EXERCICES – CHAPITRE 1

LOGIQUE ET ENSEMBLES

⋆ *application directe* ⋆⋆ *mise en œuvre* ⋆⋆⋆ *problème* ⋆⋆⋆⋆ *problème long, en autonomie*

Assertions et connecteurs logiques

EXERCICE 1 ⋆

1. Soit P, Q, R trois assertions. Parmi les assertions suivantes, déterminer celles qui sont vraies quelles que soient les valeurs de vérité de P, Q et R. Pour chacune des autres, donner des valeurs de P, Q, R qui la rendent fausse.
   (a) $(P \Rightarrow Q)$ ou $(Q \Rightarrow P)$
   (b) $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Leftrightarrow ((P \text{ et } Q) \Rightarrow R)$
   (c) $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$
   (d) $((P \Rightarrow Q) \text{ et } (P \Rightarrow \text{non } Q)) \Leftrightarrow \text{non } P$
   (e) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \text{ ou } R) \Rightarrow (Q \text{ ou } R))$
2. L'une des assertions précédentes justifie un mode de raisonnement du cours. Lequel ?
3. Sur une île, chaque habitant est soit un *chevalier*, qui dit toujours la vérité, soit un *fripon*, qui ment toujours. Deux habitants A et B déclarent :

   A : « B et moi sommes de même nature. » $\qquad$ B : « A est un fripon. »

   En notant a l'assertion « A est un chevalier » et b l'assertion « B est un chevalier », traduire chaque déclaration par une équivalence entre a, b et le contenu de la phrase prononcée, puis déterminer la nature de chacun.

EXERCICE 2 ⋆

1. Quatre cartes portent chacune un nombre sur une face et une lettre sur l'autre. Posées sur une table, elles montrent

A	B	1	2

   Quelles cartes faut-il retourner, et seulement celles-là, pour savoir si elles respectent la règle « au dos de chaque voyelle se trouve un nombre pair » ? Traduire la règle par une implication et expliquer la réponse à l'aide de sa contraposée.
2. Après une représentation de *Pelléas et Mélisande*, un journaliste hésite entre deux rédactions :
   (a) « Jamais le rôle de Mélisande n'a été si bien chanté. »
   (b) « Jamais si jeune cantatrice, aux si beaux cheveux, n'a si bien chanté Mélisande. »

   Lequel de ces deux compliments est le plus fort ? On pourra écrire chacun d'eux sous la forme « pour toute représentation passée r vérifiant…, la chanteuse de r a moins bien chanté ».

EXERCICE 3 ⋆⋆⋆

Pour deux assertions P et Q, on note $P \uparrow Q$ l'assertion non (P et Q).

1. Exprimer non P, puis P et Q, P ou Q et $P \Rightarrow Q$, en n'utilisant que P, Q et le seul connecteur $\uparrow$.
2. Un *connecteur binaire* associe à chaque couple de valeurs de vérité de (P, Q) une valeur de vérité. Combien existe-t-il de connecteurs binaires ?
3. Montrer que tout connecteur binaire peut s'exprimer à l'aide de P, Q et des seuls connecteurs « non », « et », « ou ». En déduire qu'il peut s'exprimer à l'aide du seul connecteur $\uparrow$.
4. Peut-on exprimer non P à l'aide de P et des seuls connecteurs « et », « ou » et $\Rightarrow$?

QUANTIFICATEURS

EXERCICE 4 ⋆

Dans tout l'exercice, f désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Traduire les phrases suivantes par des assertions quantifiées, puis écrire leur négation.
   (a) La fonction f ne s'annule pas.
   (b) La fonction f est constante.
   (c) La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur.
   (d) La suite (u_n) est constante à partir d'un certain rang.
   (e) La fonction f est périodique.
   (f) Tout réel positif est une valeur prise par f.
2. Traduire en français, sans aucun symbole mathématique, les assertions suivantes, puis donner un exemple de fonction qui vérifie chacune d'elles et un exemple de fonction qui ne la vérifie pas.

   (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ f(y) > f(x)$ (b) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ f(y) \geqslant f(x)$

EXERCICE 5 ⋆⋆

Déterminer si chacune des assertions suivantes est vraie ou fausse, en justifiant, puis écrire sa négation.

(a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x = y^2$
(b) $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y \leqslant x^2$
(c) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n} < \varepsilon$
(d) $\exists n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \varepsilon > 0,\ \frac{1}{n} < \varepsilon$
(e) $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2,\ \exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2,\ au + bv = 1$
(f) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{Z},\ n \leqslant x < n+1$
(g) $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - ax + 1 > 0$
(h) $\forall a \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ x^2 - ax + 1 < 0$

EXERCICE 6 ⋆⋆

Un élève a proposé les négations suivantes ; f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, (u_n) une suite réelle et ℓ un réel. Dire lesquelles sont correctes, corriger les autres en expliquant l'erreur commise, puis traduire en français l'assertion (b).

	Assertion	**Négation proposée**
(a)	$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$	$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant 0$
(b)	$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$	$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n > M$
(c)	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \lvert u_n - \ell\rvert \leqslant \varepsilon$	$\exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N,\ \lvert u_n - \ell\rvert > \varepsilon$
(d)	$\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$	$\exists x \in \mathbb{R},\ x > 0 \Rightarrow f(x) \leqslant 0$
(e)	$\exists ! \, x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$	$\exists ! \, x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$
(f)	$\forall x > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ f(x) > n$	$\exists x \leqslant 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) \leqslant n$

Pour la ligne (d), montrer de plus que l'assertion proposée comme négation est vraie pour *toute* fonction f : en quoi cela confirme-t-il qu'elle ne peut pas être la négation de (d) ?

EXERCICE 7 ⋆⋆

Déterminer si chacune des assertions suivantes est vraie ou fausse, en le démontrant.

(a) $1 = 0 \Rightarrow (\exists (p,q,r) \in \mathbb{Z}^3,\ p^3 + q^3 + r^3 = 114)$

(b) $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 2 \Rightarrow x \geqslant 3$

(c) $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^*)^2,\ x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

(d) $\exists x \in \mathbb{R}_+,\ \sqrt{x} < x$

(e) $\exists ! \, z \in \mathbb{R},\ \cos z = 0$

(f) $\exists x \in \mathbb{R},\ (x \leqslant x^2 \text{ et } x = \mathrm{e}^{-x})$

(g) $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N},\ nm$ est impair

(h) $\exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant \eta \Rightarrow x^2 \leqslant 1$

(i) $\exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \lvert x\rvert \leqslant \eta \Rightarrow x^2 \leqslant 1$

(j) $\exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \lvert x\rvert \leqslant \eta \Rightarrow x^2 \leqslant 10^{-18}$

(k) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \lvert x\rvert \leqslant \eta \Rightarrow x^2 \leqslant \varepsilon$

Que traduit l'assertion (k) ? En quoi diffère-t-elle de la suite d'assertions (i), (j) ?

EXERCICE 8 ⋆⋆

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est *bornée* si $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \lvert f(x)\rvert \leqslant M$.

1. Écrire avec des quantificateurs l'assertion « f n'est pas bornée ». Donner, en le démontrant, un exemple de fonction bornée et un exemple de fonction non bornée.
2. Quelles sont les fonctions qui vérifient l'assertion $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R},\ \lvert f(x)\rvert \leqslant M$, obtenue en échangeant les deux quantificateurs ?
3. Montrer que f est bornée si et seulement si $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ a \leqslant f(x) \leqslant b$.
4. Montrer que f est bornée si et seulement si $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ a \leqslant f(x) - f(y) \leqslant b$.

EXERCICE 9 ⋆⋆⋆

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère les trois assertions suivantes, qui ne diffèrent que par l'ordre des quantificateurs :

$$(C) : \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \lvert x\rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - f(0)\rvert < \varepsilon$$
$$(L) : \quad \exists \delta > 0,\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \lvert x\rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - f(0)\rvert < \varepsilon$$
$$(M) : \quad \forall \delta > 0,\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \lvert x\rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - f(0)\rvert < \varepsilon$$

1. Montrer que (L) entraîne (C).
2. Montrer que (L) équivaut à une propriété simple de f, que l'on énoncera sans quantificateur portant sur ε. En déduire une fonction qui vérifie (C) sans vérifier (L).
3. Caractériser de même les fonctions qui vérifient (M). Donner une fonction qui ne vérifie pas (M).
4. Les assertions (C) et (M) sont-elles comparables ?

L'assertion (C) est la définition de la continuité en 0, qui sera étudiée au chapitre 8.

EXERCICE 10 ⋆⋆⋆

Dans cet exercice, une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *croissante* si $\forall (n,m)\in\mathbb{N}^2,\ n\leqslant m\Rightarrow u_n\leqslant u_m$, et *pseudo-croissante* si

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \exists M\in\mathbb{N},\ \forall m\geqslant M,\ u_m\geqslant u_n.$$

1. Traduire en français la définition d'une suite pseudo-croissante. Montrer que toute suite croissante est pseudo-croissante.
2. Montrer que la somme de deux suites pseudo-croissantes est pseudo-croissante.
3. Montrer que la suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas pseudo-croissante.
4. En étudiant la suite $\left(n+(-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que la réciproque de la question 1 est fausse.
5. On dit que (u_n) est *pseudo-décroissante* si $\forall n\in\mathbb{N},\ \exists M\in\mathbb{N},\ \forall m\geqslant M,\ u_m\leqslant u_n$. On suppose que (u_n) est à la fois pseudo-croissante et pseudo-décroissante.
   (a) Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $u_n=u_k$ pour tout $n\geqslant N$.
   (b) En déduire que (u_n) est constante.

Modes de raisonnement

EXERCICE 11 ⋆

1. Soit n un entier relatif. Montrer que si n^2-1 n'est pas divisible par 8, alors n est pair.
2. Montrer que le réel $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel.
3. Soit $a_1,\ldots,a_5$ cinq réels de somme 1. Montrer que l'un d'eux au moins est supérieur ou égal à $\frac{1}{5}$.
4. Soit x un réel tel que $|x|\leqslant\varepsilon$ pour tout réel $\varepsilon>0$. Montrer que $x=0$.
5. Soit r un rationnel et x un irrationnel. Montrer que $r+x$ est irrationnel, puis que rx l'est aussi lorsque $r\neq 0$. La somme de deux irrationnels est-elle toujours irrationnelle ? Et leur produit ?

EXERCICE 12 ⋆

Chacune des affirmations suivantes est fausse. Le démontrer à l'aide d'un contre-exemple aussi simple que possible.

1. Pour tout réel x, $x^2>x$.
2. Pour tous réels a et b, $|a+b|=|a|+|b|$.
3. Si un entier est divisible par 4 et par 6, alors il est divisible par 24.
4. Pour tout entier naturel n, l'entier n^2+n+41 est premier.

5. Si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$, alors elle est croissante sur $\mathbb{R}$.

Pour l'affirmation 4, combien de valeurs de n faut-il tester avant de trouver un contre-exemple ? Pour l'affirmation 5, le résultat devient-il vrai si l'on remplace $]-\infty, 0[$ par $]-\infty, 0]$?

EXERCICE 13 ⋆

Voici des extraits de démonstrations portant sur des notions qui ne seront étudiées que plus tard. Sans chercher à comprendre de quoi il est question, identifier le mode de raisonnement employé dans chacun d'eux, en citant les mots qui le signalent.

1. *« Supposons que l'ensemble des nombres premiers congrus à 3 modulo 4 soit fini, et notons p_1, …, p_r ses éléments. L'entier $N = 4p_1 \cdots p_r - 1$ possède alors un facteur premier congru à 3 modulo 4, qui ne peut être aucun des p_i. C'est impossible. »*
2. *« Si la suite (u_n) ne tend pas vers 0, les sommes partielles $u_0 + \cdots + u_n$ ne forment pas une suite de Cauchy ; la série $\sum u_n$ diverge donc. Ainsi, la convergence de la série entraîne que $u_n \to 0$. »*
3. *« Si $p = 2$, le résultat se vérifie directement sur les quatre éléments de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. On peut donc supposer p impair, et alors… »*
4. *« Supposons que $f = g + h$, avec g paire et h impaire. Alors $f(-x) = g(x) - h(x)$, d'où nécessairement $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. Réciproquement, les fonctions ainsi définies conviennent. »*
5. *« On raisonne sur la dimension n de l'espace. Pour $n = 1$, toute matrice est diagonale. Supposons le résultat établi pour les espaces de dimension $n-1$, et soit u un endomorphisme d'un espace de dimension n… »*
6. *« Si A est inversible, alors $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1$, donc $\det(A) \neq 0$. Inversement, si $\det(A) \neq 0$, la comatrice fournit un inverse de A. »*

EXERCICE 14 ⋆

La *conjecture de Goldbach forte* affirme que tout entier pair supérieur ou égal à 4 est la somme de deux nombres premiers. La *conjecture de Goldbach faible* affirme que tout entier impair supérieur ou égal à 7 est la somme de trois nombres premiers.

1. Montrer que la conjecture forte entraîne la conjecture faible.
2. En 2013, Harald Helfgott a annoncé une démonstration de la conjecture faible. En admettant cette démonstration, que peut-on en déduire sur la conjecture forte ?

EXERCICE 15 ⋆⋆

1. Montrer que pour tout entier relatif n, l'entier $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 6.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x+1| - |2x-3| \geqslant 1$.
3. Soit x et y deux réels. Montrer que $\max(x,y) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$, puis exprimer de même $\min(x,y)$. Proposer ensuite une expression de $\max(x,y,z)$ à l'aide de valeurs absolues, pour trois réels x, y, z.

EXERCICE 16 ⋆⋆

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

$$\text{(i)}\ \ \forall A\in\mathbb{R},\ \exists n\in\mathbb{N},\ u_n\geqslant A \qquad\qquad \text{(ii)}\ \ \forall A\in\mathbb{R},\ \exists n\in\mathbb{N},\ u_n> A.$$

2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On rappelle que f est strictement croissante si $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x<y\Rightarrow f(x)<f(y)$. Montrer que f est strictement croissante si et seulement si

$$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \ (a\leqslant b\Leftrightarrow f(a)\leqslant f(b)).$$

3. Soit a et b deux réels. Montrer que l'assertion $\forall x\in]0\,,1[,\ ax+b\geqslant 0$ équivaut à ($b\geqslant 0$ et $a+b\geqslant 0$). Interpréter graphiquement.

EXERCICE 17 ⋆⋆

Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant chacune des conditions suivantes.

1. Pour tous réels x et y : $f(x+y)=f(x)+y$.
2. Pour tous réels x et y : $f(x)\,f(y)-f(xy)=x+y$.
3. Pour tout réel x : $f(x)+x\,f(-x)=1+x$.
4. Pour tous réels x et y : $f(y-f(x))=2-x-y$.

EXERCICE 18 ⋆⋆⋆

1. On cherche toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que

$$(*)\qquad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad x\,f(x)+y^2+f(xy)=f(x+y)^2-f(x)\,f(y).$$

   (a) Soit f une solution. Calculer $f(0)$, puis montrer que $f(y)^2=y^2$ pour tout réel y. Peut-on en conclure que $f=\mathrm{id}$ ou $f=-\mathrm{id}$?

   (b) Montrer que $f(x)=x$ pour tout réel x. On pourra appliquer $(*)$ avec $y=x$.

   (c) Conclure.

2. Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que $f(xy)=f(x)+f(y)$ pour tous réels x et y. Comparer avec le logarithme népérien.

3. Déterminer l'ensemble des réels x tels que $x^{n+2}\leqslant x^{n+1}+x^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ (avec la convention $x^0=1$).

EXERCICE 19 ⋆⋆

1. Pour $n\geqslant 1$, on pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$. On souhaite montrer que $S_n\leqslant 2$ pour tout $n\geqslant 1$.

   (a) Expliquer pourquoi une récurrence portant directement sur l'assertion « $S_n\leqslant 2$ » ne permet pas d'établir l'hérédité.

   (b) Démontrer une inégalité plus forte par récurrence, et conclure.

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0=u_1=1$ et $u_{n+2}=u_{n+1}+2u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Calculer ses premiers termes, conjecturer une expression de u_n de la forme $\alpha\,2^n+\beta\,(-1)^n$, puis la démontrer.

3. Montrer que tout entier $n\geqslant 1$ s'écrit comme somme de puissances de 2 deux à deux distinctes, puis que cette écriture est unique à l'ordre des termes près.

EXERCICE 20 ⋆⋆

Chacune des deux démonstrations suivantes établit un résultat manifestement faux. Localiser précisément l'erreur.

1. *« Montrons que pour tout $n \geqslant 1$, l'assertion $P(n)$: « n points quelconques du plan sont toujours alignés » est vraie. $P(1)$ est évidente. Soit $n \geqslant 1$ tel que $P(n)$ soit vraie, et soit M_1, …, M_{n+1} des points du plan. D'après $P(n)$, les points M_1, …, M_n sont alignés sur une droite D, et les points M_2, …, M_{n+1} sur une droite D'. Les droites D et D' contiennent toutes deux les points M_2, …, M_n : elles sont donc égales, et les $n+1$ points sont alignés. »*
   Pour quelles valeurs de n l'argument d'hérédité est-il incorrect ? L'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est-elle fausse pour ces valeurs, ou seulement mal démontrée ?
2. *« Montrons par récurrence forte que $2^n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est vrai pour $n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^k = 1$ pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$. Alors $2^{n+1} = \dfrac{2^n \times 2^n}{2^{n-1}} = \dfrac{1 \times 1}{1} = 1$. »*

EXERCICE 21 ⋆⋆

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux entiers naturels a_n et b_n tels que $(3+2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$. On exprimera a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(3-2\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$.
3. En déduire qu'il existe une infinité de couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x^2 - 2y^2 = 1$. Donner les trois premiers.

EXERCICE 22 ⋆⋆



Le jeu des *tours de Hanoï* se joue avec trois piquets et n disques percés de tailles deux à deux distinctes. Au départ, les n disques sont empilés sur le premier piquet, du plus grand en bas au plus petit en haut (figure, pour $n = 3$). Un coup consiste à déplacer le disque situé au sommet d'un piquet vers un autre piquet, à condition de ne jamais poser un disque sur un disque plus petit. Le but est d'amener tous les disques sur le troisième piquet.

1. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, le jeu peut être résolu.
2. Déterminer, en le démontrant, le nombre minimal de coups nécessaires.

EXERCICE 23 ⋆⋆

On définit la suite de Fibonacci par $F_1 = F_2 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \geqslant 1$.

1. Calculer F_n pour $1 \leqslant n \leqslant 10$.
2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, il y a exactement F_{n+1} façons de paver un rectangle de taille $2 \times n$ avec des dominos de taille 2×1, posés verticalement ou horizontalement.
3. Montrer que $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$ pour tous entiers $n \geqslant 2$ et $m \geqslant 1$.
4. Montrer que $F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n+1}$ pour tout $n \geqslant 2$.
5. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$F_1F_2 + F_2F_3 + \cdots + F_{2n-1}F_{2n} = F_{2n}^2 \qquad \text{et} \qquad F_1F_2 + F_2F_3 + \cdots + F_{2n}F_{2n+1} = F_{2n+1}^2 - 1.$$

EXERCICE 24 ⋆⋆⋆

On considère les deux énoncés suivants.

(A) Pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe des entiers a_1, …, a_n strictement positifs tels que $a_1^2 + \cdots + a_n^2$ soit un carré parfait.

(B) Il existe une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ d'entiers strictement positifs telle que, pour tout $n \geqslant 1$, $a_1^2 + \cdots + a_n^2$ soit un carré parfait.

1. Avant de chercher à les démontrer, écrire ces deux énoncés avec des quantificateurs et expliquer en quoi ils diffèrent. Y a-t-il une implication entre eux ?
2. Soit $c \geqslant 3$ un entier impair. Montrer que $c^2 + \left(\frac{c^2-1}{2}\right)^2$ est le carré d'un entier impair.
3. Démontrer l'énoncé (B), en construisant la suite par récurrence à partir de $a_1 = 3$. Calculer a_2, a_3, a_4.

EXERCICE 25 ⋆⋆⋆

Sur un circuit fermé sont répartis $n \geqslant 1$ dépôts d'essence, qui contiennent à eux tous exactement la quantité d'essence nécessaire pour faire un tour du circuit. Montrer qu'en partant, réservoir vide, d'un dépôt bien choisi, une voiture peut faire le tour complet du circuit sans jamais tomber en panne. On supposera que le réservoir est assez grand pour contenir toute l'essence du circuit, et l'on pourra raisonner par récurrence sur n.

EXERCICE 26 ⋆⋆⋆

Dans un *tournoi* à $n \geqslant 2$ équipes, chaque équipe rencontre une fois chacune des autres, et chaque match désigne un vainqueur : il n'y a pas de match nul.

1. Montrer que, quelle que soit l'issue des matchs, on peut numéroter les équipes E_1, E_2, …, E_n de sorte que, pour tout $i \in [\![1\,;n-1]\!]$, l'équipe E_i ait battu l'équipe E_{i+1}.
2. Une telle numérotation est-elle unique ? Peut-on toujours exiger de plus que E_n ait battu E_1 ?
3. Un tournoi est dit *équilibré* si chaque équipe a gagné autant de matchs qu'elle en a perdu. Montrer qu'il existe un tournoi équilibré à n équipes si et seulement si n est impair.

EXERCICE 27 ⋆⋆⋆⋆

On dispose de timbres de deux valeurs, a et b centimes, en quantité illimitée. On dit qu'un entier naturel n est *réalisable* s'il existe deux entiers naturels u et v tels que $n = au + bv$.

1. Dans le cas $a = 3$ et $b = 5$, déterminer l'ensemble des entiers réalisables.
2. On suppose désormais $a \geqslant 2$ et $b \geqslant 2$. Que se passe-t-il si a et b ne sont pas premiers entre eux ?
3. On suppose a et b premiers entre eux. Déterminer le plus grand entier non réalisable, et démontrer le résultat.
4. Combien y a-t-il d'entiers non réalisables ?

Ensembles

EXERCICE 28 ⋆

1. Écrire en extension les ensembles suivants, en prenant garde aux éléments qui se répètent :

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leqslant 10\}, \qquad B = \left\{\frac{p}{q} \;\middle|\; (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ p \leqslant q \leqslant 3\right\}, \qquad C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 = x\}.$$

2. Écrire en extension $\mathcal{P}(\varnothing)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))$ et $\mathcal{P}\Big(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))\Big)$. Combien ont-ils d'éléments ?

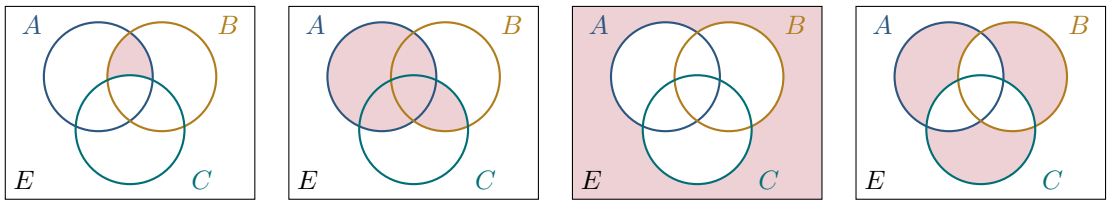
3. On pose $E = \{1,\ \{1\},\ \{1,2\}\}$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ?

$$1 \in E \qquad \{1\} \in E \qquad \{1\} \subset E \qquad \{\{1\}\} \subset E \qquad 2 \in E \qquad \{1,2\} \subset E \qquad \varnothing \in E \qquad \varnothing \subset E$$

4. On considère les parties $A = [-1\,,3]$ et $B =]2\,,5]$ de $\mathbb{R}$. Déterminer $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \,\Delta\, B$, le complémentaire de $A \cup B$ dans $\mathbb{R}$, et $(A \cup B) \cap \mathbb{N}$.

EXERCICE 29 ⋆

Dans chacun des diagrammes ci-dessous, A, B et C sont trois parties d'un ensemble E. Exprimer la zone coloriée à l'aide des symboles $\cap$, $\cup$, $\setminus$ et du passage au complémentaire dans E. Pour le diagramme (d), donner deux expressions différentes et démontrer qu'elles sont égales.

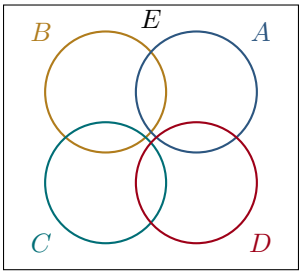


(a) (b) (c) (d)

EXERCICE 30 ⋆⋆

Soit E un ensemble et A, B, C, D des parties de E ; on note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E.

1. Simplifier $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$, puis $A \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$.
2. Un diagramme de Venn à trois ensembles suggère l'égalité $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (A \cap B \cap C)$. La démontrer.
3. Le diagramme ci-dessous suggère l'égalité $(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap D) \cup (B \cap C)$.
   (a) Expliquer pourquoi cette égalité est suspecte, en échangeant les rôles de C et D.
   (b) Montrer par un exemple qu'elle est fausse.
   (c) Pourquoi le diagramme nous a-t-il trompés ? Quelle inclusion est néanmoins vraie ?



La zone commune à $A \cup B$ et à $C \cup D$ semble y être formée des deux seules lentilles $A \cap D$ et $B \cap C$.

EXERCICE 31 ⋆⋆

1. Montrer que $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - y = 2\} = \{(t+1\,,\ 3t+1) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
2. Montrer que $\{7a + 12b \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2\} = \mathbb{Z}$, puis déterminer l'ensemble $\{6a + 10b \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$.
3. Déterminer les ensembles suivants, en justifiant chaque égalité par une double inclusion :

$$\bigcup_{n \geqslant 1} \left[\frac{1}{n}\,, n\right], \qquad \bigcap_{n \geqslant 1} \left[-\frac{1}{n}\,, 1 + \frac{1}{n}\right[, \qquad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n\,, +\infty[, \qquad \bigcup_{n \geqslant 1} \left]-\infty\,, 1 - \frac{1}{n}\right].$$

EXERCICE 32 ⋆⋆⋆

1. Montrer que $\bigcup_{x\in[0,1]}]x-1\,,x+1[=]-1\,,2[$, puis déterminer $\bigcap_{x\in[0,1]}]x-1\,,x+1[$.
2. Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de parties de $\mathbb{R}$. On définit ses limites inférieure et supérieure par

$$\liminf E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geqslant n} E_k \qquad \text{et} \qquad \limsup E_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geqslant n} E_k.$$

   (a) Traduire avec des quantificateurs, puis en français, l'appartenance d'un réel x à $\liminf E_n$ et à $\limsup E_n$. En déduire que $\liminf E_n \subset \limsup E_n$.

   (b) Déterminer $\liminf E_n$ et $\limsup E_n$ lorsque $E_n = [n\,,+\infty[$ pour tout n, puis lorsque $E_n = \left[(-1)^n\, n\,,+\infty\right[$.

   (c) Déterminer $\liminf E_n$ et $\limsup E_n$ lorsque $E_n = A$ pour n pair et $E_n = B$ pour n impair, où A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$.

EXERCICE 33 ⋆⋆

Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E. Démontrer ou réfuter chacune des affirmations suivantes ; une affirmation fausse sera réfutée par un contre-exemple aussi simple que possible.

1. Si $A\cap B = A\cup B$, alors $A = B$.
2. Si $A\cup B \subset A\cap C$, alors $B\subset A\subset C$.
3. Si $A\cap B\subset A\cap C$ et $A\cup B\subset A\cup C$, alors $B\subset C$. L'une des deux hypothèses suffit-elle ?
4. Si $C\subset A\cup B$, alors $C\subset A$ ou $C\subset B$.
5. $A\setminus(B\cup C) = (A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.
6. $A\setminus(B\setminus C) = (A\setminus B)\setminus C$.
7. Si D est une quatrième partie de E telle que $A\subset C$, $B\subset D$, $C\cap D = \varnothing$ et $A\cup B = C\cup D$, alors $A = C$ et $B = D$.

Déterminer enfin une condition nécessaire et suffisante portant sur A et C pour que l'égalité $(A\cup B)\cap C = A\cup(B\cap C)$ soit vraie pour toute partie B de E.

EXERCICE 34 ⋆⋆

Soit E un ensemble. Démontrer les équivalences suivantes.

1. Pour tous x, y de E : $x = y \Leftrightarrow (\forall A\in\mathcal{P}(E),\ x\in A\Rightarrow y\in A)$.
2. Pour toutes parties A, B de E : $A\subset B \Leftrightarrow (\forall X\in\mathcal{P}(E),\ A\cap X\subset B\cap X)$.
3. Pour toutes parties A, B de E, donner une assertion simple équivalente à chacune des deux suivantes :

   (a) $\exists X\in\mathcal{P}(E)\setminus\{\varnothing\},\ A\cap X = \varnothing$ (b) $\forall X\in\mathcal{P}(E),\ X\cap A\neq\varnothing\Rightarrow X\cap B\neq\varnothing$.

4. Pour toutes parties A, B de $\mathbb{N}$:

   $A = B \Leftrightarrow (\forall n\in\mathbb{N},\ A\cup\{n\} = B\cup\{n\})$ et $A = B \Leftrightarrow (\forall n\in\mathbb{N},\ A\cap[\![0\,;n]\!] = B\cap[\![0\,;n]\!])$.

   La seconde équivalence reste-t-elle vraie si l'on remplace les deux intersections par des réunions ?

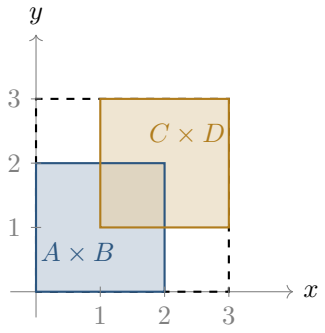
EXERCICE 35 ⋆⋆

1. Soit A une partie non vide de $\mathbb{Z}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n \in A \Rightarrow (n-1 \in A$ et $n+1 \in A)$. Montrer que $A = \mathbb{Z}$.
2. Montrer que toute suite décroissante d'entiers naturels est stationnaire, c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang. On utilisera le fait que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.
3. En déduire qu'il n'existe aucune suite strictement décroissante d'entiers naturels. Ce résultat fonde le raisonnement par *descente infinie* : l'utiliser pour démontrer à nouveau que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

EXERCICE 36 ⋆⋆

Soit E, F deux ensembles, et A, C deux parties de E, B, D deux parties de F.

1. Comparer $\mathcal{P}(E \cap F)$ et $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$, puis $\mathcal{P}(E \cup F)$ et $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$. À quelle condition nécessaire et suffisante ces deux derniers ensembles sont-ils égaux ?
2. Montrer que $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.
3. Comparer $(A \times B) \cup (C \times D)$ et $(A \cup C) \times (B \cup D)$, en s'aidant de la figure ci-dessous où $E = F = \mathbb{R}$.
4. Montrer que le disque $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ ne peut pas s'écrire $X \times Y$, avec X et Y deux parties de $\mathbb{R}$.



$A = B = [0\,,2]$
$C = D = [1\,,3]$
en pointillés : $[0\,,3]^2$

EXERCICE 37 ⋆⋆

1. Soit A, B, C trois ensembles non vides tels que $A \times B \subset B \times C$. Montrer que $A \subset C$. Le résultat subsiste-t-il si l'on ne suppose plus B non vide ? et A ?
2. Soit Ω un ensemble et E, F deux parties de Ω telles que $E \times F \subset (F \times \Omega) \cup (\Omega \times E)$. Montrer que $E \subset F$ ou $F \subset E$.

EXERCICE 38 ⋆⋆⋆

1. Pour deux parties A et B de $\mathbb{R}$, on note $A \oplus B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$.
   (a) Déterminer $\{0\,,1\} \oplus \{1\,,4\}$, puis $[0\,,1] \oplus [2\,,5]$.
   (b) Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que $A \oplus \mathbb{R} = \mathbb{R}$.
   (c) Montrer que $(A_1 \cap A_2) \oplus B \subset (A_1 \oplus B) \cap (A_2 \oplus B)$ pour toutes parties A_1, A_2, B de $\mathbb{R}$. Y a-t-il toujours égalité ?
2. Pour toute partie P de $\mathbb{R}^2$, on pose

$$\widehat{P} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R},\ (x, y) \in P\} \qquad \text{et} \qquad \check{P} = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall y \in \mathbb{R},\ (x, y) \in P\}.$$

(a) Dessiner $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \leqslant 1\}$, puis déterminer $\widehat{H}$ et $\check{H}$. Quelle est l'interprétation géométrique de $\widehat{P}$?

(b) Montrer que $\widehat{P \cup Q} = \widehat{P} \cup \widehat{Q}$ et $\widehat{P \cap Q} \subset \widehat{P} \cap \widehat{Q}$ pour toutes parties P, Q de $\mathbb{R}^2$, et que cette inclusion peut être stricte.

(c) Énoncer et démontrer les propriétés analogues pour $\check{P}$.

EXERCICE 39 ⋆⋆⋆

Soit E un ensemble et A, B, C trois parties de E.

1. Discuter, selon A, B et C, l'existence d'une partie X de E vérifiant à la fois $A \cup X = B$ et $A \cap X = C$, et déterminer toutes les solutions lorsqu'il en existe.
2. Déterminer les parties X de E telles que $A \cup X = B$. Lorsque E est fini et que A possède k éléments, combien y a-t-il de solutions ?
3. Montrer que l'équation $A \Delta X = B$, d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$, possède une unique solution, que l'on déterminera.
4. On suppose que E est fini, à n éléments. Dénombrer les couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$; puis ceux tels que $X \cap Y = \varnothing$; puis ceux tels que $X \cup Y = E$. Expliquer le résultat obtenu.

EXERCICE 40 ⋆⋆⋆

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $A_k = \{2^k(2m + 1) \mid m \in \mathbb{N}\}$.

1. Écrire les cinq plus petits éléments de A_0, de A_1 et de A_2.
2. Montrer que la famille $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}^*$.
3. Existe-t-il une partition de $\mathbb{N}^*$ en deux parties telle qu'aucune d'elles ne contienne à la fois un entier et son double ? Si oui, combien en existe-t-il ?

EXERCICE 41 ⋆⋆⋆

Soit $n \geqslant 1$. On dit que deux parties de $[\![1\,;n]\!]$ sont *adjacentes* si l'on passe de l'une à l'autre en ajoutant ou en retirant un seul élément.

1. Montrer qu'on peut ranger les 2^n parties de $[\![1\,;n]\!]$ en une liste $A_0, A_1, \ldots, A_{2^n-1}$, où chaque partie figure exactement une fois, de sorte que A_{k-1} et A_k soient adjacentes pour tout $k \in [\![1\,;2^n - 1]\!]$, et qu'en outre A_{2^n-1} et A_0 soient adjacentes. Écrire une telle liste pour $n = 3$.
2. Montrer qu'on peut imposer de plus $A_0 = \varnothing$ et $A_k = [\![1\,;k]\!]$ pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$.

Une telle liste est un code de Gray *; on l'utilise pour coder des positions de sorte que deux positions voisines ne diffèrent que d'un bit.*

Exercices de synthèse

EXERCICE 42 ⋆⋆

Vrai ou faux. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

1. Pour toutes assertions P et Q, l'assertion $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\text{non } P \Rightarrow \text{non } Q)$ est vraie.
2. La négation de « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 1 \Rightarrow x \geqslant 1$ » est « $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 1$ et $x < 1$ ».
3. Pour toutes parties A et B d'un ensemble E : $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.
4. Si $P(0)$ est vraie et si $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ pour tout $n \geqslant 1$, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Pour tous ensembles E et F : $\mathcal{P}(E \times F) = \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$.
6. L'intersection d'une famille de parties toutes non vides peut être vide.
7. Pour tous ensembles E et F non vides : $E \times F = F \times E \Leftrightarrow E = F$.
8. Pour tout entier n, si n^2 est divisible par 3, alors n est divisible par 3.
9. Pour tout ensemble E : $\{\varnothing\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.
10. Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ possède un plus grand élément.

EXERCICE 43 ⋆⋆

1. Soit $n \geqslant 1$ et $x_1, \ldots, x_n$ des réels. Montrer que
$$\min(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leqslant \max(x_1, \ldots, x_n).$$
2. *Principe des tiroirs.* On range m objets dans n tiroirs, avec $m > n \geqslant 1$. Déduire de la question précédente qu'un tiroir au moins contient au moins deux objets.
3. Sur un réseau social comptant $N \geqslant 2$ inscrits, chacun peut être ami avec tout autre inscrit, mais pas avec lui-même, et l'amitié est réciproque. Montrer que deux inscrits au moins ont le même nombre d'amis.
4. Montrer que parmi $n + 1$ entiers choisis dans $[\![1\,;2n]\!]$, deux au moins sont consécutifs. Est-ce encore vrai avec n entiers ?

EXERCICE 44 ⋆⋆

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une partie A de $\mathbb{N}$ est *k-syndétique* si elle contient au moins un élément de toute liste de k entiers naturels consécutifs, c'est-à-dire si
$$\forall n \in \mathbb{N},\ A \cap [\![n\,;n+k-1]\!] \neq \varnothing,$$
et l'on dit que A est *syndétique* si elle est k-syndétique pour au moins un entier $k \geqslant 1$.

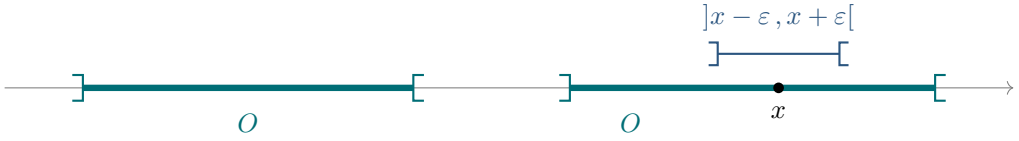
1. Déterminer les parties 1-syndétiques de $\mathbb{N}$. Montrer qu'une partie k-syndétique est aussi $(k+1)$-syndétique, puis donner, pour tout $k \geqslant 1$, une partie $(k+1)$-syndétique qui n'est pas k-syndétique.
2. Écrire avec des quantificateurs l'assertion « A n'est pas syndétique », puis montrer qu'elle équivaut à la phrase « $\mathbb{N} \setminus A$ contient des listes d'entiers consécutifs aussi longues que l'on veut ».
3. L'ensemble des entiers pairs est-il syndétique ? Et l'ensemble $\{m^2 \mid m \in \mathbb{N}\}$ des carrés d'entiers ?
4. Montrer que l'ensemble des nombres premiers n'est pas syndétique. On pourra, pour $k \geqslant 1$, considérer les k entiers $N+2$, $N+3$, …, $N+k+1$, pour un entier N bien choisi.
5. Construire une partie A de $\mathbb{N}$ telle que ni A ni $\mathbb{N} \setminus A$ ne soit syndétique.

EXERCICE 45 ⋆⋆⋆

On dit qu'une partie O de $\mathbb{R}$ est *ouverte* si

$$\forall x \in O,\ \exists \varepsilon > 0,\quad]x-\varepsilon\,,x+\varepsilon[\ \subset O,$$

et qu'une partie F de $\mathbb{R}$ est *fermée* si son complémentaire $\mathbb{R}\setminus F$ est ouvert.



La figure illustre la définition : autour de chaque point x de O, on peut placer un petit intervalle ouvert entièrement contenu dans O.

1. Traduire la définition d'une partie ouverte en une phrase française, sans symbole. Les parties $\varnothing$ et $\mathbb{R}$ sont-elles ouvertes ? fermées ?
2. Montrer que $]0\,,+\infty[$ est ouvert, que $[0\,,1]$ n'est pas ouvert, mais qu'il est fermé.
3. Montrer qu'une réunion quelconque de parties ouvertes est ouverte, et que l'intersection de deux parties ouvertes est ouverte. Que peut-on en déduire pour les parties fermées ?
4. L'intersection d'une famille infinie de parties ouvertes est-elle toujours ouverte ?
5. Montrer que $\mathbb{Q}$ n'est ni ouvert ni fermé.
6. Les parties $\mathbb{Z}$, $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ et $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ sont-elles fermées ?

EXERCICE 46 ⋆⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *décomposition* de n toute liste $(x_1, \dots, x_p)$ d'entiers naturels non nuls, de longueur $p \geqslant 1$, telle que $x_1 + \cdots + x_p = n$; son *produit* est l'entier $x_1 \times \cdots \times x_p$. On cherche le plus grand produit d'une décomposition de n. Par exemple, les décompositions $(5,5)$, $(2,2,2,2,2)$ et $(3,3,4)$ de 10 ont pour produits 25, 32 et 36.

1. Pour chaque $n \in [\![1\,;6]\!]$, déterminer le plus grand produit d'une décomposition de n en examinant toutes ses décompositions.
2. Dans le cas général, montrer que l'ensemble des produits des décompositions de n possède un plus grand élément, que l'on note M_n.
3. On suppose $n \geqslant 2$ et l'on considère une décomposition de n dont le produit vaut M_n.
   (a) Montrer qu'aucun de ses termes ne vaut 1 et qu'aucun n'est supérieur ou égal à 5.
   (b) Montrer qu'il existe une décomposition de n, de produit M_n, dont tous les termes valent 2 ou 3, et dans laquelle le terme 2 figure au plus deux fois.
4. En déduire la valeur de M_n selon que n s'écrit $3q$, $3q+1$ ou $3q+2$, avec $q \in \mathbb{N}$. Calculer M_{10} et M_{2026}.

EXERCICE 47 ⋆⋆⋆

Soit $r \geqslant 2$ un entier. Dans un pays imaginaire, les pièces de monnaie valent 1, r, r^2, r^3… unités. Pour régler une somme, on peut donner des pièces et en recevoir en retour. Si l'on note k_i le nombre de pièces de valeur r^i données, diminué du nombre de pièces de cette valeur reçues, la somme réglée est

$$k_0 + k_1\, r + k_2\, r^2 + \cdots + k_M\, r^M, \qquad \text{avec } M \in \mathbb{N} \text{ et } (k_0, \dots, k_M) \in \mathbb{Z}^{M+1},$$

et au moins $|k_0| + |k_1| + \cdots + |k_M|$ pièces ont changé de main. Pour $m \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_m = 1 + r + r^2 + \cdots + r^m;$$

cette somme se règle évidemment avec $m+1$ pièces.

1. On suppose $r = 2$. Montrer que, pour tout $m \geqslant 1$, la somme S_m peut être réglée en ne faisant changer de main que deux pièces.
2. On suppose désormais $r \geqslant 3$. Pour $m \in \mathbb{N}$, on note $P(m)$ l'assertion : pour tout $M \in \mathbb{N}$ et tout $(k_0, \dots, k_M) \in \mathbb{Z}^{M+1}$,
$$k_0 + k_1\, r + \cdots + k_M\, r^M = S_m \implies |k_0| + |k_1| + \cdots + |k_M| \geqslant m + 1.$$
   (a) Démontrer $P(0)$.
   (b) Soit $m \geqslant 1$ tel que $P(m-1)$ soit vraie, et $(k_0, \dots, k_M)$ une liste d'entiers relatifs telle que $k_0 + k_1\, r + \cdots + k_M\, r^M = S_m$. Expliquer pourquoi l'on peut supposer $M \geqslant 1$, puis montrer qu'il existe un entier relatif t tel que $k_0 = 1 + tr$.
   (c) Montrer que
   $$(k_1 + t) + k_2\, r + \cdots + k_M\, r^{M-1} = S_{m-1},$$
   et en déduire que $|k_1| + \cdots + |k_M| \geqslant m - |t|$.
   (d) Conclure, en distinguant les cas $t = 0$ et $t \neq 0$. Quel est le plus petit nombre de pièces qui permette de régler S_m ?
3. À quel endroit l'hypothèse $r \geqslant 3$ a-t-elle servi ? Que devient le raisonnement de la question 2 lorsque $r = 2$?

EXERCICE 48 ⋆⋆⋆⋆

1. Montrer qu'il n'existe aucune suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de $\mathbb{N}$ telle que toute partie de $\mathbb{N}$ soit égale à l'un des A_n.
2. Montrer qu'en revanche, il existe une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties *finies* de $\mathbb{N}$ telle que toute partie finie de $\mathbb{N}$ soit égale à l'un des F_n.
3. Comparer le raisonnement de la première question avec le paradoxe de Russell évoqué dans le cours.

EXERCICE 49 ⋆⋆⋆⋆

On partage l'ensemble $[\![1\,;9]\!]$ en deux parties.

1. Montrer que l'une au moins des deux parties contient trois entiers distincts en progression arithmétique.
2. Le résultat subsiste-t-il si l'on remplace $[\![1\,;9]\!]$ par $[\![1\,;8]\!]$? Le cas échéant, déterminer tous les partages de $[\![1\,;8]\!]$ qui font exception.
3. Que peut-on en déduire pour un partage de $\mathbb{N}^*$ en deux parties ?