-y|$ par $-|x-y|$, le même calcul donne le minimum :

$$\boxed{\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}} \qquad \boxed{\min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}}$$

Pour trois réels, on utilise $\max(x,y,z) = \max\big(\max(x,y),z\big)$. En notant $m = \max(x,y)$, on obtient $\frac{m+z+|m-z|}{2}$, puis en remplaçant m :

$$\boxed{\max(x,y,z) = \frac{x+y+2z+|x-y|+\big|x+y-2z+|x-y|\big|}{4}}$$

Cette formule a été contrôlée numériquement sur de nombreux triplets. Elle n'est pas symétrique en apparence, alors que $\max(x,y,z)$ l'est : il en existe donc d'autres écritures, obtenues en regroupant différemment.

EXERCICE 16 ⋆⋆

1. *(ii) ⇒ (i).* Soit $A \in \mathbb{R}$; (ii) fournit n tel que $u_n > A$, donc $u_n \geqslant A$.
(i) ⇒ (ii). Soit $A \in \mathbb{R}$. On applique (i) au réel $A+1$: il existe n tel que $u_n \geqslant A+1 > A$.

$$\boxed{\text{(i)} \iff \text{(ii)} : \text{ ces deux assertions traduisent que } (u_n) \text{ n'est pas majorée.}}$$

Le procédé est à retenir : pour passer d'une inégalité large à une inégalité stricte, on applique l'hypothèse universelle à une valeur légèrement décalée.

2. *Sens direct.* Supposons f strictement croissante et soit a, b deux réels. Si $a \leqslant b$, alors soit $a = b$ et $f(a) = f(b)$, soit $a < b$ et $f(a) < f(b)$; dans les deux cas, $f(a) \leqslant f(b)$. Réciproquement, montrons $f(a) \leqslant f(b) \Rightarrow a \leqslant b$ par contraposée : si $a > b$, alors $f(a) > f(b)$.

Sens réciproque. Supposons la condition vérifiée et soit $x < y$. Comme $x \leqslant y$, on a $f(x) \leqslant f(y)$. Si l'on avait $f(x) = f(y)$, alors $f(y) \leqslant f(x)$, et la condition appliquée à $(a,b) = (y,x)$ donnerait $y \leqslant x$: c'est faux. Donc $f(x) < f(y)$.

$$\boxed{f \text{ strictement croissante} \iff \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a \leqslant b \Leftrightarrow f(a) \leqslant f(b))}$$

Une fonction strictement croissante est donc exactement une fonction qui « préserve et reflète » l'ordre : on peut appliquer f aux deux membres d'une inégalité, mais aussi la « retirer ». C'est ce que l'on fait, sans le dire, en résolvant $\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^2$.

3. *Sens réciproque.* Supposons $b \geqslant 0$ et $a+b \geqslant 0$. Pour tout $x \in]0\,,1[$,

$$ax + b = (1-x)\,b + x\,(a+b) \geqslant 0,$$

comme somme de deux produits de réels positifs.

Sens direct, par contraposée. Supposons d'abord $b < 0$. Si $a \leqslant 0$, alors $ax + b \leqslant b < 0$ pour tout $x \in]0\,,1[$, par exemple pour $x = \frac{1}{2}$. Si $a > 0$, le réel $x = \min\left(\frac{1}{2}\,, -\frac{b}{2a}\right)$ appartient à $]0\,,1[$ et vérifie $ax \leqslant -\frac{b}{2}$, donc $ax + b \leqslant \frac{b}{2} < 0$. Supposons maintenant $a + b < 0$. En posant $t = 1 - x$, qui parcourt aussi $]0\,,1[$, on a $ax + b = (-a)\,t + (a+b)$: c'est une expression de la même forme, de coefficients $a' = -a$ et $b' = a + b < 0$, et le cas précédent fournit un t qui la rend strictement négative.

$$\boxed{\big(\forall x \in]0\,,1[,\ ax + b \geqslant 0\big) \iff \big(b \geqslant 0 \text{ et } a + b \geqslant 0\big)}$$

Graphiquement, le segment de droite d'équation $y = ax + b$ au-dessus de $]0\,,1[$ est au-dessus de l'axe des abscisses si et seulement si ses deux extrémités, d'ordonnées b et $a+b$, le sont. L'identité

$ax + b = (1 - x)b + x(a + b)$ exprime que chaque point du segment est un barycentre à coefficients positifs de ses extrémités.

EXERCICE 17 ⋆⋆

Chaque question se traite par analyse-synthèse : on remplace les variables par des valeurs bien choisies pour obtenir des conditions nécessaires, puis on vérifie les candidats.

1. *Analyse.* Soit f une solution. Avec $x = 0$, on obtient $f(y) = f(0) + y$ pour tout réel y : en notant $c = f(0)$, la fonction f est $y \mapsto y + c$.

Synthèse. Pour $f(x) = x + c$, on a $f(x + y) = x + y + c = f(x) + y$.

$$\boxed{\text{Les solutions sont les fonctions } x \mapsto x + c,\ c \in \mathbb{R}.}$$

L'analyse laisse ici un paramètre libre : la synthèse montre qu'il ne faut pas le fixer, toutes les valeurs convenant.

2. *Analyse.* Soit f une solution. Avec $x = y = 0$, on obtient $f(0)^2 - f(0) = 0$, donc $f(0) \in \{0\,, 1\}$. Si $f(0) = 0$, alors avec $y = 0$: $f(x)f(0) - f(0) = x$, soit $0 = x$ pour tout réel x, ce qui est absurde. Donc $f(0) = 1$, et avec $y = 0$: $f(x) - 1 = x$, c'est-à-dire $f(x) = x + 1$.

Synthèse. Pour $f(x) = x + 1$: $(x + 1)(y + 1) - (xy + 1) = x + y$.

$$\boxed{f(x) = x + 1}$$

3. *Analyse.* Soit f une solution et x un réel. En remplaçant x par $-x$, on obtient une seconde équation, et l'on dispose du système :

$$\begin{cases} f(x) + x\, f(-x) = 1 + x \\ f(-x) - x\, f(x) = 1 - x \end{cases}$$

On tire $f(-x) = 1 - x + xf(x)$ de la seconde et on l'injecte dans la première :

$$f(x) + x(1 - x) + x^2 f(x) = 1 + x, \qquad \text{soit} \qquad (1 + x^2)\, f(x) = 1 + x^2$$

Comme $1 + x^2 \neq 0$, on obtient $f(x) = 1$.

Synthèse. La fonction constante égale à 1 vérifie $1 + x \times 1 = 1 + x$.

$$\boxed{f = 1 \text{ est l'unique solution.}}$$

4. *Analyse.* Soit f une solution. Avec $y = f(x)$, on obtient $f(0) = 2 - x - f(x)$, donc $f(x) = 2 - x - f(0)$ pour tout réel x. En particulier, pour $x = 0$: $f(0) = 2 - f(0)$, d'où $f(0) = 1$ et $f(x) = 1 - x$.

Synthèse. Pour $f(x) = 1 - x$: $f(y - (1 - x)) = 1 - (y - 1 + x) = 2 - x - y$.

$$\boxed{f(x) = 1 - x}$$

À retenir : le choix des valeurs substituées est le cœur de l'analyse. On cherche à annuler un terme ($x = 0$, $y = 0$), à faire apparaître une valeur connue ($y = f(x)$ rend l'argument nul), ou à exploiter une symétrie ($x \to -x$). Et l'on n'oublie jamais la synthèse, comme le rappelle la dernière remarque de la section 1.4.5 du cours.

EXERCICE 18 ⋆⋆⋆

1. (a) *Analyse.* Soit f une solution. Avec $x = y = 0$, la relation $(*)$ donne $f(0) = f(0)^2 - f(0)^2 = 0$. Avec $x = 0$ et y quelconque, elle donne $y^2 + f(0) = f(y)^2 - f(0)f(y)$, c'est-à-dire

$$\boxed{f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall y \in \mathbb{R},\ f(y)^2 = y^2}$$

On en déduit que, pour chaque réel y, $f(y) = y$ ou $f(y) = -y$. On ne peut *pas* en conclure que $f = \mathrm{id}$ ou $f = -\mathrm{id}$: le choix du signe peut dépendre de y, comme pour la fonction valeur absolue, qui vérifie

aussi $f(y)^2 = y^2$. C'est l'erreur la plus répandue sur cet exercice, qui confond « $\forall y,\ (A(y)$ ou $B(y))$ » et « $(\forall y,\ A(y))$ ou $(\forall y,\ B(y))$ ».

1. (b) Avec $y = x$, la relation $(*)$ donne $x\,f(x) + x^2 + f(x^2) = f(2x)^2 - f(x)^2 = 4x^2 - x^2$, d'après (a). Ainsi

$$x\,f(x) + f(x^2) = 2x^2.$$

Or $|x\,f(x)| = x^2$ et $|f(x^2)| = x^2$, d'après (a). La somme de deux réels inférieurs ou égaux à x^2 ne peut valoir $2x^2$ que s'ils valent tous deux x^2. Donc $x\,f(x) = x^2$, et pour $x \neq 0$, $f(x) = x$; enfin $f(0) = 0$.

1. (c) *Synthèse.* Pour $f = \mathrm{id}$, le membre de gauche vaut x^2+y^2+xy et celui de droite $(x+y)^2-xy = x^2 + xy + y^2$.

$$\boxed{\text{L'unique solution de } (*) \text{ est l'identité de } \mathbb{R}.}$$

2. *Analyse.* Soit f une solution. Avec $x = 0$, on obtient $f(0) = f(0) + f(y)$, donc $f(y) = 0$ pour tout réel y. *Synthèse.* La fonction nulle convient.

$$\boxed{\text{La seule solution est la fonction nulle.}}$$

Le logarithme népérien vérifie bien $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, mais seulement pour x, y strictement positifs : c'est la présence de 0 dans le domaine qui tue toutes les solutions non nulles. Le domaine fait partie de l'énoncé d'une équation fonctionnelle.

3. Pour tout n, l'inégalité s'écrit $x^n(x^2 - x - 1) \leqslant 0$. Le trinôme $x^2 - x - 1$ a pour racines $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}618$ et $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$; il est négatif ou nul exactement sur $[\psi\,,\varphi]$.

Analyse. Soit x une solution. Pour $n = 0$, on obtient $x^2 - x - 1 \leqslant 0$, donc $x \in [\psi\,,\varphi]$. Si de plus $x < 0$, alors pour $n = 1$, l'inégalité $x(x^2 - x - 1) \leqslant 0$ impose $x^2 - x - 1 \geqslant 0$; avec la condition précédente, $x^2 - x - 1 = 0$, donc $x = \psi$.

Synthèse. Si $x \in [0\,,\varphi]$, alors $x^n \geqslant 0$ et $x^2 - x - 1 \leqslant 0$, d'où le résultat pour tout n. Si $x = \psi$, alors $x^n(x^2 - x - 1) = 0$ pour tout n.

$$\boxed{\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\} \cup \left[0\,,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]}$$

Le point isolé ψ est le piège de l'exercice : sur les négatifs, le signe de x^n alterne, et seule une racine du trinôme survit à cette alternance. Le nombre φ est le nombre d'or, que l'on retrouvera dans l'exercice 23 sur la suite de Fibonacci.

EXERCICE 19 ⋆⋆

1. (a) Si l'on suppose seulement $S_n \leqslant 2$, on obtient $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 2 + \frac{1}{(n+1)^2}$, ce qui ne permet pas de conclure $S_{n+1} \leqslant 2$.

$$\boxed{\text{L'hypothèse } S_n \leqslant 2 \text{ ne laisse aucune marge pour absorber le terme ajouté.}}$$

1. (b) On renforce l'énoncé en se ménageant une marge : montrons par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$P(n) : \quad S_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$$

Initialisation. $S_1 = 1 = 2 - \frac{1}{1}$, donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geqslant 1$ tel que $P(n)$ soit vraie. Alors $S_{n+1} \leqslant 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$, et il suffit de vérifier que ce majorant est inférieur à $2 - \frac{1}{n+1}$:

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \quad \Longleftrightarrow \quad n(n+1) \leqslant (n+1)^2,$$

ce qui est vrai. Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Pour tout $n \geqslant 1$: $S_n \leqslant 2 - \frac{1}{n} < 2$.

$$\boxed{S_n \leqslant 2 - \frac{1}{n} < 2 \text{ pour tout } n \geqslant 1}$$

À retenir : il est parfois plus facile de démontrer un énoncé plus fort, parce que l'hypothèse de récurrence est elle aussi plus forte. L'idée de la marge $\frac{1}{n}$ vient de la majoration $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, qui rend la somme télescopique (chapitre 3). La suite (S_n), croissante et majorée, converge (chapitre 7) ; on verra au chapitre 20 que sa limite vaut $\frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}645$.

2. Les premiers termes sont :

$$\boxed{u_0 = 1,\ u_1 = 1,\ u_2 = 3,\ u_3 = 5,\ u_4 = 11,\ u_5 = 21,\ u_6 = 43}$$

On détermine α et β à l'aide des deux premiers termes : $\alpha + \beta = 1$ et $2\alpha - \beta = 1$, d'où $\alpha = \frac{2}{3}$ et $\beta = \frac{1}{3}$. On conjecture donc

$$\boxed{u_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}}$$

ce que confirment les valeurs $u_2 = \frac{8+1}{3} = 3$ et $u_3 = \frac{16-1}{3} = 5$. ✓

Démontrons-le par récurrence double. La formule est vraie aux rangs 0 et 1 par construction. Si elle est vraie aux rangs n et $n+1$, alors

$$u_{n+2} = \frac{2^{n+2} + (-1)^{n+1}}{3} + 2 \times \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3} = \frac{2^{n+3} + (-1)^n (-1+2)}{3} = \frac{2^{n+3} + (-1)^{n+2}}{3}.$$

Comme dans l'exemple du cours, 2 et -1 sont les racines de l'équation $r^2 = r + 2$ associée à la relation de récurrence, ce que le chapitre 7 expliquera.

3. *Existence*, par récurrence forte. L'entier $1 = 2^0$ convient. Soit $n \geqslant 1$ tel que tout entier de $[\![1\,;n]\!]$ s'écrive comme somme de puissances de 2 distinctes. L'ensemble des entiers k tels que $2^k > n+1$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ (elle contient $n+1$), donc possède un plus petit élément k_0, d'après la proposition 4 du cours ; comme $2^0 \leqslant n+1$, on a $k_0 \geqslant 1$, et $m = k_0 - 1$ vérifie $2^m \leqslant n+1 < 2^{m+1}$.

- Si $n+1 = 2^m$, l'écriture est trouvée.
- Sinon, $r = n+1-2^m$ vérifie $1 \leqslant r < 2^m$, et en particulier $r \leqslant n$. Par hypothèse, r est une somme de puissances de 2 distinctes, toutes inférieures à $r < 2^m$, donc différentes de 2^m ; il suffit d'y ajouter 2^m.

Unicité. On utilise la somme géométrique $1+2+\cdots+2^{M-1} = 2^M - 1 < 2^M$. Supposons qu'un entier admette deux écritures différentes ; en retirant les puissances communes, on obtient deux ensembles d'exposants S et T disjoints, non tous deux vides, de même somme $\sum_{j\in S} 2^j = \sum_{j\in T} 2^j$. Aucun des deux ne peut être vide, car l'autre aurait une somme nulle. Soit M le plus grand élément de $S \cup T$, par exemple dans S. Les éléments de T sont alors des entiers distincts strictement inférieurs à M, donc $\sum_{j\in T} 2^j \leqslant 2^M - 1 < 2^M \leqslant \sum_{j\in S} 2^j$: contradiction.

$$\boxed{\text{Tout entier } n \geqslant 1 \text{ s'écrit de façon unique comme somme de puissances de 2 distinctes.}}$$

C'est l'écriture de n en base 2, utilisée par tous les ordinateurs. Elle servira à l'exercice 48.

EXERCICE 20 ⋆⋆

1. L'argument suppose que D et D' ont au moins deux points communs distincts, car deux points distincts déterminent une droite. Les points communs annoncés sont M_2, …, M_n.

- Pour $n = 1$, cette liste est vide : D et D' n'ont aucun point commun garanti.
- Pour $n = 2$, elle se réduit à M_2 : un seul point ne détermine pas une droite, et D et D' peuvent être distinctes.

$$\boxed{\text{L'argument d'hérédité est incorrect pour } n = 1 \text{ et } n = 2.}$$

Les deux cas ne sont pas de même nature. Pour $n = 1$, l'implication $P(1) \Rightarrow P(2)$ est *vraie*, puisque deux points sont toujours alignés : elle est seulement mal démontrée. Pour $n = 2$, l'implication $P(2) \Rightarrow P(3)$ est *fausse*, puisque $P(2)$ est vraie et $P(3)$ fausse : c'est là que la démonstration s'effondre.

$$\boxed{P(2) \Rightarrow P(3) \text{ est fausse : c'est le maillon manquant.}}$$

À retenir : pour $n \geqslant 3$, l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie, mais pour une raison inattendue : son hypothèse $P(n)$ est fausse. Une hérédité vraie ne garantit donc rien tant que la chaîne n'est pas complète depuis l'initialisation ; c'est la même leçon que l'exemple $10^n + 1$ du cours, vue sous un autre angle. Signalons enfin que l'argument suppose aussi les points M_2, …, M_n non tous confondus.

2. Pour $n = 0$, le calcul fait intervenir $2^{n-1} = 2^{-1}$, c'est-à-dire l'entier $k = -1$, qui n'appartient pas à $[\![0\,;n]\!] = \{0\}$: l'hypothèse de récurrence ne dit rien de 2^{-1}, qui vaut d'ailleurs $\frac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Le passage de } P(0) \text{ à } P(1) \text{ n'est pas justifié, et il est faux : } 2^1 = 2.}$$

Pour $n \geqslant 1$, le calcul est correct, mais l'hypothèse est fausse : on retrouve la situation de la question précédente.

EXERCICE 21 ⋆⋆

1. Par récurrence sur n. Pour $n = 0$, $(3+2\sqrt{2})^0 = 1+0\sqrt{2}$: $a_0 = 1$, $b_0 = 0$. Si $(3+2\sqrt{2})^n = a_n+b_n\sqrt{2}$ avec a_n, b_n entiers naturels, alors

$$(3 + 2\sqrt{2})^{n+1} = (a_n + b_n\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) = (3a_n + 4b_n) + (2a_n + 3b_n)\sqrt{2}.$$

$$\boxed{a_{n+1} = 3a_n + 4b_n \qquad b_{n+1} = 2a_n + 3b_n}$$

sont bien des entiers naturels.

2. On démontre de même, par récurrence, que $(3 - 2\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$: c'est vrai pour $n = 0$, et si c'est vrai au rang n, alors $(a_n - b_n\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = (3a_n + 4b_n) - (2a_n + 3b_n)\sqrt{2} = a_{n+1} - b_{n+1}\sqrt{2}$, avec les mêmes relations de récurrence.

3. En multipliant les deux égalités, et comme $(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = 9 - 8 = 1$:

$$a_n^2 - 2b_n^2 = (a_n + b_n\sqrt{2})(a_n - b_n\sqrt{2}) = 1^n = 1.$$

Il reste à voir que ces couples sont deux à deux distincts. Par récurrence, $a_n \geqslant 1$ pour tout n, donc $a_{n+1} \geqslant 3a_n > a_n$: la suite (a_n) est strictement croissante.

$$\boxed{(1,0),\ (3,2),\ (17,12),\ (99,70),\ \ldots \text{ sont des solutions de } x^2 - 2y^2 = 1, \text{ en nombre infini.}}$$

Vérification : $17^2 - 2 \times 12^2 = 289 - 288 = 1$. ✓ On remarquera que $\frac{17}{12} \approx 1{,}4167$ et $\frac{99}{70} \approx 1{,}41429$ approchent $\sqrt{2} \approx 1{,}41421$: comme $\frac{a_n}{b_n} - \sqrt{2} = \frac{1}{b_n(a_n+b_n\sqrt{2})}$, ces fractions en sont des approximations remarquablement précises. On montre en arithmétique que ce sont *toutes* les solutions dans $\mathbb{N}^2$.

EXERCICE 22 ⋆⋆

1. Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ l'assertion $P(n)$: « on peut déplacer une pile de n disques d'un piquet à n'importe quel autre, en respectant les règles ». Il est commode de l'énoncer pour deux piquets quelconques, et de remarquer qu'on peut ignorer des disques plus grands posés sous la pile, puisque tout disque peut être posé sur eux.

Initialisation : Un seul disque se déplace en un coup.

Hérédité : Supposons $P(n)$ et considérons une pile de $n+1$ disques sur le piquet i, à déplacer vers le piquet j, le troisième piquet étant k. On déplace les n disques supérieurs de i vers k, ce qui est possible par $P(n)$, le grand disque restant immobile sous eux ; on déplace le grand disque de i vers j ; puis on déplace les n disques de k vers j, à nouveau par $P(n)$, sur le grand disque.

Conclusion : Le jeu peut être résolu pour tout $n \geqslant 1$.

2. Notons m_n le nombre minimal de coups pour déplacer n disques d'un piquet à un autre. La stratégie précédente utilise $2m_n + 1$ coups pour $n+1$ disques, donc $m_{n+1} \leqslant 2m_n + 1$. Inversement, dans toute solution pour $n+1$ disques, considérons le premier déplacement du grand disque, de i vers j. À ce moment, aucun disque n'est au-dessus de lui sur i ni sur j : les n petits disques sont tous sur le troisième piquet, et il a fallu au moins m_n coups pour les y amener. Après le dernier déplacement du grand disque, il faut encore au moins m_n coups pour reposer les n petits disques sur lui. D'où $m_{n+1} \geqslant m_n + 1 + m_n$, et finalement $m_{n+1} = 2m_n + 1$, avec $m_1 = 1$. On vérifie alors par récurrence que $m_n = 2^n - 1$: c'est vrai pour $n = 1$, et $2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$.

$$\boxed{\text{Le nombre minimal de coups est } 2^n - 1.}$$

Pour $n = 3$, il faut 7 coups, et pour $n = 64$, la légende qui accompagne le jeu imagine des moines déplaçant un disque par seconde : il leur faudrait $2^{64} - 1 \approx 1{,}8 \times 10^{19}$ secondes, soit plus de 500 milliards d'années.

EXERCICE 23 ⋆⋆

1. On calcule de proche en proche :

$$\boxed{1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55}$$

2. Notons p_n le nombre de pavages d'un rectangle $2 \times n$. Dans un pavage, la première colonne est couverte soit par un domino vertical, et le reste est un pavage d'un rectangle $2 \times (n-1)$; soit par deux dominos horizontaux superposés, qui couvrent les deux premières colonnes, et le reste est un pavage d'un rectangle $2 \times (n-2)$. Ces deux cas s'excluent, d'où $p_n = p_{n-1} + p_{n-2}$ pour $n \geqslant 3$. Comme $p_1 = 1 = F_2$ et $p_2 = 2 = F_3$ (deux dominos verticaux, ou deux horizontaux), une récurrence double donne

$$\boxed{p_n = F_{n+1} \text{ pour tout } n \geqslant 1.}$$

3. Fixons $n \geqslant 2$ et raisonnons par récurrence double sur m. Pour $m = 1$: $F_{n-1}F_1 + F_nF_2 = F_{n-1} + F_n = F_{n+1}$. Pour $m = 2$: $F_{n-1}F_2 + F_nF_3 = F_{n-1} + 2F_n = F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$. Si la formule est vraie aux rangs m et $m+1$, on les additionne :

$$F_{n+m} + F_{n+m+1} = F_{n-1}(F_m + F_{m+1}) + F_n(F_{m+1} + F_{m+2}), \quad \text{soit} \quad F_{n+m+2} = F_{n-1}F_{m+2} + F_nF_{m+3}.$$

$$\boxed{F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}}$$

La question 2 en donne aussi une preuve sans calcul. Un pavage d'un rectangle $2 \times (n+m-1)$, il y en a F_{n+m}, est soit coupé verticalement entre les colonnes $n-1$ et n, et il se compose alors d'un pavage $2 \times (n-1)$ et d'un pavage $2 \times m$, soit traversé à cet endroit par deux dominos horizontaux superposés, qui couvrent les colonnes $n-1$ et n et laissent un pavage $2 \times (n-2)$ et un pavage $2 \times (m-1)$. On obtient $F_nF_{m+1} + F_{n-1}F_m$ pavages.

4. Par récurrence sur $n \geqslant 2$. Pour $n = 2$: $F_2^2 = 1$ et $F_1F_3 + (-1)^3 = 2 - 1 = 1$. Si la formule est vraie au rang n, alors

$$\begin{aligned} F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2} &= F_{n+1}^2 - F_n(F_{n+1} + F_n) = F_{n+1}(F_{n+1} - F_n) - F_n^2 \\ &= F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = -(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2}. \end{aligned}$$

$$\boxed{F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n+1}}$$

C'est l'*identité de Cassini*. Pour $n = 6$: $64 = 5 \times 13 - 1$. ✓

5. Notons $T_k = F_1F_2 + \cdots + F_kF_{k+1}$, et montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ l'assertion « $T_{2n-1} = F_{2n}^2$ et $T_{2n} = F_{2n+1}^2 - 1$ ». On utilise l'identité de Cassini sous la forme $F_kF_{k+2} = F_{k+1}^2 + (-1)^{k+1}$.

- Si $T_{2n-1} = F_{2n}^2$, alors $T_{2n} = F_{2n}^2 + F_{2n}F_{2n+1} = F_{2n}F_{2n+2} = F_{2n+1}^2 - 1$.
- Si $T_{2n} = F_{2n+1}^2 - 1$, alors $T_{2n+1} = F_{2n+1}(F_{2n+1} + F_{2n+2}) - 1 = F_{2n+1}F_{2n+3} - 1 = F_{2n+2}^2$.

Comme $T_1 = F_1F_2 = 1 = F_2^2$, la récurrence s'amorce.

$$\boxed{T_{2n-1} = F_{2n}^2 \qquad T_{2n} = F_{2n+1}^2 - 1}$$

Vérification pour $n = 2$: $1 + 2 + 6 = 9 = F_4^2$ et $9 + 15 = 24 = 25 - 1$. ✓ Le chapitre 7 donnera une expression explicite de F_n à l'aide du nombre d'or rencontré à l'exercice 18.

EXERCICE 24 ⋆⋆⋆

1. En notant C l'ensemble des carrés parfaits, les deux énoncés s'écrivent

$$\text{(A)}\ \ \forall n \geqslant 1,\ \exists (a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{N}^*)^n,\ \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \in C \qquad \text{(B)}\ \ \exists (a_k)_{k\geqslant 1},\ \forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \in C.$$

Dans (A), les entiers a_1, …, a_n peuvent être choisis à nouveau pour chaque n ; dans (B), une seule suite doit convenir pour tous les n à la fois, chaque somme partielle étant un carré. L'énoncé (B) entraîne (A) : il suffit de prendre les n premiers termes de la suite. La réciproque n'a aucune raison d'être vraie a priori : c'est l'échange de $\forall$ et $\exists$.

2. Comme c est impair, $c^2 - 1$ et $c^2 + 1$ sont pairs, et

$$c^2 + \left(\frac{c^2-1}{2}\right)^2 = \frac{4c^2 + c^4 - 2c^2 + 1}{4} = \left(\frac{c^2+1}{2}\right)^2.$$

De plus, $c = 2k + 1$ donne $\frac{c^2+1}{2} = 2k^2 + 2k + 1$, qui est impair.

$$\boxed{c^2 + \left(\frac{c^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{c^2+1}{2}\right)^2,\ \text{carré d'un entier impair.}}$$

3. On construit la suite par récurrence en maintenant l'assertion $P(n)$: « $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = c_n^2$, avec $c_n \geqslant 3$ entier impair ». Avec $a_1 = 3$, on a $c_1 = 3$. Si $P(n)$ est vraie, on pose $a_{n+1} = \frac{c_n^2-1}{2}$, entier strictement positif puisque $c_n \geqslant 3$; la question 2 donne $a_1^2 + \cdots + a_{n+1}^2 = c_n^2 + a_{n+1}^2 = c_{n+1}^2$ avec $c_{n+1} = \frac{c_n^2+1}{2}$ impair et supérieur à $c_n \geqslant 3$.

$$\boxed{a_1 = 3,\ a_2 = 4,\ a_3 = 12,\ a_4 = 84}$$

On vérifie : $9 + 16 = 25 = 5^2$, puis $25 + 144 = 169 = 13^2$, puis $169 + 7\,056 = 7\,225 = 85^2$. ✓ L'énoncé (A) en découle, d'après la question 1. La suite croît très vite : le terme suivant est $a_5 = 3\,612$.
À retenir : il était ici plus facile de démontrer l'énoncé le plus fort, car il fournit une hypothèse de récurrence exploitable : la somme précédente est déjà un carré. On retrouve la leçon de l'exercice 19 sur le renforcement de l'hypothèse de récurrence.

EXERCICE 25 ⋆⋆⋆

Numérotons les dépôts D_1, …, D_n dans le sens de parcours, notons d_i la quantité d'essence du dépôt D_i et c_i la quantité nécessaire pour aller de D_i au dépôt suivant (D_1 après D_n). L'hypothèse s'écrit $d_1+\cdots+d_n = c_1+\cdots+c_n$. Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ qu'un départ convenable existe, pour tout circuit à n dépôts vérifiant cette hypothèse.

Initialisation : Si $n = 1$, alors $d_1 = c_1$: en partant de l'unique dépôt, on dispose exactement de l'essence nécessaire au tour.

Hérédité : Soit $n \geqslant 1$ tel que le résultat soit vrai pour n dépôts, et considérons un circuit à $n+1$ dépôts. Il existe un indice i tel que $d_i \geqslant c_i$: sinon, en sommant les inégalités $d_i < c_i$, on aurait $\sum d_i < \sum c_i$. Le dépôt D_i permet donc d'atteindre le dépôt suivant D_{i+1}. Fusionnons ces deux dépôts : on vide D_{i+1} dans D_i et l'on supprime D_{i+1}, de sorte que le nouveau dépôt contient $d_i + d_{i+1}$ et qu'il faut $c_i + c_{i+1}$ pour aller de lui au dépôt suivant. Le nouveau circuit compte n dépôts et vérifie encore l'hypothèse. Par hypothèse de récurrence, il possède un dépôt de départ convenable. Ce même dépôt convient pour le circuit initial : sur l'ancien circuit, la voiture qui arrive en D_i y prend $d_i \geqslant c_i$, atteint donc D_{i+1} et y prend d_{i+1} ; elle se trouve alors exactement dans l'état où l'aurait laissée le dépôt fusionné après le trajet de D_i à D_{i+1}, et la suite du parcours est identique. Si le départ convenable est le dépôt fusionné lui-même, on part de D_i, et le même argument s'applique.

Conclusion : Pour tout $n \geqslant 1$, il existe un dépôt de départ permettant de faire le tour.

On peut aussi raisonner directement : notons $S_k = \sum_{i=1}^{k}(d_i - c_i)$ le bilan après le trajet de D_1 jusqu'à D_{k+1}, avec $S_0 = 0$ et $S_n = 0$. Choisissons k_0 tel que S_{k_0} soit le plus petit des réels S_0, …, S_{n-1}, et partons de D_{k_0+1} : le contenu du réservoir à chaque étape est une différence $S_k - S_{k_0}$ ou $S_k - S_{k_0} + S_n$, toujours positive ou nulle.

Il faut partir juste après le point où le bilan cumulé est le plus bas.

EXERCICE 26 ⋆⋆⋆

1. Par récurrence sur le nombre $n \geqslant 2$ d'équipes. Pour $n = 2$, on nomme E_1 le vainqueur de l'unique match et E_2 le perdant. Supposons le résultat vrai pour n équipes, et considérons un tournoi à $n+1$ équipes. Mettons de côté une équipe T ; les n autres forment un tournoi, que l'on numérote E_1, …, E_n comme voulu. Il reste à insérer T.

- Si T a battu E_1, la liste T, E_1, …, E_n convient.
- Sinon, E_1 a battu T, et l'ensemble des indices $i \in [\![1\,;n]\!]$ tels que E_i ait battu T est non vide. Soit i son plus grand élément. Si $i = n$, la liste E_1, …, E_n, T convient. Si $i < n$, l'équipe E_{i+1} n'a pas battu T, donc T a battu E_{i+1}, et la liste E_1, …, E_i, T, E_{i+1}, …, E_n convient.

Tout tournoi admet un classement où chaque équipe a battu la suivante.

C'est le *théorème de Rédei* (1934). Une telle numérotation n'est pas un classement au sens sportif : l'équipe E_1 peut avoir perdu tous ses autres matchs.

2. Elle n'est pas unique en général : si trois équipes a, b, c sont telles que a bat b, b bat c et c bat a, les numérotations (a,b,c), (b,c,a) et (c,a,b) conviennent. On ne peut pas non plus toujours exiger que E_n ait battu E_1 : si une équipe a gagné tous ses matchs, elle n'a été battue par personne et ne peut suivre aucune équipe dans un cycle.

Non et non.

3. Chaque équipe dispute $n-1$ matchs. Si le tournoi est équilibré, chacune en gagne autant qu'elle en perd, donc $n-1$ est pair et n est impair. Réciproquement, supposons $n = 2p+1$, et numérotons les équipes par les restes 0, 1, …, $2p$ modulo n. Décidons que l'équipe i bat les équipes $i+1$, $i+2$, …, $i+p$ (modulo n), et perd contre les p autres. Ces résultats sont cohérents : pour deux équipes distinctes i et j, la différence $j-i$ est congrue modulo n à un unique $r \in [\![1\,;2p]\!]$; si $r \leqslant p$, l'équipe i bat j, et alors $i - j \equiv n - r$ avec $n - r \geqslant p+1$, de sorte que j ne bat pas i ; et inversement. Chaque équipe gagne ainsi p matchs et en perd p.

Un tournoi équilibré à n équipes existe si et seulement si n est impair.

Pour $n = 5$: l'équipe 0 bat 1 et 2, l'équipe 1 bat 2 et 3, et ainsi de suite jusqu'à l'équipe 4, qui bat 0 et 1.

EXERCICE 27 ⋆⋆⋆⋆

1. Les petits entiers se testent un par un. Les entiers 0, 3, 5, 6, $8 = 3 + 5$, 9 et 10 sont réalisables, tandis que 1, 2, 4 et 7 ne le sont pas : pour 7, les valeurs possibles $v = 0$ et $v = 1$ laissent 7 ou 2, qui ne sont pas multiples de 3. Montrons que tout entier $n \geqslant 8$ est réalisable, par récurrence forte : c'est vrai pour 8, 9 et 10, et pour $n \geqslant 11$, l'entier $n - 3 \geqslant 8$ est réalisable par hypothèse, donc n aussi, en ajoutant un timbre de 3.

Les entiers réalisables sont ceux de $\mathbb{N} \setminus \{1, 2, 4, 7\}$.

2. Si $d = \text{pgcd}(a, b) \geqslant 2$, tout entier réalisable $au + bv$ est divisible par d. Les entiers $kd + 1$, pour $k \in \mathbb{N}$, ne sont donc jamais réalisables.

Il y a une infinité d'entiers non réalisables.

On suppose désormais a et b premiers entre eux, et l'on pose $g = ab - a - b$.

3. On montre que g est le plus grand entier non réalisable.

L'entier g n'est pas réalisable. Supposons $g = au + bv$ avec u, v entiers naturels. Alors $ab = a(u + 1) + b(v + 1)$. Ainsi a divise $b(v + 1)$, et comme a est premier avec b, le lemme de Gauss donne $a \mid v+1$; comme $v+1 \geqslant 1$, on a $v+1 \geqslant a$. De même $u+1 \geqslant b$. Mais alors $a(u+1)+b(v+1) \geqslant ab+ab > ab$: contradiction.

Tout entier $n > g$ est réalisable. Par le théorème de Bézout, il existe $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au_0+bv_0 = 1$, donc $n = a(nu_0) + b(nv_0)$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a aussi $n = a(nu_0 - kb) + b(nv_0 + ka)$. La division euclidienne de nu_0 par b fournit un entier k tel que $u = nu_0 - kb$ appartienne à $[\![0\,;b-1]\!]$. L'entier $v = \frac{n-au}{b}$ vérifie alors

$$v \geqslant \frac{n - a(b-1)}{b} > \frac{g - ab + a}{b} = \frac{-b}{b} = -1,$$

donc $v \geqslant 0$, puisque v est entier.

Le plus grand entier non réalisable est $ab - a - b$.

Pour $a = 3$ et $b = 5$, on retrouve $15 - 3 - 5 = 7$. ✓

4. Montrons que, pour tout $n \in [\![0\,;g]\!]$, exactement un des deux entiers n et $g - n$ est réalisable.

- Ils ne le sont pas tous les deux : sinon leur somme g le serait, en additionnant les deux écritures.
- L'un des deux l'est : comme à la question 3, on écrit $n = au + bv$ avec $u \in [\![0\,;b-1]\!]$ et $v \in \mathbb{Z}$. Si $v \geqslant 0$, l'entier n est réalisable. Sinon $v \leqslant -1$, et $g - n = a(b - 1 - u) + b(-1 - v)$, avec $b - 1 - u \geqslant 0$ et $-1 - v \geqslant 0$: c'est $g - n$ qui est réalisable.

En associant à chaque entier n de $[\![0\,;g]\!]$ l'entier $g - n$, on échange donc les entiers réalisables et non réalisables de cet intervalle : il y en a autant des uns que des autres. Comme l'intervalle contient $g + 1$ entiers et qu'il n'y a aucun entier non réalisable au-delà de g :

Il y a exactement $\dfrac{g+1}{2} = \dfrac{(a-1)(b-1)}{2}$ entiers non réalisables.

Pour $a = 3$ et $b = 5$, on trouve $\frac{2\times4}{2} = 4$, ce qui correspond bien à $\{1, 2, 4, 7\}$. ✓

À retenir : cet exercice est le « problème des pièces » de Frobenius, et le dénombrement de la question 4 est un résultat attribué à Sylvester. La symétrie $n \leftrightarrow g - n$ en est la clé : pour deviner g, on pouvait tracer, pour quelques couples (a, b), la liste des entiers non réalisables et remarquer qu'ils se répartissent symétriquement.

EXERCICE 28 ⋆

1. On résout chaque condition.

$$\boxed{A = \{-3\,,-2\,,-1\,,0\,,1\,,2\,,3\}}$$

car $3^2 = 9 \leqslant 10 < 16 = 4^2$. Pour B, les six couples (p,q) autorisés donnent les quotients $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, dont trois sont égaux à 1 :

$$\boxed{B = \left\{\tfrac{1}{3}\,,\tfrac{1}{2}\,,\tfrac{2}{3}\,,1\right\} \text{ possède 4 éléments, et non 6.}}$$

Enfin $x^3 = x \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) = 0$:

$$\boxed{C = \{-1\,,0\,,1\}}$$

2. On applique la définition à chaque étape :

$$\boxed{\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}} \qquad \boxed{\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)) = \{\varnothing,\ \{\varnothing\}\}}$$

$$\boxed{\mathcal{P}\Big(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))\Big) = \Big\{\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{\{\varnothing\}\},\ \{\varnothing,\{\varnothing\}\}\Big\}}$$

Ces ensembles ont 1, 2 et 4 éléments, conformément à la proposition 6 du cours (2^0, 2^1, 2^2). L'étape suivante en aurait $2^4 = 16$.
Piège : $\mathcal{P}(\varnothing)$ n'est pas vide, puisque l'ensemble vide est une partie de lui-même. Les ensembles $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ servent d'ailleurs, en théorie des ensembles, à définir les entiers 0, 1, 2.

3. On examine chaque assertion.

Assertion	Valeur	Justification
$1 \in E$	**V**	1 est l'un des trois éléments de E.
$\{1\} \in E$	**V**	$\{1\}$ est lui aussi un élément de E.
$\{1\} \subset E$	**V**	son unique élément 1 appartient à E.
$\{\{1\}\} \subset E$	**V**	son unique élément $\{1\}$ appartient à E.
$2 \in E$	**F**	2 n'est élément de E qu'à l'intérieur de $\{1,2\}$.
$\{1,2\} \subset E$	**F**	$2 \notin E$; en revanche $\{1,2\} \in E$.
$\varnothing \in E$	**F**	aucun des trois éléments de E n'est vide.
$\varnothing \subset E$	**V**	l'ensemble vide est inclus dans tout ensemble.

4. On lit les résultats sur la droite réelle, en prenant garde aux bornes :

$$\boxed{A \cup B = [-1\,,5]} \qquad \boxed{A \cap B =]2\,,3]} \qquad \boxed{A \setminus B = [-1\,,2]} \qquad \boxed{B \setminus A =]3\,,5]}$$

$$\boxed{A \,\Delta\, B = [-1\,,2] \cup]3\,,5]} \qquad \boxed{\mathbb{R} \setminus (A \cup B) =]-\infty\,,-1[\cup]5\,,+\infty[}$$

$$\boxed{(A \cup B) \cap \mathbb{N} = \{0\,,1\,,2\,,3\,,4\,,5\}}$$

Piège : $A \setminus B$ est fermé en 2, car 2 appartient à A mais pas à $B =]2\,,5]$.

EXERCICE 29 ⋆

(a) La zone est dans A et dans B, mais pas dans C :

$$\boxed{(A \cap B) \setminus C = A \cap B \cap \overline{C}}$$

(b) La zone est formée de tout le disque A et de la lentille commune à B et C :

$$\boxed{A \cup (B \cap C)}$$

(c) La zone est formée des éléments qui n'appartiennent à aucune des trois parties ; on utilise les lois de De Morgan :

$$\boxed{\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}}$$

(d) La zone est formée des éléments qui appartiennent à exactement une des trois parties. On peut la décrire morceau par morceau, ou comme la réunion privée des zones de recouvrement :

$$\boxed{X = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)}$$

$$\boxed{Y = (A \cup B \cup C) \setminus ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C))}$$

Pour démontrer que $X = Y$, on fixe $x \in E$ et l'on note $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ le nombre de parties parmi A, B, C qui contiennent x. Chacun des trois morceaux de X contient les éléments qui sont dans une partie désignée et dans aucune autre, donc $x \in X \Leftrightarrow k = 1$. D'autre part, $x \in A \cup B \cup C \Leftrightarrow k \geqslant 1$ et $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \Leftrightarrow k \geqslant 2$, donc $x \in Y \Leftrightarrow k = 1$.

$$\boxed{X = Y}$$

Piège : on serait tenté d'écrire $A \,\Delta\, B \,\Delta\, C$. Mais cet ensemble contient aussi le centre $A \cap B \cap C$: il est formé des éléments appartenant à un nombre *impair* de parties, $k = 1$ ou $k = 3$.

EXERCICE 30 ⋆⋆

1. On regroupe en factorisant par A, puis par $\overline{A}$:

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap E = A, \qquad \text{et de même} \qquad (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = \overline{A}.$$

$$\boxed{(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = A \cup \overline{A} = E}$$

Pour la seconde, on utilise la distributivité et l'égalité $A \cup \overline{A} = E$: $A \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup B) = A \cup B$. De même, $(A \cup B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) = (A \cup B) \cup (\overline{A \cup B} \cap C) = A \cup B \cup C$, d'après une loi de De Morgan.

$$\boxed{A \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) = A \cup B \cup C}$$

Cette seconde égalité découpe $A \cup B \cup C$ en trois morceaux disjoints : les éléments de A, ceux de B qui ne sont pas dans A, et ceux de C qui ne sont ni dans A ni dans B. Elle servira à dénombrer une réunion, dans le chapitre consacré au dénombrement.

2. Pour $x \in E$, on a les équivalences

$$\begin{aligned} x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C) &\iff x \in A \text{ et } (x \notin B \text{ ou } x \notin C) \\ &\iff x \in A \text{ et non } (x \in B \text{ et } x \in C) \iff x \in A \setminus (A \cap B \cap C), \end{aligned}$$

la dernière car, pour $x \in A$, on a $x \in A \cap B \cap C \iff (x \in B \text{ et } x \in C)$.

$$\boxed{(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (A \cap B \cap C)}$$

3. (a) Le membre de gauche ne change pas si l'on échange C et D, car $C \cup D = D \cup C$. Celui de droite devient $(A \cap C) \cup (B \cap D)$, qui n'a aucune raison d'être égal à $(A \cap D) \cup (B \cap C)$. Une égalité

vraie resterait vraie après l'échange, et l'on obtiendrait $(A \cap D) \cup (B \cap C) = (A \cap C) \cup (B \cap D)$ pour toutes parties, ce qui est très suspect.

3. (b) Prenons $E = \{1\}$, $A = C = \{1\}$ et $B = D = \varnothing$. Alors $(A \cup B) \cap (C \cup D) = \{1\}$, tandis que $(A \cap D) \cup (B \cap C) = \varnothing$.

$$\boxed{\text{L'égalité est fausse pour } A = C = \{1\},\ B = D = \varnothing.}$$

3. (c) Un diagramme de Venn n'est fidèle que s'il représente toutes les intersections possibles. Avec quatre disques disposés en carré, les zones $A \cap C$ et $B \cap D$, entre disques opposés, n'existent pas : le diagramme ne représente que des quadruplets particuliers de parties, ceux pour lesquels $A \cap C = B \cap D = \varnothing$. Le développement par distributivité donne en réalité

$$(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D),$$

et l'égalité suggérée n'est vraie que lorsque les termes $A \cap C$ et $B \cap D$ sont contenus dans les deux autres, par exemple quand ils sont vides.

$$\boxed{\text{Seule l'inclusion } (A \cap D) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (C \cup D) \text{ est toujours vraie.}}$$

À retenir : un diagramme de Venn suggère, il ne démontre pas. Avec quatre ensembles, aucun diagramme formé de disques ne peut représenter les seize zones possibles ; il faut recourir à des formes plus compliquées.

EXERCICE 31 ⋆⋆

1. Notons $\mathcal{D}$ le premier ensemble et $\mathcal{D}'$ le second.

Inclusion $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$. Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$. Posons $t = x - 1$; alors $x = t + 1$ et $y = 3x - 2 = 3t + 1$, donc $(x, y) \in \mathcal{D}'$.

Inclusion $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$. Pour tout réel t, $3(t + 1) - (3t + 1) = 2$.

$$\boxed{\mathcal{D} = \mathcal{D}'}$$

Les deux écritures décrivent la même droite du plan, l'une par une équation cartésienne, l'autre par une représentation paramétrique.

2. L'inclusion $\{7a + 12b\} \subset \mathbb{Z}$ est claire. Réciproquement, on remarque que $7 \times (-5) + 12 \times 3 = 1$, donc tout entier n s'écrit $n = 7 \times (-5n) + 12 \times (3n)$.

$$\boxed{\{7a + 12b \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\} = \mathbb{Z}}$$

Pour le second ensemble, tout élément $6a+10b = 2(3a+5b)$ est pair. Réciproquement $6\times2+10\times(-1) = 2$, donc $2k = 6 \times (2k) + 10 \times (-k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

$$\boxed{\{6a + 10b \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\} = 2\mathbb{Z}}$$

Dans les deux cas, on obtient l'ensemble des multiples du PGCD : $\operatorname{pgcd}(7, 12) = 1$ et $\operatorname{pgcd}(6, 10) = 2$. Ce fait général sera établi aux chapitres 11 et 12.

3. Les deux sens de la propriété d'Archimède servent ici : pour tout réel $x > 0$, il existe $n \geqslant 1$ tel que $\frac{1}{n} < x$; et, en l'appliquant à $\frac{1}{x}$, il existe $n \geqslant 1$ tel que $n > x$.

Premier ensemble. Chaque $\left[\frac{1}{n}, n\right]$ est inclus dans $]0, +\infty[$. Réciproquement, soit $x > 0$; il existe n_1 tel que $\frac{1}{n_1} < x$ et n_2 tel que $n_2 > x$. Pour $n = \max(n_1, n_2)$, on a $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_1} < x < n_2 \leqslant n$.

$$\boxed{\bigcup_{n \geqslant 1} \left[\frac{1}{n}, n\right] =]0, +\infty[}$$

Piège : il faut un même entier n pour les deux bornes ; on le prend assez grand pour les deux, ce que permet l'emboîtement des intervalles.

Deuxième ensemble. Si $x \in [0\,,1]$, alors $-\frac{1}{n} < 0 \leqslant x \leqslant 1 < 1+\frac{1}{n}$ pour tout n. Réciproquement, soit x appartenant à tous les intervalles. Si $x < 0$, il existe n tel que $\frac{1}{n} < -x$, soit $x < -\frac{1}{n}$: contradiction. Si $x > 1$, il existe n tel que $\frac{1}{n} < x - 1$, soit $x > 1 + \frac{1}{n}$: contradiction.

$$\boxed{\bigcap_{n\geqslant 1} \left[-\frac{1}{n}\,,1+\frac{1}{n}\right[= [0\,,1]}$$

Troisième ensemble. Un réel x appartenant à tous les $[n\,,+\infty[$ vérifierait $x \geqslant n$ pour tout n, ce qui est impossible puisqu'il existe un entier $n > x$.

$$\boxed{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [n\,,+\infty[= \varnothing}$$

Quatrième ensemble. Chaque intervalle est inclus dans $]-\infty\,,1[$. Réciproquement, si $x < 1$, il existe n tel que $\frac{1}{n} < 1 - x$, soit $x < 1 - \frac{1}{n}$.

$$\boxed{\bigcup_{n\geqslant 1} \left]-\infty\,,1-\frac{1}{n}\right] =]-\infty\,,1[}$$

À retenir : comme le signalait le cours, les bornes « passent mal à la limite » : une intersection d'intervalles semi-ouverts peut être fermée, une réunion d'intervalles fermés peut être ouverte, et une intersection de parties non vides emboîtées peut être vide.

EXERCICE 32 ⋆⋆⋆

1. *Réunion.* Si $y \in]x-1\,,x+1[$ avec $x \in [0\,,1]$, alors $-1 \leqslant x-1 < y < x+1 \leqslant 2$, donc $y \in]-1\,,2[$. Réciproquement, soit $y \in]-1\,,2[$. Si $y < 1$, alors $y \in]-1\,,1[$, qui correspond à $x = 0$; si $y \geqslant 1$, alors $y \in]0\,,2[$, qui correspond à $x = 1$.

Intersection. Un réel y appartient à tous les intervalles si et seulement si $x - 1 < y < x + 1$ pour tout $x \in [0\,,1]$, c'est-à-dire si $y > x - 1$ pour tout $x \in [0,1]$, soit $y > 0$ (la condition pour $x = 1$ est la plus forte), et $y < x + 1$ pour tout $x \in [0,1]$, soit $y < 1$ (condition pour $x = 0$).

$$\boxed{\bigcup_{x\in[0,1]}]x-1\,,x+1[=]-1\,,2[\qquad \bigcap_{x\in[0,1]}]x-1\,,x+1[=]0\,,1[}$$

2. (a) En revenant à la définition de la réunion et de l'intersection d'une famille :

$$x \in \liminf E_n \iff \exists n \in \mathbb{N},\ \forall k \geqslant n,\ x \in E_k \qquad x \in \limsup E_n \iff \forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \geqslant n,\ x \in E_k.$$

Autrement dit, x appartient à $\liminf E_n$ s'il appartient à *tous les E_k à partir d'un certain rang*, et à $\limsup E_n$ s'il appartient à *une infinité* de E_k : pour tout rang n, on trouve un E_k plus loin qui le contient. Si x appartient à tous les E_k pour $k \geqslant n_0$, alors pour tout n, l'indice $k = \max(n, n_0)$ vérifie $k \geqslant n$ et $x \in E_k$.

$$\boxed{\liminf E_n \subset \limsup E_n}$$

C'est l'implication « $\exists\forall \Rightarrow \forall\exists$ » du cours, appliquée aux rangs.

2. (b) Pour $E_n = [n\,,+\infty[$: aucun réel x n'appartient à une infinité de E_k, puisque $x \notin E_k$ dès que $k > x$. Donc $\limsup E_n = \varnothing$, et $\liminf E_n = \varnothing$ par la question (a).

Pour $E_n = [(-1)^n n\,,+\infty[$: on a $E_n = [n\,,+\infty[$ pour n pair et $E_n = [-n\,,+\infty[$ pour n impair. Un réel x appartient à tous les E_k impairs tels que $k \geqslant -x$, donc à une infinité d'entre eux ; mais il n'appartient pas aux E_k pairs tels que $k > x$, donc pas à tous les E_k à partir d'un certain rang.

$$\boxed{E_n = [n\,,+\infty[:\ \liminf = \limsup = \varnothing \qquad E_n = [(-1)^n n\,,+\infty[:\ \liminf = \varnothing,\ \limsup = \mathbb{R}}$$

2. (c) Un réel appartient à tous les E_k à partir d'un certain rang si et seulement s'il appartient à A et à B ; il appartient à une infinité de E_k si et seulement s'il appartient à A ou à B, car chacun des deux ensembles revient une infinité de fois.

$$\boxed{\liminf E_n = A \cap B \qquad \limsup E_n = A \cup B}$$

Ainsi l'inclusion de la question (a) peut être stricte. Ces notions reviendront en probabilités, où $\limsup E_n$ est l'événement « une infinité des événements E_n se réalisent ».

EXERCICE 33 ⋆⋆

1. Vraie. On a $A \subset A \cup B = A \cap B \subset B$, et de même $B \subset A \cup B = A \cap B \subset A$.

$$\boxed{A = B}$$

2. Vraie. On a $B \subset A \cup B \subset A \cap C \subset A$, et $A \subset A \cup B \subset A \cap C \subset C$.

$$\boxed{B \subset A \subset C}$$

3. Vraie. Soit $x \in B$; on distingue deux cas. Si $x \in A$, alors $x \in A \cap B \subset A \cap C$, donc $x \in C$. Si $x \notin A$, alors $x \in A \cup B \subset A \cup C$ et $x \notin A$, donc $x \in C$.

$$\boxed{B \subset C}$$

Aucune des deux hypothèses ne suffit seule. Prenons $E = \{1\}$. Avec $A = C = \varnothing$ et $B = \{1\}$, on a $A \cap B = \varnothing \subset A \cap C$ mais $B \not\subset C$. Avec $A = B = \{1\}$ et $C = \varnothing$, on a $A \cup B = \{1\} \subset A \cup C$ mais $B \not\subset C$.

$$\boxed{\text{Les deux hypothèses sont nécessaires.}}$$

4. Fausse. Prenons $E = \{1, 2\}$, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ et $C = \{1, 2\}$: on a $C \subset A \cup B$, mais C n'est inclus ni dans A ni dans B.

$$\boxed{\text{Contre-exemple : } A = \{1\},\ B = \{2\},\ C = \{1, 2\}}$$

Piège : l'erreur consiste à « distribuer » le quantificateur universel sur le « ou ». Chaque élément de C est dans A ou dans B, mais pas forcément tous dans la même partie.

5. Vraie. Pour tout $x \in E$, d'après une loi de De Morgan :

$$x \in A \setminus (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \notin B \text{ et } x \notin C \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ et } (x \in A \text{ et } x \notin C)$$

$$\boxed{A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)}$$

6. Fausse. Pour $A = B = C = \{1\}$, le membre de gauche vaut $\{1\} \setminus \varnothing = \{1\}$, celui de droite $\varnothing \setminus \{1\} = \varnothing$.

$$\boxed{\text{Contre-exemple : } A = B = C = \{1\}}$$

La formule correcte est $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$: en retirant moins d'éléments, on en conserve davantage.

7. Vraie. On sait déjà que $A \subset C$. Soit $x \in C$. Alors $x \in C \cup D = A \cup B$. Si l'on avait $x \in B$, on aurait $x \in D$ puisque $B \subset D$, donc $x \in C \cap D = \varnothing$: c'est impossible. Donc $x \in A$, et $C \subset A$. On montre de même que $D \subset B$.

$$\boxed{A = C \text{ et } B = D}$$

Condition nécessaire et suffisante. Montrons que l'égalité est vraie pour toute partie B si et seulement si $A \subset C$.

$$\boxed{\forall B \in \mathcal{P}(E),\ (A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C) \quad \Longleftrightarrow \quad A \subset C}$$

Si l'égalité est vraie pour tout B, elle l'est pour $B = \varnothing$, ce qui donne $A \cap C = A$, c'est-à-dire $A \subset C$. Réciproquement, si $A \subset C$, la distributivité donne $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = A \cup (B \cap C)$.
À retenir : pour obtenir une condition nécessaire à partir d'un énoncé valable « pour tout B », on choisit une valeur particulière de B qui le simplifie : c'est l'étape d'analyse d'une analyse-synthèse.

EXERCICE 34 ⋆⋆

1. Si $x = y$, l'implication $x \in A \Rightarrow y \in A$ est vraie pour toute partie A. Réciproquement, appliquons l'hypothèse à la partie $A = \{x\}$: comme $x \in \{x\}$, on obtient $y \in \{x\}$, c'est-à-dire $y = x$.

$$\boxed{x = y \iff (\forall A \in \mathcal{P}(E),\ x \in A \Rightarrow y \in A)}$$

Deux éléments sont égaux dès qu'ils ne peuvent être séparés par aucune partie, et le singleton $\{x\}$ est la partie qui réalise le test.

2. Si $A \subset B$, alors pour tout X, un élément de $A \cap X$ est dans A, donc dans B, et dans X : il est dans $B \cap X$. Réciproquement, l'hypothèse appliquée à $X = E$ donne $A \cap E \subset B \cap E$, c'est-à-dire $A \subset B$.

$$\boxed{A \subset B \iff (\forall X \in \mathcal{P}(E),\ A \cap X \subset B \cap X)}$$

3. (a) Si $A \neq E$, il existe $x \in E \setminus A$, et $X = \{x\}$ est une partie non vide disjointe de A. Réciproquement, si $A = E$, toute partie non vide X vérifie $A \cap X = X \neq \varnothing$.

$$\boxed{\text{(a)} \iff A \neq E}$$

3. (b) Si $A \subset B$ et $X \cap A \neq \varnothing$, un élément de $X \cap A$ est dans $X \cap B$. Réciproquement, supposons (b) et soit $x \in A$. Pour $X = \{x\}$, on a $X \cap A \neq \varnothing$, donc $X \cap B \neq \varnothing$, c'est-à-dire $x \in B$.

$$\boxed{\text{(b)} \iff A \subset B}$$

4. Dans les deux cas, le sens direct est immédiat ; montrons les sens réciproques par contraposée. Supposons $A \neq B$; quitte à échanger A et B, il existe $a \in A \setminus B$.

- Pour $n = a + 1 \neq a$, l'élément a appartient à $A \cup \{n\}$ mais pas à $B \cup \{n\}$.
- Pour $n = a$, l'élément a appartient à $A \cap [\![0\,;a]\!]$ mais pas à $B \cap [\![0\,;a]\!]$.

$$\boxed{\text{Les deux équivalences sont vraies.}}$$

Avec des réunions, l'équivalence devient fausse : pour $A = \{0\}$ et $B = \varnothing$, on a $A \cup [\![0\,;n]\!] = [\![0\,;n]\!] = B \cup [\![0\,;n]\!]$ pour tout n, puisque $0 \in [\![0\,;n]\!]$, alors que $A \neq B$.

$$\boxed{\text{Avec des réunions, l'équivalence est fausse.}}$$

À retenir : pour montrer qu'une famille de « tests » caractérise une partie, on prend un élément qui distingue les deux parties et l'on choisit le test qui le révèle. La réunion avec $[\![0\,;n]\!]$ efface au contraire l'information contenue dans les petits entiers.

EXERCICE 35 ⋆⋆

1. Soit $a \in A$. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que $a + k$ et $a - k$ appartiennent à A. C'est vrai pour $k = 0$. Si $a + k \in A$, l'hypothèse appliquée à $n = a + k$ donne $a + k + 1 \in A$; de même, si $a - k \in A$, elle donne $a - k - 1 \in A$. Tout entier relatif m s'écrit $a + k$ ou $a - k$, avec $k = |m - a| \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{A = \mathbb{Z}}$$

L'hypothèse « non vide » est indispensable : la partie vide vérifie trivialement la condition de stabilité.

2. Soit (u_n) une suite décroissante d'entiers naturels. L'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de ses valeurs est une partie non vide de $\mathbb{N}$; il possède un plus petit élément, de la forme u_{n_0}. Pour $n \geqslant n_0$, on a $u_n \leqslant u_{n_0}$ par décroissance, et $u_n \geqslant u_{n_0}$ par minimalité.

$$\boxed{u_n = u_{n_0} \text{ pour tout } n \geqslant n_0 :\ \text{la suite est stationnaire.}}$$

Le résultat est faux pour des réels positifs : la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ est strictement décroissante. C'est bien la propriété du plus petit élément, propre à $\mathbb{N}$, qui intervient.

3. Une suite strictement décroissante d'entiers naturels serait décroissante, donc stationnaire, ce qui contredit la stricte décroissance.

Supposons $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, avec p, q entiers naturels non nuls. Comme $1 < \sqrt{2} < 2$, on a $q < p < 2q$. Posons $p' = 2q - p$ et $q' = p - q$: ce sont des entiers naturels non nuls, et $q' < q$. De plus, en utilisant $p^2 = 2q^2$,

$$p'^2 - 2q'^2 = 4q^2 - 4pq + p^2 - 2p^2 + 4pq - 2q^2 = 2q^2 - p^2 = 0,$$

donc $\sqrt{2} = \frac{p'}{q'}$. En itérant, on construit une suite strictement décroissante de dénominateurs entiers naturels non nuls : c'est impossible.

$$\boxed{\sqrt{2} \text{ est irrationnel.}}$$

Cette preuve, différente de celle du cours, n'utilise aucune considération de parité.

EXERCICE 36 ⋆⋆

1. Pour toute partie X : $X \subset E \cap F \Leftrightarrow (X \subset E \text{ et } X \subset F)$.

$$\boxed{\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)}$$

Pour la réunion, une partie de E ou de F est une partie de $E \cup F$, d'où :

$$\boxed{\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)}$$

Montrons que l'égalité a lieu si et seulement si $E \subset F$ ou $F \subset E$. Si $E \subset F$, alors $E \cup F = F$ et $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$, donc les deux membres valent $\mathcal{P}(F)$; de même si $F \subset E$. Réciproquement, raisonnons par contraposition : si ni $E \subset F$ ni $F \subset E$, il existe $a \in E \setminus F$ et $b \in F \setminus E$. La partie $\{a, b\}$ est incluse dans $E \cup F$, mais ni dans E (car $b \notin E$), ni dans F (car $a \notin F$).

$$\boxed{\mathcal{P}(E \cup F) = \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \Longleftrightarrow (E \subset F \text{ ou } F \subset E)}$$

2. Pour tout couple $(x, y) \in E \times F$:

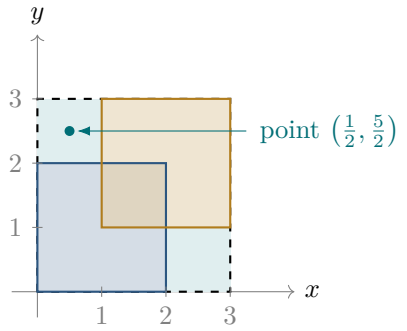
$$(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D) \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } y \in B) \text{ et } (x \in C \text{ et } y \in D) \Leftrightarrow (x \in A \cap C) \text{ et } (y \in B \cap D)$$

$$\boxed{(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)}$$

3. Si $(x, y) \in A \times B$, alors $x \in A \cup C$ et $y \in B \cup D$; de même pour $C \times D$. D'où l'inclusion :

$$\boxed{(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)}$$

La figure montre qu'elle est stricte en général : la réunion des deux carrés ne remplit pas le carré $[0\,,3]^2$. Le point $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$, par exemple, appartient à $[0\,,3]^2$, mais ni à $A \times B$ (car $\frac{5}{2} > 2$) ni à $C \times D$ (car $\frac{1}{2} < 1$).



Les deux petits carrés teintés de bleu pétrole sont les éléments de $(A \cup C) \times (B \cup D)$ qui manquent à la réunion des deux produits.

4. Supposons que le disque $\mathcal{D}$ s'écrive $X \times Y$. Comme $(1,0) \in \mathcal{D}$, on a $1 \in X$; comme $(0,1) \in \mathcal{D}$, on a $1 \in Y$. Donc $(1,1) \in X \times Y = \mathcal{D}$, ce qui est faux puisque $1^2 + 1^2 = 2 > 1$.

$$\boxed{\text{Le disque n'est pas un produit cartésien de deux parties de } \mathbb{R}.}$$

À retenir : un produit $X \times Y$ a une propriété de « rectangle » : s'il contient (x,y) et (x',y'), il contient aussi (x,y'). C'est cette propriété, mise en défaut, qui fournit la contradiction.

EXERCICE 37 ⋆⋆

1. Montrons même que $A \subset B \subset C$. Soit $a \in A$ et $b \in B$, qui existent puisque A et B sont non vides. Le couple (a,b) appartient à $A \times B$, donc à $B \times C$: ainsi $a \in B$ et $b \in C$. Le premier point, valable pour tout $a \in A$, donne $A \subset B$; le second, valable pour tout $b \in B$, donne $B \subset C$.

$$\boxed{A \subset B \subset C, \text{ et en particulier } A \subset C.}$$

Sans l'hypothèse $B \neq \varnothing$, le résultat tombe : pour $A = \{1\}$ et $B = C = \varnothing$, on a $A \times B = \varnothing \subset B \times C$, mais $A \not\subset C$. L'hypothèse $A \neq \varnothing$ est en revanche inutile : si A est vide, l'inclusion $A \subset C$ est vraie. L'hypothèse $C \neq \varnothing$ l'est aussi, car elle découle des deux autres.

2. Raisonnons par l'absurde, en supposant $E \not\subset F$ et $F \not\subset E$. Il existe alors $x \in E \setminus F$ et $y \in F \setminus E$. Le couple (x,y) appartient à $E \times F$, donc à $(F \times \Omega) \cup (\Omega \times E)$: ainsi $x \in F$ ou $y \in E$, ce qui contredit le choix de x et y.

$$\boxed{E \subset F \text{ ou } F \subset E}$$

La négation de « $E \subset F$ ou $F \subset E$ » est « $E \not\subset F$ et $F \not\subset E$ », qui fournit deux éléments témoins : c'est la bonne façon d'aborder une conclusion disjonctive.

EXERCICE 38 ⋆⋆⋆

1. (a) On calcule les quatre sommes $0+1$, $0+4$, $1+1$, $1+4$. Pour les intervalles, une somme $a+b$ avec $a \in [0,1]$ et $b \in [2,5]$ est dans $[2\,,6]$; réciproquement, si $t \in [2\,,5]$, alors $t = 0 + t$, et si $t \in [5\,,6]$, alors $t = (t-5) + 5$.

$$\boxed{\{0\,,1\} \oplus \{1\,,4\} = \{1\,,2\,,4\,,5\} \qquad [0\,,1] \oplus [2\,,5] = [2\,,6]}$$

1. (b) L'inclusion $A \oplus \mathbb{R} \subset \mathbb{R}$ est évidente. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $a \in A$, qui existe car A est non vide : $t = a + (t-a)$, avec $t - a \in \mathbb{R}$.

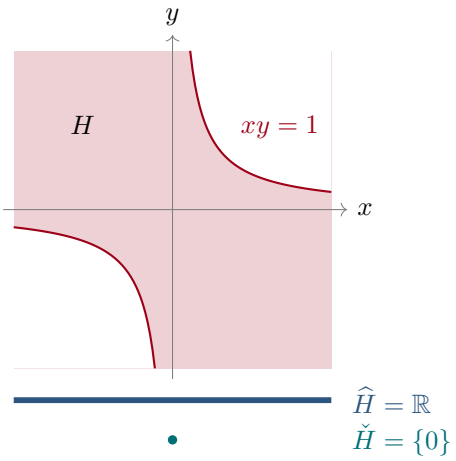
$$\boxed{A \oplus \mathbb{R} = \mathbb{R}}$$

1. (c) Si $t = a + b$ avec $a \in A_1 \cap A_2$ et $b \in B$, alors $t \in A_1 \oplus B$ et $t \in A_2 \oplus B$. L'égalité est fausse en général : pour $A_1 = \{0\}$, $A_2 = \{1\}$ et $B = \{0\,,1\}$, on a $(A_1 \cap A_2) \oplus B = \varnothing \oplus B = \varnothing$, tandis que $1 = 0 + 1 = 1 + 0$ appartient à $(A_1 \oplus B) \cap (A_2 \oplus B) = \{0\,,1\} \cap \{1\,,2\} = \{1\}$.

$$\boxed{\text{Inclusion toujours vraie, égalité fausse en général.}}$$

Le même réel peut s'écrire $a_1 + b_1$ et $a_2 + b_2$ avec $a_1 \neq a_2$: c'est ce qui fait échouer l'inclusion réciproque.

2. (a) La partie H est la région du plan comprise entre les deux branches de l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$, branches comprises.



La partie H est colorée ; sous la figure, sa projection sur l'axe des abscisses, puis l'ensemble des abscisses dont toute la droite verticale est contenue dans H.

Pour tout réel x, le couple $(x, 0)$ appartient à H, donc $\widehat{H} = \mathbb{R}$. Si $x \neq 0$, le couple $\left(x, \frac{2}{x}\right)$ n'appartient pas à H, car $x \times \frac{2}{x} = 2 > 1$; en revanche, $(0, y) \in H$ pour tout y.

$$\boxed{\widehat{H} = \mathbb{R} \qquad \check{H} = \{0\}}$$

L'ensemble $\widehat{P}$ est la *projection* de P sur l'axe des abscisses : l'ensemble des x dont la droite verticale rencontre P. L'ensemble $\check{P}$ est l'ensemble des x dont la droite verticale est entièrement contenue dans P.

2. (b) Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x \in \widehat{P \cup Q} &\iff \exists y \in \mathbb{R},\ ((x,y) \in P \text{ ou } (x,y) \in Q) \\ &\iff (\exists y \in \mathbb{R},\ (x,y) \in P) \text{ ou } (\exists y \in \mathbb{R},\ (x,y) \in Q) \iff x \in \widehat{P} \cup \widehat{Q}, \end{aligned}$$

car « il existe » se distribue sur « ou ». En revanche, de $\exists y,\ ((x,y) \in P$ et $(x,y) \in Q)$ on déduit seulement que $x \in \widehat{P}$ et $x \in \widehat{Q}$, les deux témoins pouvant être différents. Pour $P = \{(0,0)\}$ et $Q = \{(0,1)\}$, on a $P \cap Q = \varnothing$, donc $\widehat{P \cap Q} = \varnothing$, alors que $\widehat{P} \cap \widehat{Q} = \{0\}$.

$$\boxed{\widehat{P \cup Q} = \widehat{P} \cup \widehat{Q} \qquad \widehat{P \cap Q} \subset \widehat{P} \cap \widehat{Q},\ \text{inclusion stricte en général}}$$

2. (c) Les rôles s'échangent, car « pour tout » se distribue sur « et » mais pas sur « ou » : en notant $R = P \cap Q$ et $S = P \cup Q$,

$$\boxed{\check{R} = \check{P} \cap \check{Q} \qquad \check{P} \cup \check{Q} \subset \check{S}}$$

La première égalité découle de $\forall y,\ (\alpha(y)$ et $\beta(y)) \iff (\forall y,\ \alpha(y))$ et $(\forall y,\ \beta(y))$. Pour la seconde, si la droite verticale d'abscisse x est contenue dans P, elle l'est dans $P \cup Q$. L'inclusion est stricte en général : pour $P = \{(x,y) \mid y \geqslant 0\}$ et $Q = \{(x,y) \mid y < 0\}$, on a $\check{P} = \check{Q} = \varnothing$, alors que $S = P \cup Q = \mathbb{R}^2$ et $\check{S} = \mathbb{R}$.

À retenir : les opérations $P \mapsto \widehat{P}$ et $P \mapsto \check{P}$ sont la traduction ensembliste des quantificateurs $\exists y$ et $\forall y$. Leurs propriétés vis-à-vis de $\cup$ et $\cap$ sont exactement les règles de distributivité des quantificateurs du cours, ce qui explique la parenté entre cet exercice et la partie de Minkowski : un « il existe » est caché dans la définition de $A \oplus B$.

EXERCICE 39 ⋆⋆⋆

1. *Analyse.* Soit X une solution. Alors $A \subset A \cup X = B$ et $C = A \cap X \subset A$: il est nécessaire que $C \subset A \subset B$. De plus, X est la réunion de sa partie hors de A et de sa partie dans A ; or $X \setminus A = (A \cup X) \setminus A = B \setminus A$ et $X \cap A = C$. Donc nécessairement $X = (B \setminus A) \cup C$.

Synthèse. Supposons $C \subset A \subset B$ et posons $X = (B \setminus A) \cup C$. Comme $A \subset B$, on a $A \cup (B \setminus A) = B$, et comme $C \subset B$, on obtient $A \cup X = B$. D'autre part, $A \cap X = \big(A \cap (B \setminus A)\big) \cup (A \cap C) = \varnothing \cup C = C$.

$$\boxed{\text{Il existe une solution si et seulement si } C \subset A \subset B \text{ ; elle est alors unique : } X = (B \setminus A) \cup C.}$$

2. D'après la question 1, une partie X vérifie $A \cup X = B$ si et seulement si $A \subset B$ et $X = (B \setminus A) \cup Y$, où $Y = A \cap X$ est une partie de A. Réciproquement, toute partie Y de A fournit une solution, et deux parties Y différentes fournissent deux solutions différentes, puisque l'on retrouve Y comme $A \cap X$.

$$\boxed{\text{Si } A \subset B, \text{ les solutions sont les } X = (B \setminus A) \cup Y,\ Y \subset A \text{ ; sinon il n'y en a aucune.}}$$

Il y a donc autant de solutions que de parties de A, soit, d'après la proposition 6 du cours :

$$\boxed{2^k \text{ solutions lorsque } A \subset B.}$$

3. On raisonne élément par élément. Pour $x \in E$, l'appartenance à $A \Delta X$ est le « ou exclusif » des appartenances à A et à X. Si $x \in A$, alors $x \in A \Delta X \Leftrightarrow x \notin X$; si $x \notin A$, alors $x \in A \Delta X \Leftrightarrow x \in X$. L'égalité $A \Delta X = B$ impose donc, pour chaque x : si $x \in A$, alors $x \in X \Leftrightarrow x \notin B$; si $x \notin A$, alors $x \in X \Leftrightarrow x \in B$. Autrement dit, $x \in X$ exactement lorsque x appartient à une seule des parties A et B : nécessairement $X = A \Delta B$. Réciproquement, les mêmes équivalences montrent que $X = A \Delta B$ convient.

$$\boxed{X = A \Delta B \text{ est l'unique solution.}}$$

La situation rappelle l'équation $a + x = b$, d'unique solution $x = b - a$: on verra au chapitre 11 que $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ est un groupe, dans lequel chaque partie est son propre opposé.

4. Pour chaque élément x de E, un couple (X, Y) vérifiant $X \subset Y$ laisse exactement trois possibilités : $x \in X$ (et donc $x \in Y$), $x \in Y \setminus X$, ou $x \notin Y$. Ces choix sont indépendants d'un élément à l'autre, ce qui donne, par le principe multiplicatif évoqué dans le cours :

$$\boxed{3^n \text{ couples tels que } X \subset Y}$$

De même, pour $X \cap Y = \varnothing$, chaque élément est dans X seulement, dans Y seulement, ou dans aucune ; pour $X \cup Y = E$, il est dans X seulement, dans Y seulement, ou dans les deux.

$$\boxed{3^n \text{ couples dans chacun des trois cas.}}$$

Ce n'est pas une coïncidence. D'après le point (v) de la proposition 7 du cours, $X \subset Y \Leftrightarrow X \cap \overline{Y} = \varnothing$: remplacer Y par son complémentaire fait passer, un à un, des couples du premier type à ceux du deuxième. D'après les lois de De Morgan, $X \cap Y = \varnothing \Leftrightarrow \overline{X} \cup \overline{Y} = E$: remplacer X et Y par leurs complémentaires fait passer du deuxième type au troisième. Pour $n = 1$, on vérifie directement les trois couples $(\varnothing, \varnothing)$, $(\varnothing, E)$, (E, E) du premier type. ✓

EXERCICE 40 ⋆⋆⋆

1. On calcule $2^k(2m + 1)$ pour $m = 0, \ldots, 4$:

$$\boxed{A_0 : 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9} \qquad \boxed{A_1 : 2,\ 6,\ 10,\ 14,\ 18} \qquad \boxed{A_2 : 4,\ 12,\ 20,\ 28,\ 36}$$

L'ensemble A_0 est celui des entiers impairs, et A_k celui des entiers dont la plus grande puissance de 2 qui les divise est 2^k.

2. Il y a trois points à vérifier : les A_k sont des parties non vides de $\mathbb{N}^*$, ils recouvrent $\mathbb{N}^*$, et ils sont deux à deux disjoints.

- Chaque A_k est inclus dans $\mathbb{N}^*$ et contient 2^k.
- *Recouvrement*, par récurrence forte : $1 = 2^0 \times 1 \in A_0$. Soit $n \geqslant 1$ tel que tout entier de $[\![1\,;n]\!]$ appartienne à l'un des A_k. Si $n+1$ est impair, il appartient à A_0. Sinon $n+1 = 2p$ avec $1 \leqslant p \leqslant n$; par hypothèse $p = 2^j(2m+1)$, donc $n+1 = 2^{j+1}(2m+1) \in A_{j+1}$.
- *Disjonction.* Supposons $2^k(2m+1) = 2^\ell(2p+1)$ avec $k < \ell$. En divisant par 2^k, on obtient $2m+1 = 2^{\ell-k}(2p+1)$, nombre pair puisque $\ell - k \geqslant 1$: contradiction. Donc $A_k \cap A_\ell = \varnothing$ dès que $k \neq \ell$.

$$\boxed{(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est une partition de } \mathbb{N}^*.}$$

Autrement dit, tout entier $n \geqslant 1$ s'écrit de façon unique $n = 2^k(2m+1)$: l'exposant k est appelé la valuation 2-adique de n (chapitre 12).

3. Oui. Notons P la réunion des A_k d'indice k pair et I celle des A_k d'indice impair. D'après la question 2, P et I forment une partition de $\mathbb{N}^*$, puisque $1 \in P$ et $2 \in I$. Si $n \in A_k$, alors $2n \in A_{k+1}$: les indices de n et $2n$ sont de parités différentes, donc n et $2n$ ne sont jamais dans la même partie.

$$\boxed{P = \bigcup_{k \text{ pair}} A_k \text{ et } I = \bigcup_{k \text{ impair}} A_k \text{ conviennent.}}$$

Ce n'est pas la seule. Pour chaque entier impair m, les entiers m, $2m$, $4m$, … doivent alterner entre les deux parties ; une fois choisie la partie qui contient m, toute la suite est déterminée. Ces suites sont deux à deux disjointes (question 2), et le choix peut être fait indépendamment pour chaque entier impair m ; inversement, une partition ainsi construite convient, puisque n et $2n$ sont toujours dans la même suite.

$$\boxed{\text{Il existe une infinité de telles partitions : une par choix de la partie de chaque entier impair.}}$$

À retenir : il y en a même « beaucoup trop » pour être rangées en une suite : choisir la partie de chaque entier impair revient à choisir une partie de l'ensemble des entiers impairs, et l'exercice 48 montrera que de tels choix ne peuvent pas être numérotés.

EXERCICE 41 ⋆⋆⋆

1. Par récurrence sur $n \geqslant 1$. Pour $n = 1$, la liste $\varnothing$, $\{1\}$ convient. Supposons construite une liste convenable $C_0, \ldots, C_{N-1}$ des parties de $[\![1\,;n]\!]$, avec $N = 2^n$. On forme la liste des parties de $[\![1\,;n+1]\!]$ en parcourant cette liste, puis en la parcourant à l'envers après avoir ajouté $n+1$ à chaque partie :

$$C_0,\ C_1,\ \ldots,\ C_{N-1},\ C_{N-1} \cup \{n+1\},\ C_{N-2} \cup \{n+1\},\ \ldots,\ C_0 \cup \{n+1\}.$$

Les parties de $[\![1\,;n+1]\!]$ ne contenant pas $n+1$ sont les C_k, et celles qui le contiennent sont les $C_k \cup \{n+1\}$: chacune apparaît exactement une fois, ce qui fait bien $2N = 2^{n+1}$ parties. Deux termes consécutifs dans une même moitié sont adjacents, comme C_{k-1} et C_k. À la jonction, C_{N-1} et $C_{N-1} \cup \{n+1\}$ sont adjacents, ainsi que le dernier terme $C_0 \cup \{n+1\}$ et le premier C_0. Pour $n = 3$, on obtient

$$\boxed{\varnothing,\ \{1\},\ \{1,2\},\ \{2\},\ \{2,3\},\ \{1,2,3\},\ \{1,3\},\ \{3\}}$$

2. On adapte la construction précédente pour contrôler les premiers termes. Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ qu'il existe une liste cyclique adjacente $C_0, \ldots, C_{N-1}$ des parties de $[\![1\,;n]\!]$, avec $N = 2^n$, telle que $C_k = [\![1\,;k]\!]$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$ (avec $[\![1\,;0]\!] = \varnothing$). Pour $n = 1$, la liste $\varnothing$, $\{1\}$ convient.

Supposons une telle liste construite pour n, et notons $m = n+1$. Comme $N = 2^n \geqslant n+1$, les termes $C_0, \ldots, C_n$ existent. On forme la liste

$$\underbrace{C_0,\ \ldots,\ C_n}_{(1)},\quad \underbrace{C_n \cup \{m\},\ \ldots,\ C_0 \cup \{m\}}_{(2)},\quad \underbrace{C_{N-1} \cup \{m\},\ \ldots,\ C_{n+1} \cup \{m\}}_{(3)},\quad \underbrace{C_{n+1},\ \ldots,\ C_{N-1}}_{(4)}.$$

- Chaque partie de $[\![1\,;m]\!]$ figure exactement une fois : les C_k dans les blocs (1) et (4), les $C_k \cup \{m\}$ dans (2) et (3).

- Les termes consécutifs à l'intérieur de chaque bloc sont adjacents, car C_{k-1} et C_k le sont. Aux jonctions : C_n et $C_n \cup \{m\}$; puis $C_0 \cup \{m\}$ et $C_{N-1} \cup \{m\}$, adjacents car C_0 et C_{N-1} le sont, par cyclicité ; puis $C_{n+1} \cup \{m\}$ et C_{n+1} ; enfin le dernier terme C_{N-1} et le premier C_0. Si les blocs (3) et (4) sont vides, ce qui n'arrive que pour $N = n+1$, c'est-à-dire $n = 1$, la liste se referme directement de $C_0 \cup \{m\}$ sur C_0.
- Les premiers termes sont $C_k = [\![1\,;k]\!]$ pour $k \leqslant n$, puis $C_n \cup \{m\} = [\![1\,;n+1]\!]$ au rang $n+1 = m$.

On peut imposer $A_0 = \varnothing$ et $A_k = [\![1\,;k]\!]$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

Pour $n = 3$, la construction fournit $\varnothing$, $\{1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,3\}$, $\{3\}$, $\{2,3\}$, $\{2\}$, liste que l'on vérifie directement. La construction a été contrôlée par ordinateur jusqu'à $n = 8$.
À retenir : on démontre souvent un énoncé plus précis que celui demandé, ici la position des $n+1$ premiers termes, pour disposer d'une hypothèse de récurrence assez riche. On retrouve, sous une forme combinatoire, la leçon des exercices 19 et 24.

Exercices de synthèse

EXERCICE 42 ⋆⋆

1. **Fausse** Pour P fausse et Q vraie, $P \Rightarrow Q$ est vraie mais non $P \Rightarrow$ non Q est fausse. L'implication non $P \Rightarrow$ non Q est la contraposée de la *réciproque* $Q \Rightarrow P$, et non de $P \Rightarrow Q$ (schéma de la section 1.2.3 du cours).

2. **Fausse** La négation de $A \Rightarrow B$ est A et non B : la bonne négation est « $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 1$ et $x < 1$ ». Pour voir que la méthode proposée est fausse, appliquons-la à l'assertion vraie « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 1 \Rightarrow |x| \geqslant 1$ » : elle fournirait « $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 1$ et $|x| < 1$ », vraie elle aussi pour $x = 0$. Une assertion et sa négation ne peuvent pas être vraies ensemble.

3. **Vraie** Si $A \subset B$, alors $A \cup B \subset B$ et $B \subset A \cup B$, donc $A \cup B = B$. Réciproquement, $A \subset A \cup B = B$.

4. **Fausse** Le maillon $P(0) \Rightarrow P(1)$ manque. L'assertion $P(n)$: « $n = 0$ ou $n \geqslant 2$ » vérifie $P(0)$, et $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ pour tout $n \geqslant 1$ puisque $n+1 \geqslant 2$; pourtant $P(1)$ est fausse.

5. **Fausse** Les éléments de $\mathcal{P}(E \times F)$ sont des parties de $E \times F$, ceux de $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$ des couples de parties : ce ne sont pas les mêmes objets. Les nombres d'éléments diffèrent d'ailleurs : si E et F ont chacun un élément, $\mathcal{P}(E \times F)$ en a $2^1 = 2$, et $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$ en a $2 \times 2 = 4$.

6. **Vraie** Chaque intervalle $\left]0\,,\frac{1}{n}\right[$ est non vide, mais leur intersection est vide : un réel x commun vérifierait $0 < x < \frac{1}{n}$ pour tout n, ce que la propriété d'Archimède interdit. L'exercice 31 en donne un autre exemple avec les $[n\,,+\infty[$.

7. **Vraie** Le sens réciproque est clair. Supposons $E \times F = F \times E$. Soit $x \in E$; comme F est non vide, on choisit $y \in F$, et $(x,y) \in E \times F = F \times E$ donne $x \in F$. Donc $E \subset F$, et de même $F \subset E$. L'hypothèse « non vides » est indispensable : $\varnothing \times \{1\} = \{1\} \times \varnothing = \varnothing$.

8. **Vraie** Par contraposition : si $n = 3k+1$, alors $n^2 = 3(3k^2+2k)+1$; si $n = 3k+2$, alors $n^2 = 3(3k^2+4k+1)+1$. Dans les deux cas, n^2 n'est pas divisible par 3. On en déduit l'irrationalité de $\sqrt{3}$ comme celle de $\sqrt{2}$ dans le cours.

9. **Vraie** Comme $\varnothing \in \mathcal{P}(E)$, la partie $\{\varnothing\}$ est incluse dans $\mathcal{P}(E)$, c'est-à-dire $\{\varnothing\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$. Le piège porte sur la différence entre $\varnothing$ et $\{\varnothing\}$.

10. **Vraie** Soit A une partie non vide de $\mathbb{Z}$, majorée par un réel M, et m un entier supérieur à M. L'ensemble $\{m - a \mid a \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$; d'après la proposition 4 du cours, il possède un plus petit élément $m - a_0$. Pour tout $a \in A$, $m - a \geqslant m - a_0$, donc $a \leqslant a_0$: a_0 est le plus grand élément de A. Le résultat est faux dans $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$: $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < 1\}$ est majorée mais n'a pas de plus grand élément.

EXERCICE 43 ⋆⋆

1. Notons $m = \min(x_1, \dots, x_n)$ et $M = \max(x_1, \dots, x_n)$. Pour tout i, on a $m \leqslant x_i \leqslant M$; en sommant ces n encadrements, $nm \leqslant x_1 + \cdots + x_n \leqslant nM$, et l'on divise par $n > 0$.

$$\boxed{\min(x_1, \dots, x_n) \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leqslant \max(x_1, \dots, x_n)}$$

Autrement dit, l'un des x_i au moins est supérieur ou égal à la moyenne : c'est la forme générale de la question 3 de l'exercice 11.

2. Notons x_j le nombre d'objets dans le tiroir j, pour $j \in [\![1\,;n]\!]$. Alors $x_1 + \cdots + x_n = m$, et la question 1 donne un tiroir tel que $x_j \geqslant \frac{m}{n} > 1$. Comme x_j est un entier, $x_j \geqslant 2$.

$$\boxed{\text{Un tiroir au moins contient au moins deux objets.}}$$

3. Chaque inscrit a entre 0 et $N-1$ amis. Mais les valeurs 0 et $N-1$ ne peuvent pas être prises toutes les deux : un inscrit ayant $N-1$ amis est ami avec tous les autres, et aucun d'eux n'a alors 0 ami. Les nombres d'amis prennent donc leurs valeurs dans $[\![0\,;N-2]\!]$ ou dans $[\![1\,;N-1]\!]$, deux ensembles à $N-1$ éléments. En rangeant les N inscrits dans $N-1$ tiroirs, un par valeur possible, la question 2 donne deux inscrits dans le même tiroir.

$$\boxed{\text{Deux inscrits au moins ont le même nombre d'amis.}}$$

4. On range les entiers de $[\![1\,;2n]\!]$ dans les n tiroirs $\{1,2\}$, $\{3,4\}$, …, $\{2n-1, 2n\}$. Parmi $n+1$ entiers distincts, deux sont dans le même tiroir, et ils sont consécutifs. Avec n entiers, c'est faux : les entiers impairs 1, 3, …, $2n-1$ n'en contiennent pas deux consécutifs.

$$\boxed{\text{Vrai pour } n+1 \text{ entiers, faux pour } n.}$$

À retenir : la difficulté d'un argument de tiroirs est toujours de choisir les tiroirs. Le principe sera formalisé au chapitre 2 avec la notion d'application : une application d'un ensemble à m éléments dans un ensemble à $n < m$ éléments n'est jamais injective.

EXERCICE 44 ⋆⋆

1. Une partie A est 1-syndétique lorsque $A \cap \{n\} \neq \varnothing$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire lorsque tout entier naturel appartient à A.

$$\boxed{\text{La seule partie 1-syndétique de } \mathbb{N} \text{ est } \mathbb{N} \text{ elle-même.}}$$

Soit A une partie k-syndétique et $n \in \mathbb{N}$. Comme $[\![n\,;n+k-1]\!] \subset [\![n\,;n+k]\!]$, la partie non vide $A \cap [\![n\,;n+k-1]\!]$ est incluse dans $A \cap [\![n\,;n+k]\!]$, qui est donc non vide elle aussi.

$$\boxed{\text{Toute partie } k\text{-syndétique est } (k+1)\text{-syndétique.}}$$

Soit $k \geqslant 1$ et A_k l'ensemble des multiples de $k+1$ dans $\mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des entiers $j \in \mathbb{N}$ tels que $(k+1)j \geqslant n$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, puisqu'il contient n ; d'après la proposition 4 du cours, il possède un plus petit élément j_0. Si $j_0 = 0$, alors $n = 0$ et $0 \in A_k \cap [\![n\,;n+k]\!]$. Sinon, la minimalité de j_0 donne $(k+1)(j_0-1) < n$, c'est-à-dire $(k+1)j_0 < n+k+1$; le multiple $(k+1)j_0$ appartient alors à $[\![n\,;n+k]\!]$. Ainsi A_k est $(k+1)$-syndétique. En revanche, les k entiers 1, 2, …, k sont strictement compris entre 0 et $k+1$: aucun n'est multiple de $k+1$, et $A_k \cap [\![1\,;k]\!] = \varnothing$.

$$\boxed{\text{L'ensemble des multiples de } k+1 \text{ est } (k+1)\text{-syndétique sans être } k\text{-syndétique.}}$$

Pour $k = 2$, on obtient l'ensemble des multiples de 3, qui est 3-syndétique sans être 2-syndétique.

2. La partie A est syndétique si $\exists k \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ A \cap [\![n\,;n+k-1]\!] \neq \varnothing$. On nie les quantificateurs un à un, selon la proposition 2 du cours :

$$\boxed{A \text{ n'est pas syndétique} \iff \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \exists n \in \mathbb{N},\ A \cap [\![n\,;n+k-1]\!] = \varnothing}$$

Or dire que $A \cap [\![n\,;n+k-1]\!] = \varnothing$, c'est dire que $[\![n\,;n+k-1]\!] \subset \mathbb{N} \setminus A$. L'assertion obtenue affirme donc que, pour toute longueur $k \geqslant 1$, le complémentaire de A contient k entiers consécutifs.

A n'est pas syndétique $\iff$ $\mathbb{N} \setminus A$ contient des plages d'entiers consécutifs de toute longueur.

Piège : l'assertion « $A \cap [\![n\,;n+k-1]\!] \neq \varnothing$ » contient elle-même un quantificateur caché, « il existe $a \in A$ tel que $n \leqslant a \leqslant n+k-1$ ». La définition est donc de la forme $\exists k\ \forall n\ \exists a$, et sa négation de la forme $\forall k\ \exists n\ \forall a$: c'est le « pour tout a » final qui se traduit par une inclusion dans le complémentaire.

3. Parmi deux entiers consécutifs n et $n+1$, l'un est pair : si n est impair, $n+1$ est pair. L'ensemble des entiers pairs est donc 2-syndétique, mais pas 1-syndétique puisqu'il ne contient pas 1.

Les entiers pairs forment une partie syndétique.

Notons C l'ensemble des carrés et soit $k \geqslant 1$. Les k entiers k^2+1, …, k^2+k sont strictement compris entre k^2 et $(k+1)^2 = k^2+2k+1$. Aucun n'est un carré : pour $m \in \mathbb{N}$, si $m \leqslant k$, alors $m^2 \leqslant k^2$, et si $m \geqslant k+1$, alors $m^2 \geqslant (k+1)^2$. Ainsi $[\![k^2+1\,;k^2+k]\!] \subset \mathbb{N} \setminus C$ pour tout $k \geqslant 1$, et la question 2 conclut.

L'ensemble des carrés n'est pas syndétique.

L'écart entre deux carrés consécutifs, $(m+1)^2 - m^2 = 2m+1$, finit par dépasser toute longueur fixée : c'est ce que traduit le calcul précédent.

4. Soit $k \geqslant 1$ et $N = 2 \times 3 \times \cdots \times (k+1)$. Pour tout $j \in [\![2\,;k+1]\!]$, l'entier j divise N, donc il divise $N+j$; comme $N+j > j \geqslant 2$, l'entier $N+j$ possède un diviseur j tel que $1 < j < N+j$, et il n'est pas premier. Les k entiers consécutifs $N+2$, …, $N+k+1$ sont donc tous dans le complémentaire de l'ensemble des nombres premiers, et la question 2 s'applique.

L'ensemble des nombres premiers n'est pas syndétique.

Pour $k = 3$, on trouve $N = 24$ et les entiers $26 = 2 \times 13$, $27 = 3 \times 9$, $28 = 4 \times 7$. La méthode ne fournit pas la plus petite liste possible : 8, 9, 10 convenaient déjà.
À retenir : d'après le théorème 6 du cours, l'ensemble des nombres premiers est infini, et pourtant il n'est pas syndétique. Être infini, c'est contenir des éléments aussi grands que l'on veut ; être syndétique, c'est en contenir dans *toute* fenêtre d'une longueur fixée. La seconde propriété est beaucoup plus forte, et les nombres premiers ne la possèdent pas : ils se raréfient.

5. Posons

$$A = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} [\![j^2\,;j^2+j]\!] = \{0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 16,\ \dots\}.$$

Soit $k \geqslant 1$. D'une part, A contient les $k+1$ entiers consécutifs de $[\![k^2\,;k^2+k]\!]$. D'autre part, les k entiers de $[\![k^2+k+1\,;k^2+2k]\!]$ n'appartiennent pas à A : soit n l'un d'eux et $j \in \mathbb{N}$; si $j \leqslant k$, alors $j^2+j \leqslant k^2+k < n$, et si $j \geqslant k+1$, alors $j^2 \geqslant k^2+2k+1 > n$, de sorte que $n \notin [\![j^2\,;j^2+j]\!]$. Ainsi A et $\mathbb{N} \setminus A$ contiennent chacun des listes d'entiers consécutifs aussi longues que l'on veut. D'après la question 2, appliquée à A puis à $\mathbb{N} \setminus A$ (dont le complémentaire est A), aucune des deux parties n'est syndétique.

$A = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} [\![j^2\,;j^2+j]\!]$: ni A ni $\mathbb{N} \setminus A$ n'est syndétique.

Piège : la négation de « A est syndétique » n'est pas « $\mathbb{N} \setminus A$ est syndétique ». Les deux parties d'un partage de $\mathbb{N}$ peuvent échouer toutes deux, comme ici, et elles peuvent aussi réussir toutes deux, comme les entiers pairs et les entiers impairs. La question 2 donne la bonne traduction : A n'est pas syndétique exactement lorsque son complémentaire contient de longues plages d'entiers consécutifs.

EXERCICE 45 ⋆⋆⋆

1. Une partie est ouverte si, autour de chacun de ses points, elle contient tout un petit intervalle centré en ce point : on peut déplacer légèrement n'importe lequel de ses points sans en sortir.

La partie $\varnothing$ est ouverte, car la condition « pour tout $x \in \varnothing$ » est vide, donc vraie. La partie $\mathbb{R}$ est ouverte, n'importe quel $\varepsilon > 0$ convenant. Par conséquent $\varnothing = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} = \mathbb{R} \setminus \varnothing$ sont aussi fermées.

$\varnothing$ et $\mathbb{R}$ sont à la fois ouvertes et fermées.

Piège : « fermée » n'est pas le contraire d'« ouverte ». Une partie peut être les deux à la fois, comme ici, ou aucun des deux, comme à la question 5.

2. Soit $x > 0$; pour $\varepsilon = x$, on a $]0\,,2x[\subset]0\,,+\infty[$.

$]0\,,+\infty[$ est ouvert.

Le point 0 appartient à $[0\,,1]$, mais pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]-\varepsilon\,,\varepsilon[$ contient $-\frac{\varepsilon}{2} \notin [0\,,1]$.

$[0\,,1]$ n'est pas ouvert.

Son complémentaire est $]-\infty\,,0[\cup]1\,,+\infty[$. Pour $x < 0$, le réel $\varepsilon = |x|$ convient ; pour $x > 1$, le réel $\varepsilon = x - 1$ convient. Ce complémentaire est ouvert.

$[0\,,1]$ est fermé.

3. Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille de parties ouvertes et x un point de leur réunion. Il existe i_0 tel que $x \in O_{i_0}$, puis $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon\,,x+\varepsilon[\subset O_{i_0} \subset \bigcup_i O_i$. Pour deux ouverts O_1, O_2 et $x \in O_1 \cap O_2$, on dispose de ε_1 et ε_2, et $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ convient pour les deux.

Toute réunion d'ouverts est ouverte ; l'intersection de deux ouverts est ouverte.

Par les lois de De Morgan pour une famille (proposition 8 du cours), le complémentaire d'une intersection de fermés est une réunion d'ouverts, et celui d'une réunion de deux fermés une intersection de deux ouverts.

Toute intersection de fermés est fermée ; la réunion de deux fermés est fermée.

Par récurrence, ces résultats s'étendent à un nombre fini d'ouverts ou de fermés.

4. Non. D'après le cours, $\bigcap_{n\geqslant 1} \left]-\frac{1}{n}\,,\frac{1}{n}\right[= \{0\}$, qui n'est pas ouvert : tout intervalle $]-\varepsilon\,,\varepsilon[$ contient $\frac{\varepsilon}{2} \neq 0$.

Une intersection infinie d'ouverts n'est pas toujours ouverte.

La démonstration de la question 3 échoue précisément ici : les rayons $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ n'ont pas de plus petit élément strictement positif.

5. $\mathbb{Q}$ *n'est pas ouvert.* Le point 0 est rationnel. Pour tout $\varepsilon > 0$, la propriété d'Archimède donne n tel que $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$; le réel $\frac{\sqrt{2}}{n}$ appartient alors à $]-\varepsilon\,,\varepsilon[$ et il est irrationnel, d'après l'exercice 11 (produit du rationnel non nul $\frac{1}{n}$ par l'irrationnel $\sqrt{2}$).

$\mathbb{Q}$ *n'est pas fermé*, c'est-à-dire que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas ouvert. Le point $\sqrt{2}$ est irrationnel. Soit $\varepsilon > 0$ et n tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$; d'après l'exercice 5 (f), il existe un entier k tel que $k \leqslant n\sqrt{2} < k+1$. Alors $0 \leqslant \sqrt{2} - \frac{k}{n} < \frac{1}{n} < \varepsilon$, et le rationnel $\frac{k}{n}$ appartient à $]\sqrt{2}-\varepsilon\,,\sqrt{2}+\varepsilon[$.

$\mathbb{Q}$ n'est ni ouvert ni fermé.

On a démontré au passage que tout intervalle ouvert non vide contient des rationnels et des irrationnels : c'est la densité, qui sera étudiée au chapitre 7.

6. $\mathbb{Z}$ *est fermé* : son complémentaire est la réunion des intervalles $]k\,,k+1[$, $k\in\mathbb{Z}$, qui sont ouverts (pour $x\in]a\,,b[$, le réel $\varepsilon=\min(x-a,b-x)$ convient), donc ce complémentaire est ouvert d'après la question 3.

$S=\left\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}^*\right\}$ *n'est pas fermé* : le point 0 n'appartient pas à S, mais tout intervalle $]-\varepsilon\,,\varepsilon[$ contient un élément $\frac{1}{n}$ de S, par la propriété d'Archimède. Le complémentaire de S n'est donc pas ouvert.

$S\cup\{0\}$ *est fermé* : son complémentaire est

$$]-\infty\,,0[\cup]1\,,+\infty[\cup\bigcup_{n\geqslant 1}\left]\frac{1}{n+1}\,,\frac{1}{n}\right[,$$

réunion d'ouverts. En effet, si $0<x<1$ et $x\notin S$, l'entier n tel que $n\leqslant\frac{1}{x}<n+1$ vérifie $n\geqslant 1$ et $\frac{1}{n+1}<x\leqslant\frac{1}{n}$, avec $x\neq\frac{1}{n}$.

$$\boxed{\mathbb{Z}\text{ et }S\cup\{0\}\text{ sont fermés ; }S\text{ ne l'est pas.}}$$

À retenir : ajouter le point 0, vers lequel « s'accumulent » les éléments de S, suffit à rendre la partie fermée. Cette idée de point limite sera précisée en analyse.

EXERCICE 46 ⋆⋆⋆

1. Le produit ne dépend pas de l'ordre des termes : il suffit d'examiner les décompositions rangées par termes décroissants. Pour $n=6$, par exemple, on en trouve onze, de produits respectifs

$$\underbrace{6}_{(6)},\ \underbrace{5}_{(5,1)},\ \underbrace{8}_{(4,2)},\ \underbrace{4}_{(4,1,1)},\ \underbrace{9}_{(3,3)},\ \underbrace{6}_{(3,2,1)},\ \underbrace{3}_{(3,1,1,1)},\ \underbrace{8}_{(2,2,2)},\ \underbrace{4}_{(2,2,1,1)},\ \underbrace{2}_{(2,1,1,1,1)},\ \underbrace{1}_{(1,1,1,1,1,1)}.$$

On procède de même pour les autres valeurs de n, et l'on obtient le tableau suivant.

n	1	2	3	4	5	6
plus grand produit	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	$\boxed{9}$
décompositions optimales	(1)	(2)	(3)	(4), (2, 2)	(3, 2)	(3, 3)

On voit déjà apparaître les règles que la question 3 établira : le terme 1 ne sert à rien dès que $n\geqslant 2$, un terme 5 ou 6 gagne à être coupé en deux, et 4 fait aussi bien que $2+2$.

2. Soit $(x_1,\dots,x_p)$ une décomposition de n. Chaque terme vérifie $1\leqslant x_i\leqslant n$, et la somme des p termes, au moins égale à p, vaut n : on a donc $p\leqslant n$. Le produit est alors majoré :

$$x_1\times\cdots\times x_p\leqslant n^p\leqslant n^n.$$

L'ensemble des produits des décompositions de n est ainsi une partie de $\mathbb{Z}$ majorée par n^n, non vide puisqu'elle contient le produit n de la décomposition (n). D'après la question 10 de l'exercice 42, elle possède un plus grand élément.

$$\boxed{M_n\text{ existe, et }n\leqslant M_n\leqslant n^n.}$$

Piège : cette étape n'est pas une formalité. La question 3 raisonne sur une décomposition de produit maximal, et un raisonnement portant sur un objet dont on n'a pas établi l'existence peut aboutir à des absurdités. Ainsi, « soit N le plus grand entier naturel ; si $N\geqslant 2$, alors $N^2>N$, ce qui est impossible ; donc $N=1$ » est un raisonnement correct à partir d'une hypothèse fausse : le plus grand entier naturel n'existe pas.

3. (a) Soit $(x_1,\dots,x_p)$ une décomposition de n de produit M_n. On raisonne par l'absurde, en montrant qu'une décomposition contenant un terme interdit pourrait être modifiée en une décomposition de produit strictement plus grand.

Supposons qu'un terme x_i vaille 1. Comme $n \geqslant 2$, la décomposition (n) est exclue, donc $p \geqslant 2$ et il existe un autre terme x_j, avec $j \neq i$. Remplaçons les deux termes $x_i = 1$ et x_j par le seul terme $x_j + 1$: la somme est inchangée, et, en notant Q le produit des autres termes, égal à 1 s'il n'y en a pas, le produit passe de $Q \times 1 \times x_j$ à $Q\,(x_j + 1)$, qui est strictement plus grand. C'est contraire à la maximalité de M_n.

Supposons qu'un terme x_i vérifie $x_i \geqslant 5$. Remplaçons-le par les deux termes 2 et $x_i - 2$, qui sont des entiers non nuls de somme x_i. Le facteur x_i du produit est remplacé par

$$2\,(x_i - 2) = x_i + (x_i - 4) > x_i,$$

et le produit augmente strictement : c'est encore impossible.

Les termes d'une décomposition de produit M_n appartiennent tous à $\{2,\ 3,\ 4\}$.

3. (b) Partons d'une décomposition de produit M_n et remplaçons chacun de ses termes égaux à 4 par deux termes égaux à 2. La somme ne change pas, et le produit non plus, puisque $2 \times 2 = 4$: on obtient une décomposition de produit M_n formée de 2 et de 3. Si le terme 2 y figurait au moins trois fois, on remplacerait trois termes 2, de somme 6, par deux termes 3, de même somme ; le produit serait multiplié par $\frac{3\times3}{2\times2\times2} = \frac{9}{8} > 1$, ce qui contredirait la maximalité.

Il existe une décomposition de produit M_n formée de 2 et de 3, avec au plus deux 2.

4. Pour $n \geqslant 2$, considérons la décomposition de la question 3 (b), et notons $a \in \{0, 1, 2\}$ le nombre de ses termes égaux à 2, et b le nombre de ses termes égaux à 3. Alors $2a + 3b = n$ et $M_n = 2^a\,3^b$. Les trois valeurs possibles de $2a$ sont 0, 2 et 4, et une seule convient dans chaque cas.

- Si $n = 3q$, alors $2a = 3(q - b)$ est un multiple de 3, ce qui impose $a = 0$, puis $b = q$.
- Si $n = 3q + 1$, alors $2a - 1 = 3(q - b)$, et parmi -1, 1 et 3 seul 3 est multiple de 3 : $a = 2$, puis $b = q - 1$. On note que $q \geqslant 1$, puisque $n \geqslant 2$.
- Si $n = 3q + 2$, alors $2a - 2 = 3(q - b)$, et parmi -2, 0 et 2 seul 0 est multiple de 3 : $a = 1$, puis $b = q$.

Le cas $n = 1$ est à part : la seule décomposition est (1), et $M_1 = 1$.

$$\boxed{M_{3q} = 3^q\ (q \geqslant 1)} \qquad \boxed{M_{3q+1} = 4 \times 3^{q-1}\ (q \geqslant 1)} \qquad \boxed{M_{3q+2} = 2 \times 3^q\ (q \geqslant 0)}$$

On retrouve les valeurs de la question 1 : $M_4 = 4$, $M_5 = 6$, $M_6 = 9$. ✓ Comme $10 = 3 \times 3 + 1$ et $2026 = 3 \times 675 + 1$, on obtient

$$\boxed{M_{10} = 4 \times 3^2 = 36} \qquad \text{et} \qquad \boxed{M_{2026} = 4 \times 3^{674}.}$$

La valeur $M_{10} = 36$ est bien celle de la décomposition $(3, 3, 4)$ de l'énoncé, qui était donc optimale. Ces résultats ont été confirmés par ordinateur, en examinant toutes les décompositions pour $n \leqslant 60$.
À retenir : la méthode employée, qui consiste à supposer qu'un optimum existe puis à montrer qu'une modification locale l'améliorerait s'il ne vérifiait pas certaines conditions, s'appelle un *argument d'échange*. Elle est très répandue en optimisation et en algorithmique. La prédominance du terme 3 a une explication : si l'on découpe n en parts égales de taille x, le produit vaut $x^{n/x}$, et l'étude de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$, possible dès le chapitre 5, montre que ce produit est maximal pour $x = \mathrm{e} \approx 2{,}718$, dont 3 est l'entier le plus proche. Le cas $n = 1976$ a fait l'objet du problème 4 de l'Olympiade internationale de mathématiques de 1976 ; la réponse est $M_{1976} = 2 \times 3^{658}$.

EXERCICE 47 ⋆⋆⋆

1. Calculons S_m lorsque $r = 2$. En multipliant par 2, on décale les termes :

$$2S_m = 2 + 4 + \cdots + 2^m + 2^{m+1} = (S_m - 1) + 2^{m+1},$$

d'où $S_m = 2^{m+1} - 1$. Il suffit donc de donner une pièce de valeur 2^{m+1} et de recevoir une pièce de valeur 1 : avec $M = m + 1$, on prend $k_0 = -1$, $k_{m+1} = 1$ et tous les autres k_i nuls.

$$\boxed{S_m = 2^{m+1} - 1 \text{ se règle avec deux pièces.}}$$

Par exemple, $15 = 1 + 2 + 4 + 8$ se règle avec une pièce de 16, contre laquelle on reçoit une pièce de 1. Pour $m \geqslant 2$, c'est strictement mieux que les $m + 1$ pièces du paiement direct.

2. (a) On a $S_0 = 1$. Si $k_0 + k_1\, r + \cdots + k_M\, r^M = 1$, les k_i ne sont pas tous nuls, sinon la somme serait nulle. L'un d'eux est donc un entier non nul, de valeur absolue au moins égale à 1, et $|k_0| + \cdots + |k_M| \geqslant 1$.

$$\boxed{P(0) \text{ est vraie.}}$$

2. (b) Si $M = 0$, on complète la liste par un coefficient $k_1 = 0$: ni la somme réglée ni la somme des valeurs absolues ne changent. On peut donc supposer $M \geqslant 1$. Comme $m \geqslant 1$, on a $S_m - 1 = r + r^2 + \cdots + r^m = r\, S_{m-1}$, d'où

$$k_0 - 1 = (S_m - 1) - (k_1\, r + \cdots + k_M\, r^M) = r\left(S_{m-1} - (k_1 + k_2\, r + \cdots + k_M\, r^{M-1})\right).$$

$$\boxed{k_0 = 1 + tr, \quad \text{avec } t = S_{m-1} - (k_1 + k_2\, r + \cdots + k_M\, r^{M-1}) \in \mathbb{Z}.}$$

2. (c) L'égalité obtenue pour t s'écrit aussi

$$\boxed{(k_1 + t) + k_2\, r + \cdots + k_M\, r^{M-1} = S_{m-1}.}$$

La liste $(k_1 + t, k_2, \ldots, k_M)$, de longueur M, permet donc de régler S_{m-1}, et l'hypothèse $P(m-1)$, qui porte sur *toutes* les listes d'entiers relatifs, s'applique à elle :

$$|k_1 + t| + |k_2| + \cdots + |k_M| \geqslant m.$$

On rappelle que $|a + b| \leqslant |a| + |b|$ pour tous réels a et b, puisque $a + b$ et $-(a + b)$ sont tous deux majorés par $|a| + |b|$. Ainsi $|k_1 + t| \leqslant |k_1| + |t|$, et

$$\boxed{|k_1| + |k_2| + \cdots + |k_M| \geqslant m - |t|.}$$

2. (d) Notons $W = |k_0| + |k_1| + \cdots + |k_M|$. La question précédente donne $W \geqslant |k_0| + m - |t|$.

- Si $t = 0$, alors $k_0 = 1$ et $W \geqslant 1 + m$.
- Si $t \neq 0$, alors $|t| \geqslant 1$. L'inégalité rappelée en (c) donne $r\,|t| = |tr| \leqslant |1 + tr| + |-1|$, c'est-à-dire $|k_0| \geqslant r\,|t| - 1$. Par conséquent,

$$W \geqslant r\,|t| - 1 + m - |t| = m + (r-1)\,|t| - 1 \geqslant m + (r-1) - 1 = m + r - 2 \geqslant m + 1,$$

  la dernière inégalité venant de $r \geqslant 3$.

Dans les deux cas, $W \geqslant m + 1$: l'assertion $P(m)$ est vraie. Le principe de récurrence (théorème 3 du cours) montre alors que $P(m)$ est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$. Comme le paiement direct, avec $k_0 = k_1 = \cdots = k_m = 1$, utilise exactement $m + 1$ pièces, la minoration est atteinte.

$$\boxed{\text{Pour } r \geqslant 3, \text{ il faut au minimum } m + 1 \text{ pièces pour régler } S_m = 1 + r + \cdots + r^m.}$$

Autrement dit, rendre la monnaie ne permet jamais d'économiser une pièce sur cette somme. Ce résultat a été contrôlé par ordinateur pour $r \in \{3, 4, 5\}$ et $m \leqslant 3$, sur toutes les listes de coefficients compris entre -3 et 3.

3. L'hypothèse $r \geqslant 3$ n'a servi qu'à la toute dernière inégalité, $m + r - 2 \geqslant m + 1$, dans le cas $t \neq 0$. Pour $r = 2$, ce cas ne fournit que $W \geqslant m$, et la récurrence ne se propage plus. Ce n'est pas une faiblesse de la démonstration : la question 1 montre que $P(m)$ est fausse pour $r = 2$ dès que $m \geqslant 2$. Le paiement de la question 1 correspond précisément au cas $t \neq 0$, puisque $k_0 = -1 = 1 + (-1) \times 2$.

L'hypothèse $r \geqslant 3$ est indispensable.

À retenir : l'assertion $P(m)$ porte sur *toutes* les listes de coefficients, de toutes les longueurs, et c'est indispensable : l'hérédité applique l'hypothèse de récurrence à une liste nouvelle, $(k_1 + t, k_2, \ldots, k_M)$, et non à la liste de départ. Une récurrence dont l'hypothèse porterait sur une liste fixée ne pourrait pas aboutir. On retrouve la leçon des exercices 19 et 24 : l'hypothèse de récurrence doit être assez riche pour s'appliquer aux objets que fabrique l'hérédité. En base 2, l'égalité $1 + 2 + \cdots + 2^m = 2^{m+1} - 1$ sert au contraire en informatique pour accélérer certaines multiplications, en remplaçant une longue suite de chiffres 1 par une soustraction.

EXERCICE 48 ⋆⋆⋆⋆

1. Supposons par l'absurde qu'une telle suite (A_n) existe, et considérons la partie

$$D = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A_n\}.$$

C'est une partie de $\mathbb{N}$, donc il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $D = A_m$. Alors

$$m \in D \iff m \notin A_m \iff m \notin D,$$

ce qui est absurde.

Aucune suite de parties de $\mathbb{N}$ ne contient toutes les parties de $\mathbb{N}$.

La partie D est construite pour différer de chaque A_n au moins en un point, l'entier n lui-même : c'est l'argument diagonal de Cantor (1891).

2. D'après l'exercice 19, tout entier $n \geqslant 1$ s'écrit de façon unique $n = \sum_{j \in J_n} 2^j$, où J_n est une partie finie non vide de $\mathbb{N}$. Posons $F_0 = \varnothing$ et $F_n = J_n$ pour $n \geqslant 1$. Soit F une partie finie de $\mathbb{N}$. Si $F = \varnothing$, alors $F = F_0$. Sinon, l'entier $n = \sum_{j \in F} 2^j$ est au moins égal à 1, et l'unicité de l'écriture donne $J_n = F$, c'est-à-dire $F = F_n$.

F_n = ensemble des exposants de l'écriture de n en base 2 convient.

Par exemple, $13 = 2^3 + 2^2 + 2^0$ donne $F_{13} = \{0\,, 2\,, 3\}$. Chaque partie finie apparaît même exactement une fois dans la suite.

3. Les deux raisonnements reposent sur la même construction autoréférente. Dans le paradoxe de Russell, on considère l'ensemble des x tels que $x \notin x$; ici, l'ensemble des n tels que $n \notin A_n$, l'indice n jouant le rôle de l'objet qui « s'appartient ». Dans les deux cas, on aboutit à une équivalence du type $m \in D \Leftrightarrow m \notin D$.

Même argument diagonal : chez Russell, il interdit un ensemble ; ici, il interdit une suite.

À retenir : les questions 1 et 2 montrent qu'il y a « beaucoup plus » de parties de $\mathbb{N}$ que de parties finies de $\mathbb{N}$. Le chapitre 2 donnera un sens précis à cette comparaison, et généralisera l'argument diagonal à un ensemble E quelconque et à $\mathcal{P}(E)$.

EXERCICE 49 ⋆⋆⋆⋆

On appelle U et V les deux parties, et l'on raisonne par l'absurde : on suppose qu'aucune ne contient trois entiers en progression arithmétique. On écrira simplement « (a, b, c) interdit » pour rappeler qu'une progression (a, b, c) ne peut pas être contenue dans une seule partie.

1. *Premier cas :* 4 *et* 6 *sont dans la même partie*, disons U. Les progressions $(2, 4, 6)$, $(4, 5, 6)$ et $(4, 6, 8)$ forcent 2, 5 et 8 à être dans V. Mais $(2, 5, 8)$ est une progression contenue dans V : contradiction.

Second cas : 4 *et* 6 *sont dans des parties différentes* ; quitte à échanger les noms, $4 \in U$ et $6 \in V$.

- Si $5 \in U$: $(3,4,5)$ donne $3 \in V$; $(3,6,9)$ donne $9 \in U$; $(5,7,9)$ donne $7 \in V$; $(6,7,8)$ donne $8 \in U$; $(2,5,8)$ donne $2 \in V$; $(1,2,3)$ donne $1 \in U$. Mais alors $(1,5,9)$ est contenue dans U : contradiction.
- Si $5 \in V$: $(5,6,7)$ donne $7 \in U$; $(1,4,7)$ donne $1 \in V$; $(1,5,9)$ donne $9 \in U$; $(7,8,9)$ donne $8 \in V$; $(2,5,8)$ donne $2 \in U$; $(2,3,4)$ donne $3 \in V$. Mais alors $(1,3,5)$ est contenue dans V : contradiction.

Pour tout partage de $[\![1\,;9]\!]$ en deux parties, l'une contient une progression arithmétique.

2. Non. Les progressions arithmétiques de trois termes dans $[\![1\,;8]\!]$ sont au nombre de douze :

raison 1 : $(1,2,3)$, $(2,3,4)$, $(3,4,5)$, $(4,5,6)$, $(5,6,7)$, $(6,7,8)$
raison 2 : $(1,3,5)$, $(2,4,6)$, $(3,5,7)$, $(4,6,8)$
raison 3 : $(1,4,7)$, $(2,5,8)$

Le partage $\{1,2,5,6\}$, $\{3,4,7,8\}$ n'en laisse aucune dans une même partie, comme on le vérifie sur cette liste.

Pour trouver *tous* les partages exceptionnels, on reprend le raisonnement de la question 1, sans les progressions qui utilisent 9. Le premier cas mène toujours à une contradiction, car $(2,5,8)$ reste dans $[\![1\,;8]\!]$. Dans le second cas, avec $4 \in U$ et $6 \in V$:

- si $5 \in V$: $(5,6,7)$, $(1,4,7)$ et $(1,3,5)$ donnent successivement $7 \in U$, $1 \in V$, $3 \in U$; puis $(2,3,4)$ donne $2 \in V$ et $(2,5,8)$ donne $8 \in U$. On obtient $U = \{3,4,7,8\}$ et $V = \{1,2,5,6\}$;
- si $5 \in U$ et $7 \in V$: $(3,4,5)$, $(6,7,8)$, $(2,5,8)$, $(1,2,3)$ donnent $3 \in V$, $8 \in U$, $2 \in V$, $1 \in U$. On obtient $U = \{1,4,5,8\}$ et $V = \{2,3,6,7\}$;
- si $5 \in U$ et $7 \in U$: $(3,4,5)$, $(1,4,7)$, $(1,2,3)$, $(2,5,8)$ donnent $3 \in V$, $1 \in V$, $2 \in U$, $8 \in V$. On obtient $U = \{2,4,5,7\}$ et $V = \{1,3,6,8\}$.

Dans chaque cas, toutes les progressions de la liste ont été examinées : aucune n'est contenue dans une seule partie. Exactement trois partages font exception :

$\{1,2,5,6\}$ et $\{3,4,7,8\}$ $\quad$ $\{1,4,5,8\}$ et $\{2,3,6,7\}$ $\quad$ $\{1,3,6,8\}$ et $\{2,4,5,7\}$

Ce résultat a été confirmé par l'examen informatique des $2^8 = 256$ manières de répartir les entiers.

3. Soit $\mathbb{N}^*$ partagé en deux parties. Pour tout entier $k \geqslant 0$, les neuf entiers $k+1$, …, $k+9$ se répartissent entre les deux parties ; comme une translation conserve les progressions arithmétiques, la question 1 s'applique à eux et fournit une progression contenue dans une seule partie. En prenant $k = 0$, 9, 18, …, on obtient des blocs disjoints.

L'une des parties contient une infinité de progressions arithmétiques de trois termes.

À retenir : le nombre 9 est le plus petit possible, d'après la question 2. Ce résultat est le premier cas du théorème de van der Waerden (1927) : quel que soit le nombre de parties, et quelle que soit la longueur voulue, tout partage de $\mathbb{N}^*$ en un nombre fini de parties laisse dans l'une d'elles des progressions arithmétiques aussi longues que l'on veut.