CORRIGÉ – CHAPITRE 2

APPLICATIONS ET RELATIONS BINAIRES

⋆ *application directe* ⋆⋆ *mise en œuvre* ⋆⋆⋆ *problème* ⋆⋆⋆⋆ *problème long, en autonomie*

Applications

EXERCICE 1 ⋆

1. D'après la condition $(*)$ du cours, une partie Γ du plan est le graphe d'une application de E dans $\mathbb{R}$ lorsque chaque droite verticale d'abscisse $x \in E$ la rencontre en exactement un point, et que les droites d'abscisse $x \notin E$ ne la rencontrent pas.

- **(a)** Pour tout réel x, la courbe contient le seul point $(x, x^3 - x)$ d'abscisse x.

$$\boxed{\text{C'est le graphe de } x \mapsto x^3 - x, \text{ avec } E = \mathbb{R}.}$$

- **(b)** Le seul candidat est $E = [-1\,,1]$, ensemble des abscisses des points du cercle. Mais la droite d'abscisse 0 coupe le cercle en $(0,1)$ et $(0,-1)$.

$$\boxed{\text{Ce n'est le graphe d'aucune application : l'unicité est en défaut.}}$$

- **(c)** Pour $x \in [-1\,,1]$, la droite d'abscisse x rencontre le demi-cercle supérieur au seul point $(x, \sqrt{1-x^2})$, et pour $|x| > 1$ elle ne le rencontre pas.

$$\boxed{\text{C'est le graphe de } x \mapsto \sqrt{1-x^2}, \text{ avec } E = [-1\,,1].}$$

- **(d)** Pour $x > -1$, les deux points $(x, \pm\sqrt{x+1})$ appartiennent à la courbe.

$$\boxed{\text{Ce n'est le graphe d'aucune application : l'unicité est en défaut.}}$$

Piège : changer l'ensemble E ne permet pas de « réparer » le cercle. L'ensemble E est imposé par la courbe : c'est l'ensemble des premières composantes de ses points. On ne peut donc pas retirer de points à la courbe en restreignant E ; seule une partie plus petite du plan, comme le demi-cercle (c), peut être un graphe.

2. Un couple (y,x) appartient à la partie échangée Γ' si et seulement si $(x,y) \in \Gamma$, c'est-à-dire $x = y^2 - 1$. En renommant les variables, $\Gamma' = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid t = s^2 - 1\}$, et chaque réel s fournit exactement un point de Γ'.

$$\boxed{\Gamma' \text{ est le graphe de l'application } \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ s \mapsto s^2 - 1.}$$

Géométriquement, l'échange des coordonnées est la symétrie par rapport à la droite $y = x$, celle qui relie les graphes d'une bijection et de sa réciproque à la section 2.5.3 du cours.

3. D'après le lemme 6 du cours, l'ensemble $E \times F$ a $3 \times 2 = 6$ éléments, donc $2^6 = 64$ parties. Une partie est un graphe si chacun des trois éléments de E y figure dans exactement un couple : il suffit de choisir l'image de 1, de 2 et de 3, avec deux choix à chaque fois.

$$\boxed{64 \text{ parties, dont } 2^3 = 8 \text{ graphes}}$$

En général, $E \times F$ a pn éléments, donc 2^{pn} parties, parmi lesquelles n^p graphes, comme le démontrera l'exercice 25. Cette formule justifie la notation F^E pour l'ensemble des applications de E dans F : il a $(\operatorname{card} F)^{\operatorname{card} E}$ éléments.

EXERCICE 2 ⋆

Deux applications sont égales si et seulement si elles ont le même ensemble de départ, le même ensemble d'arrivée et la même image en chaque point.

1. Mêmes ensembles, et $\sqrt{x^2} = |x|$ pour tout réel x, car $|x|$ est l'unique réel positif dont le carré vaut x^2.

$$\boxed{f = g}$$

2. Les ensembles d'arrivée diffèrent : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+$.

$$\boxed{f \neq g}$$

Ce n'est pas une subtilité : la seconde est surjective, la première ne l'est pas, puisque -1 n'a pas d'antécédent.

3. Mêmes ensembles, et pour $x \neq 0$: $\ln(x^2) = \ln\left(|x|^2\right) = 2\ln|x|$.

$$\boxed{f = g}$$

On notera que $x \mapsto 2\ln x$ ne serait même pas une application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$: c'est la valeur absolue qui rend l'égalité possible.

4. Pour $x \geqslant 0$, on a bien $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$, mais les ensembles de départ diffèrent : $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}$.

$$\boxed{f \neq g}$$

5. Mêmes ensembles, et pour tout entier n, $\cos(n\pi) = (-1)^n$.

$$\boxed{f = g}$$

EXERCICE 3 ⋆⋆

1. Pour $x \in E$, chacun des deux nombres $\mathbf{1}_A(x)$ et $\mathbf{1}_B(x)$ vaut 0 ou 1. On examine les quatre cas :

- $\min\left(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(x)\right) = 1$ exactement lorsque les deux valent 1, c'est-à-dire lorsque $x \in A \cap B$;
- $\max\left(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(x)\right) = 1$ exactement lorsque l'un au moins vaut 1, c'est-à-dire lorsque $x \in A \cup B$;
- $\left(\mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_B(x)\right)^2$ vaut 1 lorsque les deux valeurs diffèrent, 0 sinon : c'est le cas où x appartient à exactement une des deux parties.

$$\boxed{\min(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_{A\cap B} \qquad \max(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_{A\cup B} \qquad (\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B)^2 = \mathbf{1}_{A\Delta B}}$$

2. La fonction $\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$ vaut 2 en tout point de $A \cap B$, et 0 ou 1 ailleurs.

$$\boxed{\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B \text{ est une indicatrice } \iff A \cap B = \varnothing, \text{ et c'est alors } \mathbf{1}_{A\cup B}.}$$

3. D'après la question 1, $\mathbf{1}_{A\Delta B}(x)$ vaut 1 si et seulement si $\mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) = 1$: c'est le reste de la division de $\mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) \in \{0, 1, 2\}$ par 2. On écrit donc $\mathbf{1}_{A\Delta B} \equiv \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$ [2], la congruence ayant lieu en chaque point. Deux fonctions à valeurs dans $\{0, 1\}$ congrues modulo 2 en chaque point sont égales. Or

$$\mathbf{1}_{(A\Delta B)\Delta C} \equiv \mathbf{1}_{A\Delta B} + \mathbf{1}_C \equiv \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C \ [2],$$
$$\mathbf{1}_{A\Delta(B\Delta C)} \equiv \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_{B\Delta C} \equiv \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C \ [2].$$

$$\boxed{(A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C = A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C)}$$

De même, grâce à la compatibilité des congruences avec le produit (proposition 10 du cours),

$$\mathbf{1}_{A\cap(B\Delta C)} = \mathbf{1}_A\, \mathbf{1}_{B\Delta C} \equiv \mathbf{1}_A(\mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C) = \mathbf{1}_{A\cap B} + \mathbf{1}_{A\cap C} \equiv \mathbf{1}_{(A\cap B)\Delta(A\cap C)} \ [2].$$

$$\boxed{A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C)}$$

4. D'après le calcul précédent, $x \in A \Delta B \Delta C$ si et seulement si $\mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) + \mathbf{1}_C(x)$ est impair.

$A \Delta B \Delta C$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à exactement une ou aux trois parties.

À retenir : les indicatrices transforment le calcul sur les parties en calcul sur des nombres. Pour la différence symétrique, ce sont des calculs modulo 2 : la différence symétrique est une « addition sans retenue », ce qui explique son associativité, si pénible à établir par des diagrammes de Venn.

EXERCICE 4 ⋆⋆

Supposons que f ne soit pas constante, et montrons que g l'est. Il existe a, b dans E tels que $f(a) \neq f(b)$; l'hypothèse appliquée au couple (a, b) donne $g(a) = g(b)$. Soit maintenant $x \in E$; on distingue deux cas.

- Si $f(x) \neq f(a)$, l'hypothèse appliquée à (x, a) donne $g(x) = g(a)$.
- Si $f(x) = f(a)$, alors $f(x) \neq f(b)$, et l'hypothèse appliquée à (x, b) donne $g(x) = g(b) = g(a)$.

Dans les deux cas $g(x) = g(a)$.

Si f n'est pas constante, alors g est constante.

Piège : l'hypothèse ne dit pas que, pour chaque couple, c'est toujours la même des deux égalités qui est vraie. On ne peut donc pas conclure en une ligne : il faut un point d'appui, le couple (a, b), et une disjonction des cas. La conclusion « f ou g est constante » se démontre en établissant « si f ne l'est pas, alors g l'est », comme au chapitre 1.

Image directe et image réciproque

EXERCICE 5 ⋆

1. La fonction sinus prend toutes les valeurs de $[-1\,,1]$ sur tout intervalle de longueur 2π, et n'en prend pas d'autre. Sur $[0\,,\frac{\pi}{2}]$, elle croît de 0 à 1 ; sur $[-\pi\,,\frac{\pi}{2}]$, elle atteint -1 en $-\frac{\pi}{2}$ et 1 en $\frac{\pi}{2}$.

$$\sin(\mathbb{R}) = \sin(\mathbb{R}_+) = \sin([0\,,2\pi]) = \sin\left(\left[-\pi\,,\frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1\,,1] \qquad \sin\left(\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]\right) = [0\,,1]$$

Piège : sur $[-\pi\,,\frac{\pi}{2}]$, les images des bornes sont 0 et 1 ; s'en contenter donnerait $[0\,,1]$, ce qui est faux, car la fonction n'est pas monotone sur cet intervalle.

2. On résout les inéquations correspondantes, en se servant du cercle trigonométrique :

$$\sin^{-1}([-1\,,1]) = \mathbb{R} \qquad \sin^{-1}([0\,,1]) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2k\pi\,,(2k+1)\pi] \qquad \sin^{-1}([3\,,4]) = \varnothing$$

$$\sin^{-1}(\{1\}) = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \qquad \sin^{-1}(\{-1\,,1\}) = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

3. L'écriture $\sin^{-1}(1)$ désignerait l'image de 1 par une application réciproque de la fonction sinus, qui n'existe pas : la fonction sinus n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En revanche, l'image réciproque d'une partie est définie pour toute application.

$\sin^{-1}(\{1\})$ est une partie de $\mathbb{R}$, infinie ; $\sin^{-1}(1)$ n'a pas de sens.

EXERCICE 6 ⋆

On met d'abord f sous forme canonique : $f(x) = 2(x-1)^2 - 1$. La fonction f est décroissante sur $]-\infty\,,1]$, croissante sur $[1\,,+\infty[$, et son minimum vaut $f(1) = -1$.

1. On calcule les images en tenant compte des variations :

- sur $[0\,,1]$, f décroît de $f(0) = 1$ à $f(1) = -1$;
- sur $\mathbb{R}_-$, f décroît de $+\infty$ à $f(0) = 1$, qu'elle atteint ;
- sur $\mathbb{R}_+$, elle atteint son minimum -1 en 1 et tend vers $+\infty$;
- sur $[-2\,,2]$, le minimum est -1 et le maximum $f(-2) = 17$, car $f(2) = 1$.

$$\boxed{f([0\,,1]) = [-1\,,1] \qquad f(\mathbb{R}_-) = [1\,,+\infty[\qquad f(\mathbb{R}_+) = [-1\,,+\infty[\qquad f([-2\,,2]) = [-1\,,17]}$$

2. On résout :

- $f(x) = 1 \iff (x-1)^2 = 1 \iff x \in \{0\,,2\}$;
- $f(x) = -1 \iff x = 1$;
- $0 \leqslant f(x) \leqslant 1 \iff \frac{1}{2} \leqslant (x-1)^2 \leqslant 1 \iff \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant |x-1| \leqslant 1$;
- $-2 \leqslant f(x) \leqslant 1 \iff (x-1)^2 \leqslant 1$, la première inégalité étant toujours vraie.

$$\boxed{f^{-1}(\{1\}) = \{0\,,2\} \qquad f^{-1}(\{-1\}) = \{1\} \qquad f^{-1}([-2\,,1]) = [0\,,2]}$$

$$\boxed{f^{-1}([0\,,1]) = \left[0\,,1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[1+\frac{\sqrt{2}}{2}\,,2\right]}$$

3. L'application Φ n'est pas injective, puisque $\Phi(\{0\}) = \Phi(\{2\}) = \{1\}$. Elle n'est pas surjective, puisque toute image $f(A)$ est contenue dans $f(\mathbb{R}) = [-1\,,+\infty[$: la partie $\{-5\}$ n'est pas atteinte. Inversement, toute partie B de $[-1\,,+\infty[$ est atteinte : comme f prend toutes les valeurs de $[-1\,,+\infty[$, on a $f(f^{-1}(B)) = B$.

$$\boxed{\Phi \text{ n'est ni injective ni surjective, et son image est } \mathcal{P}([-1\,,+\infty[).}$$

On retrouve, au niveau des parties, les défauts de f elle-même : l'exercice 22 montrera que c'est un fait général.

EXERCICE 7 ⋆⋆

1. On a $f(2) = f(\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}$: l'application f n'est pas injective. Pour la surjectivité, soit $w \in \mathbb{C}$. Pour $z \neq 0$,

$$f(z) = w \iff z^2 - wz + 1 = 0.$$

Cette équation du second degré possède au moins une solution dans $\mathbb{C}$, à condition de savoir que tout nombre complexe possède une racine carrée, ce que l'on admet ici et que le chapitre consacré aux nombres complexes établira. Ses solutions sont non nulles, car leur produit vaut 1.

$$\boxed{f \text{ n'est pas injective ; elle est surjective.}}$$

2. Pour $x > 0$, l'inégalité $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ équivaut à $(x-1)^2 \geqslant 0$. Réciproquement, pour $y \geqslant 2$, l'équation $x^2 - yx + 1 = 0$ a un discriminant $y^2 - 4 \geqslant 0$ et des racines réelles positives. Par imparité, on obtient les valeurs $\leqslant -2$ sur $\mathbb{R}_-^*$. Pour $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{U}$, on a $\frac{1}{z} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ et $f(z) = 2\cos\theta$, qui décrit $[-2\,,2]$.

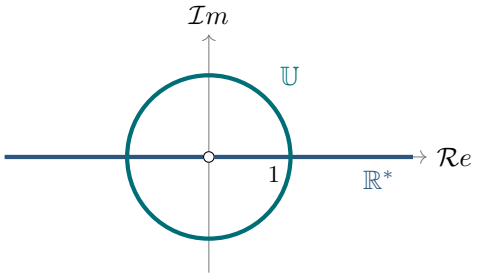
$$\boxed{f(\mathbb{R}^*) =]-\infty\,,-2] \cup [2\,,+\infty[\qquad f(\mathbb{U}) = [-2\,,2]}$$

3. Écrivons $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$. Alors $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ et

$$f(z) = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + \mathrm{i}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta.$$

Ainsi $f(z)$ est réel si et seulement si $r = 1$ ou $\sin\theta = 0$, c'est-à-dire si $z \in \mathbb{U}$ ou $z \in \mathbb{R}^*$.

$$\boxed{f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^* \cup \mathbb{U}}$$



La partie $f^{-1}(\mathbb{R})$ est la réunion de l'axe réel privé de l'origine, en bleu ardoise, et du cercle unité, en bleu pétrole : ce sont les seuls points où la partie imaginaire de $z + \frac{1}{z}$ s'annule.

EXERCICE 8 ⋆⋆

1. Si $A \subset A'$ et $y \in f(A)$, alors $y = f(x)$ avec $x \in A \subset A'$, donc $y \in f(A')$. Si $B \subset B'$ et $x \in f^{-1}(B)$, alors $f(x) \in B \subset B'$, donc $x \in f^{-1}(B')$.

$$\boxed{A \subset A' \Rightarrow f(A) \subset f(A') \qquad B \subset B' \Rightarrow f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')}$$

Les réciproques sont fausses. Pour la première, prenons $f : \{0,1\} \to \{0\}$, $A = \{0\}$ et $A' = \{1\}$: $f(A) = f(A') = \{0\}$, mais $A \not\subset A'$. Pour la seconde, prenons $f : \{0\} \to \{0,1\}$, $0 \mapsto 0$, $B = \{1\}$ et $B' = \varnothing$: $f^{-1}(B) = \varnothing = f^{-1}(B')$, mais $B \not\subset B'$.

$$\boxed{\text{Les deux réciproques sont fausses.}}$$

Elles deviennent vraies si f est injective pour la première, surjective pour la seconde, d'après la proposition 5 du cours.

2. Soit $y \in f(A) \setminus f(A') : y = f(x)$ avec $x \in A$, et $x \notin A'$, sinon y appartiendrait à $f(A')$. Donc $y \in f(A \setminus A')$. Avec $f : x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}$ et $A' = \{-1\}$, on trouve $f(A) \setminus f(A') = \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, alors que $f(A \setminus A') = \mathbb{R}_+$, puisque $1 = f(1)$.

$$\boxed{f(A) \setminus f(A') \subset f(A \setminus A'),\ \text{inclusion stricte en général}}$$

Pour l'image réciproque, $x \in f^{-1}(B \setminus B') \iff (f(x) \in B \text{ et } f(x) \notin B') \iff x \in f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(B')$.

$$\boxed{f^{-1}(B \setminus B') = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(B')}$$

3. On procède par double inclusion.

- Si $y = f(x)$ avec $x \in A \cap f^{-1}(B)$, alors $y \in f(A)$ et $y = f(x) \in B$.
- Si $y \in f(A) \cap B$, il s'écrit $y = f(a)$ avec $a \in A$; comme $f(a) = y \in B$, on a $a \in f^{-1}(B)$, donc $y \in f(A \cap f^{-1}(B))$.

$$\boxed{f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B}$$

Pour $A = E$, on retrouve $f(f^{-1}(B)) = f(E) \cap B$, qui précise la proposition 2 (iii) du cours : l'inclusion $f(f^{-1}(B)) \subset B$ est une égalité exactement lorsque $B \subset f(E)$.

EXERCICE 9 ⋆⋆

1. La partie A est stable si et seulement si $f(A) \subset A$, ce qui équivaut à $A \subset f^{-1}(A)$:

$$\boxed{A \text{ stable} \iff A \subset f^{-1}(A) \iff \forall x \in A,\ f(x) \in A}$$

2. Pour $f : n \mapsto n + 1$, la partie vide est stable. Soit A une partie stable non vide et m son plus petit élément. Par récurrence, $m + k \in A$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc A contient $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant m\}$, et elle ne contient aucun entier plus petit que m. Réciproquement, ces parties sont stables.

$$\boxed{\text{Parties stables par } n \mapsto n+1 :\ \varnothing \text{ et les } \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant m\},\ m \in \mathbb{N}.}$$

Pour $n \mapsto n+2$, une partie A est stable si et seulement si ses traces sur les entiers pairs et sur les entiers impairs le sont, car n et $n+2$ ont même parité. Le même raisonnement s'applique à chacune.

$$\boxed{A = A_0 \cup A_1, \text{ où } A_0 \text{ est vide ou formé des pairs } \geqslant a, \text{ et } A_1 \text{ vide ou formé des impairs } \geqslant b.}$$

3. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties stables. D'après la proposition 2 du cours, étendue aux familles,

$$f\Big(\bigcup_i A_i\Big) = \bigcup_i f(A_i) \subset \bigcup_i A_i \qquad \text{et} \qquad f\Big(\bigcap_i A_i\Big) \subset \bigcap_i f(A_i) \subset \bigcap_i A_i.$$

$$\boxed{\text{Réunions et intersections de parties stables sont stables.}}$$

4. Non : la partie $\{n \mid n \geqslant 1\}$ est stable par $n \mapsto n+1$, mais son complémentaire $\{0\}$ ne l'est pas, puisque $0 \mapsto 1$.

$$\boxed{\text{Le complémentaire d'une partie stable n'est pas stable en général.}}$$

Il l'est cependant lorsque f est bijective et que A est stable par f et par f^{-1}.

Composition

EXERCICE 10 ⋆

1. On compose dans les deux ordres :

$$\boxed{(f\circ g)(x) = 3(x^2-1)+1 = 3x^2-2 \qquad (g\circ f)(x) = (3x+1)^2-1 = 9x^2+6x}$$

2. On repère l'opération faite en dernier :

- $h_1 = r\circ a$, avec $a : [\frac{1}{3}, +\infty[\to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto 3x-1$ et $r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \sqrt{t}$;
- $h_2 = \sin\circ\tau$, avec $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + \frac{\pi}{2}$; on reconnaît d'ailleurs $h_2 = \cos$;
- $h_3 = i\circ\tau'$, avec $\tau' : \mathbb{R}\setminus\{-7\} \to \mathbb{R}^*$, $x \mapsto x+7$ et $i : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{1}{t}$;
- $h_4 = \exp\circ q$, avec $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -x^2$.

Pour h_1 et h_3, le choix des ensembles n'est pas libre : il faut que l'image de la première application tombe dans l'ensemble de départ de la seconde.

3. Pour $x \geqslant 0$:

$$(u\circ u)(x) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1} = \frac{x}{2x+1}, \qquad (u\circ u\circ u)(x) = \frac{x}{3x+1}.$$

Montrons par récurrence que $u^n(x) = \frac{x}{nx+1}$ pour tout $n \geqslant 1$. C'est vrai pour $n=1$, et si c'est vrai au rang n, alors

$$u^{n+1}(x) = u(u^n(x)) = \frac{\frac{x}{nx+1}}{\frac{x}{nx+1}+1} = \frac{x}{x+nx+1} = \frac{x}{(n+1)x+1}.$$

$$\boxed{u^n(x) = \frac{x}{nx+1}}$$

La formule reste vraie pour $n=0$, avec $u^0 = \mathrm{id}$.

4. Si l'on avait $v(x) = 1$, alors $x+1 = x-1$, ce qui est absurde. Donc v est à valeurs dans $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et $v\circ v$ a un sens. Pour $x \neq 1$,

$$(v\circ v)(x) = \frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1} = \frac{(x+1)+(x-1)}{(x+1)-(x-1)} = \frac{2x}{2} = x.$$

$$\boxed{v\circ v = \mathrm{id}_{\mathbb{R}\setminus\{1\}}}$$

L'application v, vue de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ dans lui-même, est donc une involution : elle est bijective et égale à sa réciproque, comme le montrera l'exercice 17.

EXERCICE 11 ⋆⋆

1. Soit $f(x) = ax + b$. Pour tout réel x,

$$(f \circ g)(x) = 2ax + a + b \qquad \text{et} \qquad (g \circ f)(x) = 2ax + 2b + 1.$$

Ces deux fonctions affines sont égales si et seulement si $a + b = 2b + 1$, c'est-à-dire $b = a - 1$.

$$\boxed{f(x) = ax + a - 1 = a(x+1) - 1,\ a \in \mathbb{R}}$$

Ce sont exactement les fonctions affines qui fixent -1, l'unique point fixe de g ; ce n'est pas un hasard, puisque si f commute avec g, alors $g(f(-1)) = f(g(-1)) = f(-1)$, et $f(-1)$ est un point fixe de g.

2. Si $f(x+a) = f(x) + a$ pour tous réels x et a, alors, avec $x = 0$, on obtient $f(a) = f(0) + a$ pour tout a. Réciproquement, les fonctions $x \mapsto x + c$ conviennent.

$$\boxed{f(x) = x + c,\ c \in \mathbb{R}}$$

3. Si f commute avec toutes les applications, elle commute en particulier avec chaque application constante $\gamma_c : x \mapsto c$. Or $(f \circ \gamma_c)(x) = f(c)$ et $(\gamma_c \circ f)(x) = c$: donc $f(c) = c$ pour tout réel c. Réciproquement, l'identité commute avec toute application.

$$\boxed{f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$$

À retenir : pour exploiter une hypothèse universelle portant sur des applications, on la teste sur des applications très simples, ici les constantes. De même, pour comparer deux parties, on les teste souvent sur des singletons.

Injections, surjections, bijections

EXERCICE 12 ⋆

On traite les huit applications l'une après l'autre.

- **(a)** Si $n + 1 = m + 1$, alors $n = m$: l'application est injective. L'entier 0 n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{N}$.

$$\boxed{\text{(a) est injective, non surjective.}}$$

- **(b)** Tout entier m possède l'unique antécédent $m - 1$ dans $\mathbb{Z}$.

$$\boxed{\text{(b) est bijective, de réciproque } m \mapsto m - 1.}$$

- **(c)** L'application, notée c, envoie un entier pair n sur l'entier impair $n + 1$, et un entier impair n sur l'entier pair $n - 1$. On a donc $c(c(n)) = n$ pour tout n : $c \circ c = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$.

$$\boxed{\text{(c) est bijective, et égale à sa réciproque.}}$$

- **(d)** Pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on résout le système $x + y = u$, $x - y = v$, qui a l'unique solution $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$.

$$\boxed{\text{(d) est bijective, de réciproque } (u,v) \mapsto \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right).}$$

- **(e)** Tout réel c est l'image de la fonction constante égale à c. Les fonctions $x \mapsto 0$ et $x \mapsto x$ ont la même image 0.

$$\boxed{\text{(e) est surjective, non injective.}}$$

- **(f)** Toute partie Y de $\mathbb{R}_+$ vérifie $Y \cap \mathbb{R}_+ = Y$: c'est sa propre antécédente. Les parties $\varnothing$ et $\{-1\}$ ont la même image $\varnothing$.

$$\boxed{\text{(f) est surjective, non injective.}}$$

- **(g)** Tout entier m est l'image de $2m$, et l'on a $g(0) = g(1) = 0$.

$$\boxed{\text{(g) est surjective, non injective.}}$$

- **(h)** Si $2n = 2m$, alors $n = m$, et l'entier 1 n'a pas d'antécédent.

$$\boxed{\text{(h) est injective, non surjective.}}$$

Pour les composées, $(g \circ h)(n) = \lfloor 2n/2 \rfloor = n$, tandis que $(h \circ g)(n) = 2\lfloor n/2 \rfloor$ vaut n si n est pair et $n-1$ s'il est impair.

$$\boxed{g \circ h = \mathrm{id}_{\mathbb{N}} \qquad (h \circ g)(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ n-1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}}$$

Piège : l'égalité $g \circ h = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ ne fait pas de g et h deux bijections réciproques. Il faut aussi $h \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, ce qui est faux ici. L'exercice 19 montrera que cette situation caractérise exactement les injections (h) et les surjections (g).

EXERCICE 13 ⋆⋆

(a) Les couples $(1,2)$ et $(2,1)$ ont la même image $(3,2)$: l'application n'est pas injective. Pour déterminer l'image, on se souvient que x et y ont pour somme s et pour produit p si et seulement s'ils sont les racines du trinôme $t^2 - st + p$. Ainsi (s,p) est atteint par un couple de réels si et seulement si ce trinôme a des racines réelles, c'est-à-dire si $s^2 - 4p \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{(a) n'est ni injective ni surjective ; son image est } \{(s,p) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 \geqslant 4p\}.}$$

Le couple $(0,1)$, par exemple, n'est pas atteint : deux réels de somme nulle ont un produit $-x^2 \leqslant 0$.

(b) L'application n'est pas injective, pour la même raison. Elle est surjective, car le trinôme $t^2 - st + p$ a toujours des racines dans $\mathbb{C}$, ce que l'on admet ici comme à l'exercice 7.

$$\boxed{\text{(b) est surjective, non injective.}}$$

Agrandir l'ensemble de départ a fait disparaître le défaut de surjectivité : c'est tout l'intérêt des nombres complexes.

(c) Pour $q \geqslant 2$, le réel $\frac{1}{q}$ appartient à $]0\,,\frac{1}{2}]$, donc $p + \frac{1}{q}$ n'est pas entier et sa partie entière vaut p. Pour $q = 1$, le nombre $p+1$ est entier. Supposons $p + \frac{1}{q} = p' + \frac{1}{q'} = r$.

- Si r est entier, alors $q = q' = 1$ et $p = p' = r - 1$.
- Sinon, q et q' sont au moins égaux à 2, et $p = p' = \lfloor r \rfloor$, puis $\frac{1}{q} = \frac{1}{q'}$, donc $q = q'$.

En revanche, le rationnel $\frac{2}{3}$ aurait pour partie entière $p = 0$, donc $\frac{1}{q} = \frac{2}{3}$, ce qui est impossible pour un entier q.

$$\boxed{\text{(c) est injective, non surjective : } \tfrac{2}{3} \text{ n'est pas atteint.}}$$

(d) Les premières valeurs sont $\pi(1) = 0$, $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 2$, $\pi(4) = 2$, $\pi(5) = 3$, $\pi(6) = 3$. L'égalité $\pi(3) = \pi(4)$ montre que π n'est pas injective. Pour la surjectivité, on observe que $\pi(n+1) - \pi(n)$ vaut 0 ou 1, selon que $n+1$ est premier ou non, et que π n'est pas majorée, puisqu'il y a une infinité de nombres premiers. Soit $m \in \mathbb{N}^*$; l'ensemble des n tels que $\pi(n) \geqslant m$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$,

qui a un plus petit élément $n_0 \geqslant 2$. Alors $\pi(n_0-1) < m \leqslant \pi(n_0) \leqslant \pi(n_0-1)+1$, d'où $\pi(n_0) = m$. Enfin $0 = \pi(1)$.

$$\boxed{\pi \text{ est surjective, non injective.}}$$

C'est un raisonnement de type « valeurs intermédiaires » discret : une suite d'entiers qui avance par pas de 0 ou 1 et tend vers $+\infty$ prend toutes les valeurs à partir de la première.

(e) Soit x et y deux rationnels tels que $\sin x = \sin y$. Il existe alors un entier k tel que $y = x + 2k\pi$ ou $y = \pi - x + 2k\pi$.

- Dans le premier cas, $2k\pi = y - x$ est rationnel ; comme π est irrationnel, $k = 0$ et $y = x$.
- Dans le second cas, $(2k+1)\pi = x + y$ serait rationnel, alors que $2k + 1 \neq 0$: c'est impossible.

Le réel 1 n'est pas atteint, car ses antécédents par sinus dans $\mathbb{R}$ sont les réels $\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{(4k+1)\pi}{2}$, tous irrationnels.

$$\boxed{\text{(e) est injective, non surjective.}}$$

EXERCICE 14 ⋆

Dans chaque cas, on fixe un élément y de l'ensemble d'arrivée et l'on montre que l'équation $f(x) = y$ a une unique solution dans l'ensemble de départ : c'est la méthode la plus sûre, car elle donne à la fois la bijectivité et la réciproque.

1. On a $f_1(x) = \mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x$. Posons $t = \mathrm{e}^x$, qui décrit $\mathbb{R}_+^*$ quand x décrit $\mathbb{R}$. Pour $y > 0$,

$$t^2 + 2t = y \iff (t+1)^2 = 1 + y \iff t = -1 + \sqrt{1+y},$$

la racine $-1 - \sqrt{1+y}$ étant négative. Comme $y > 0$, le réel $-1 + \sqrt{1+y}$ est strictement positif et possède un unique logarithme.

$$\boxed{f_1^{-1}(y) = \ln\left(\sqrt{1+y} - 1\right)}$$

2. Pour $y \geqslant 0$ et $x \geqslant 1$, l'équation $x - \frac{1}{x} = y$ équivaut à $x^2 - yx - 1 = 0$. Ses deux racines ont pour produit -1 : une seule est positive, à savoir $\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}$, et elle est au moins égale à $\frac{0+2}{2} = 1$.

$$\boxed{f_2^{-1}(y) = \frac{y + \sqrt{y^2+4}}{2}}$$

3. Pour $y \geqslant \ln 7$ et $x \geqslant 2$, l'équation équivaut à $x^2 + x + 1 - \mathrm{e}^y = 0$, de discriminant $4\mathrm{e}^y - 3 \geqslant 25$. Une seule racine est positive, et elle vérifie $x \geqslant \frac{-1+5}{2} = 2$.

$$\boxed{f_3^{-1}(y) = \frac{-1 + \sqrt{4\mathrm{e}^y - 3}}{2}}$$

4. Pour $w \neq \mathrm{i}$ et $z \neq -3$,

$$\frac{\mathrm{i}z - \mathrm{i}}{z+3} = w \iff \mathrm{i}z - \mathrm{i} = wz + 3w \iff z(\mathrm{i} - w) = 3w + \mathrm{i} \iff z = \frac{3w + \mathrm{i}}{\mathrm{i} - w}.$$

Il reste deux vérifications. Le complexe obtenu est différent de -3, car $3w + \mathrm{i} = -3\mathrm{i} + 3w$ est impossible. Et f_4 est bien à valeurs dans $\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$, car $\mathrm{i}z - \mathrm{i} = \mathrm{i}z + 3\mathrm{i}$ est impossible.

$$\boxed{f_4^{-1}(w) = \frac{3w + \mathrm{i}}{\mathrm{i} - w}}$$

Attention : l'erreur la plus répandue est d'oublier ces deux vérifications. Sans elles, on a seulement montré que f_4 est injective, pas qu'elle est bien définie ni que la formule obtenue tombe dans le bon ensemble.

EXERCICE 15 ⋆⋆

1. On a $f(2) = f(\frac{1}{2}) = \frac{4}{5}$, donc f n'est pas injective. On verra à la question 2 que f ne prend aucune valeur hors de $[-1\,,1]$.

$$\boxed{f \text{ n'est ni injective ni surjective.}}$$

2. Pour tout réel x, $(1-|x|)^2 \geqslant 0$ donne $2|x| \leqslant 1+x^2$, donc $|f(x)| \leqslant 1$. Réciproquement, soit $y \in [-1\,,1]$. Si $y=0$, il est atteint en 0. Sinon, l'équation $f(x)=y$ équivaut à $yx^2-2x+y=0$, de discriminant $4(1-y^2) \geqslant 0$: elle a au moins une solution réelle.

$$\boxed{f(\mathbb{R}) = [-1\,,1]}$$

3. Soit $y \in [-1\,,1] \setminus \{0\}$. Les racines de yx^2-2x+y ont pour produit 1. Si $|y|<1$, elles sont distinctes, et une seule est dans $[-1\,,1]$; si $y=\pm 1$, il y a la racine double ± 1. Dans tous les cas, l'équation $g(x)=y$ a une unique solution dans $[-1\,,1]$, la racine de plus petit module :

$$x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} = \frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}}.$$

La seconde écriture, obtenue en multipliant par la quantité conjuguée, convient aussi pour $y=0$, dont l'unique antécédent dans $[-1\,,1]$ est 0.

$$\boxed{g^{-1}(y) = \frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}}}$$

À retenir : restreindre à la fois l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée permet de rendre bijective une application qui ne l'est pas. On reverra cette fonction dans le chapitre de trigonométrie, puisque $f(\tan\frac{\theta}{2}) = \sin\theta$.

EXERCICE 16 ⋆

1. On examine les quatre affirmations.

- **(a)** Si x, $x' \in A$ et $f_{|A}(x) = f_{|A}(x')$, alors $f(x)=f(x')$, donc $x=x'$. L'affirmation est vraie.
- **(b)** La fonction carré, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, n'est pas injective, alors que sa restriction à $\mathbb{R}_+$ l'est. L'affirmation est fausse.
- **(c)** La fonction carré, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, est surjective, mais sa restriction à $\{1\}$ ne prend que la valeur 1. L'affirmation est fausse.
- **(d)** On a $F = f_{|A}(A) = f(A) \subset f(E)$, donc f est surjective. L'affirmation est vraie.

$$\boxed{\text{(a) et (d) sont vraies ; (b) et (c) sont fausses.}}$$

Restreindre conserve l'injectivité et peut la créer ; agrandir conserve la surjectivité et peut la créer.

2. Supposons f impaire, et soit $y \in \mathbb{R}$. Posons $x = f^{-1}(y)$. Alors $f(-x) = -f(x) = -y$, donc $f^{-1}(-y) = -x = -f^{-1}(y)$: la réciproque est impaire. Comme f est la réciproque de f^{-1}, la réciproque est vraie.

$$\boxed{f \text{ impaire} \iff f^{-1} \text{ impaire}}$$

Une fonction paire vérifie $f(-1)=f(1)$, avec $-1 \neq 1$: elle n'est pas injective.

$$\boxed{\text{Il n'existe aucune bijection paire de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}.}$$

EXERCICE 17 ⋆⋆

1. D'après la proposition 6 du cours, l'injectivité de $g\circ f$ donne celle de f, et la surjectivité de $g\circ f$ donne celle de g. De même, $h\circ g$ bijective donne g injective et h surjective. Ainsi g est bijective, et l'on peut écrire

$$f = g^{-1}\circ(g\circ f) \qquad \text{et} \qquad h = (h\circ g)\circ g^{-1},$$

qui sont des composées de bijections.

$$\boxed{f,\ g \text{ et } h \text{ sont bijectives.}}$$

2. On a $f \circ f^{n-1} = f^{n-1} \circ f = f^n = \mathrm{id}_E$, avec la convention $f^0 = \mathrm{id}_E$.

$$\boxed{f \text{ est bijective et } f^{-1} = f^{n-1}}$$

3. Supposons f injective. Pour $x \in E$, l'égalité $f((g\circ f)(x)) = f(x)$ donne $(g\circ f)(x) = x$. Supposons g surjective, et soit $x \in E$; il s'écrit $x = g(y)$, et l'égalité $g\circ f\circ g = g$ appliquée à y donne $(g\circ f)(x) = x$.

$$\boxed{g \circ f = \mathrm{id}_E}$$

Pour un exemple, prenons $E = \{0\}$, $F = \{0,1\}$, $f(0) = 0$ et $g(0) = g(1) = 0$. Les deux identités se vérifient directement, puisque toutes les composées à valeurs dans E sont constantes égales à 0, et $f(g(f(0))) = f(0)$.

$$\boxed{f \text{ est injective non surjective, } g \text{ surjective non injective.}}$$

EXERCICE 18 ⋆⋆⋆

1. Supposons f injective. Pour $x \in E$, l'égalité $f(f^{n-1}(x)) = f(x)$ donne $f^{n-1}(x) = x$, d'où $f^{n-1} = \mathrm{id}_E$. D'après l'exercice 17, f est bijective, donc surjective.

Supposons f surjective, et soit $y \in E$, qui s'écrit $y = f(x)$. Alors $f^{n-1}(y) = f^n(x) = f(x) = y$, donc $f^{n-1} = \mathrm{id}_E$, et f est bijective, donc injective.

$$\boxed{f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f^{n-1} = \mathrm{id}_E}$$

Ce résultat rappelle le théorème du cours sur les applications d'un ensemble fini dans lui-même ; ici, c'est l'hypothèse $f^n = f$ qui remplace la finitude.

2. Si $y = f(x)$, alors $f(y) = f(f(x)) = f(x) = y$. Si de plus f est injective, l'égalité $f(f(x)) = f(x)$ donne $f(x) = x$ pour tout x. La réciproque est évidente.

$$\boxed{f \text{ fixe chaque point de } f(E), \text{ et } f \text{ injective} \iff f = \mathrm{id}_E}$$

Une application telle que $f \circ f = f$ s'appelle un *projecteur* : on la retrouvera en algèbre linéaire, avec la projection orthogonale sur une droite du plan.

3. Il suffit que $f^2 = \mathrm{id}$, puisqu'alors $f^3 = f$.

$$\boxed{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -x \text{ vérifie } f^3 = f \text{ et } f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}}.}$$

EXERCICE 19 ⋆⋆

1. Supposons f injective, et fixons $a \in X$. Tout élément y de $f(X)$ a un unique antécédent ; on le note $g(y)$, et l'on pose $g(y) = a$ si $y \notin f(X)$. Pour $x \in X$, l'élément $g(f(x))$ est l'unique antécédent de $f(x)$, c'est-à-dire x. Réciproquement, si $g \circ f = \mathrm{id}_X$, qui est injective, alors f est injective d'après la proposition 6 du cours.

$$\boxed{f \text{ injective} \iff \exists g : Y \to X,\ g \circ f = \mathrm{id}_X}$$

L'application g n'est pas unique en général : sa valeur hors de $f(X)$ est arbitraire. Elle est unique lorsque f est surjective, ou lorsque X n'a qu'un élément.

2. Supposons f surjective. Pour chaque $y \in Y$, la partie $f^{-1}(\{y\})$ est non vide ; on y choisit un élément $h(y)$, ce qui est licite d'après l'énoncé. Alors $f(h(y)) = y$. Réciproquement, si $f \circ h = \mathrm{id}_Y$, qui est surjective, alors f est surjective.

$$\boxed{f \text{ surjective} \iff \exists h : Y \to X,\ f \circ h = \mathrm{id}_Y}$$

Le choix simultané d'un antécédent pour chaque y est l'*axiome du choix*. Il n'est pas nécessaire lorsque $X = \mathbb{N}$, car on peut prendre le plus petit antécédent.

3. L'application f est injective sur $\mathbb{N}$ et non surjective, car 2 n'est pas un carré. D'après les questions 1 et 2 :

$$\boxed{g(m) = \begin{cases} \sqrt{m} & \text{si } m \text{ est un carré} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ vérifie } g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}};\ \text{aucune } g \text{ ne vérifie } f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}.}$$

EXERCICE 20 ⋆⋆⋆

1. Si f est injective et $f \circ g = f \circ h$, alors pour tout $z \in Z$, $f(g(z)) = f(h(z))$, donc $g(z) = h(z)$. Réciproquement, supposons la propriété de simplification vraie, et soit x, x' tels que $f(x) = f(x')$. Prenons $Z = \{0\}$, $g : 0 \mapsto x$ et $h : 0 \mapsto x'$. Alors $f \circ g = f \circ h$, donc $g = h$, c'est-à-dire $x = x'$.

$$\boxed{f \text{ injective} \iff f \text{ est simplifiable à gauche}}$$

2. Si f est surjective et $g \circ f = h \circ f$, tout $y \in F$ s'écrit $f(x)$, et $g(y) = h(y)$. Réciproquement, supposons que f ne soit pas surjective, et soit $y_0 \in F \setminus f(E)$. Prenons $Z = \{0, 1\}$, $g = \mathbf{1}_{\{y_0\}}$ et h la fonction nulle. Pour tout x, $f(x) \neq y_0$, donc $g(f(x)) = 0 = h(f(x))$: on a $g \circ f = h \circ f$, mais $g \neq h$.

$$\boxed{f \text{ surjective} \iff f \text{ est simplifiable à droite}}$$

3. Fixons deux éléments distincts a et b de G.

- *Injectivité de φ.* Si f est surjective, φ est injective d'après la question 2. Si f ne l'est pas, soit $y_0 \notin f(E)$; la fonction constante égale à a et la fonction qui vaut a partout sauf en y_0, où elle vaut b, sont distinctes et ont la même image par φ.
- *Surjectivité de φ.* Supposons f injective et soit $u \in G^E$. On pose $g(y) = u(x)$ si $y = f(x)$, l'élément x étant unique, et $g(y) = a$ si $y \notin f(E)$. Alors $g \circ f = u$. Si f n'est pas injective, soit $x \neq x'$ tels que $f(x) = f(x')$; toute fonction $g \circ f$ prend la même valeur en x et en x', donc la fonction u qui vaut a en x et b ailleurs n'est pas atteinte.

$$\boxed{\varphi \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \qquad \varphi \text{ surjective} \iff f \text{ injective}}$$

À retenir : l'opération $g \mapsto g \circ f$ « renverse » injectivité et surjectivité. On retrouvera ce phénomène avec l'image réciproque à l'exercice 22, et plus tard avec la dualité en algèbre linéaire.

EXERCICE 21 ⋆⋆⋆

On rappelle que les inclusions $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, $A \subset f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B)) \subset B$ sont toujours vraies (proposition 2 du cours).

1. Si f est injective et $y \in f(A) \cap f(B)$, alors $y = f(a) = f(b)$ avec $a \in A$ et $b \in B$, donc $a = b \in A \cap B$, et $y \in f(A \cap B)$. Réciproquement, si $f(x) = f(x')$, on applique l'égalité avec $A = \{x\}$ et $B = \{x'\}$: $f(A \cap B) = \{f(x)\}$ n'est pas vide, donc $\{x\} \cap \{x'\} \neq \varnothing$ et $x = x'$.

2. Le sens direct est la proposition 5 du cours. Réciproquement, si $f(x) = f(x')$, alors $x' \in f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$, donc $x' = x$.

3. Le sens direct est la proposition 5 du cours. Réciproquement, avec $B = F$, on obtient $f(E) = f(f^{-1}(F)) = F$.

4. Supposons f bijective. D'après la question 1, $f(E \setminus A) \cap f(A) = f(\varnothing) = \varnothing$, et $f(E \setminus A) \cup f(A) = f(E) = F$: on a bien $f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$. Réciproquement, supposons la propriété vraie pour toute partie A.

- Avec $A = \varnothing$, on obtient $f(E) = F$: f est surjective.
- Si $f(x) = f(x')$ avec $x \neq x'$, alors avec $A = \{x\}$, l'élément $f(x) = f(x')$ appartient à $f(E \setminus A)$, mais pas à $F \setminus f(A)$: contradiction.

$$\boxed{\text{Les quatre équivalences sont établies.}}$$

Piège : il faut deux cas particuliers distincts pour la réciproque de la question 4 ; la partie vide seule ne dit rien sur l'injectivité.

EXERCICE 22 ⋆⋆⋆

1. Si f est injective, l'exercice 21 donne $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(E)}$, donc φ est injective et ψ surjective (proposition 6 du cours). Réciproquement :

- si φ est injective et $f(x) = f(x')$, alors $\varphi(\{x\}) = \varphi(\{x'\})$, donc $x = x'$;
- si ψ est surjective, soit x, x' tels que $f(x) = f(x')$; il existe Y tel que $\{x\} = f^{-1}(Y)$, donc $f(x) \in Y$, puis $f(x') \in Y$, et $x' \in \{x\}$.

$$\boxed{f \text{ injective} \iff \varphi \text{ injective} \iff \psi \text{ surjective}}$$

2. Si f est surjective, l'exercice 21 donne $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(F)}$, donc φ est surjective et ψ injective. Réciproquement :

- si φ est surjective, il existe X tel que $f(X) = F$, donc $f(E) \supset f(X) = F$;
- si ψ est injective et $y_0 \notin f(E)$, alors $\psi(\{y_0\}) = \varnothing = \psi(\varnothing)$, ce qui est absurde.

$$\boxed{f \text{ surjective} \iff \varphi \text{ surjective} \iff \psi \text{ injective}}$$

3. Si f est bijective, les deux égalités $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(E)}$ et $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(F)}$ sont vraies.

$$\boxed{\varphi \text{ et } \psi \text{ sont bijectives, et } \psi = \varphi^{-1}.}$$

On retrouve ainsi que, pour une bijection, l'image réciproque $f^{-1}(Y)$ est aussi l'image directe de Y par la bijection réciproque f^{-1} : la notation est cohérente.

EXERCICE 23 ⋆⋆

1. Si $X \cup Y = \Omega$, toute partie A s'écrit $A = A \cap \Omega = (A \cap X) \cup (A \cap Y)$: elle est déterminée par $\theta(A)$, et θ est injective. Si au contraire $\omega \in \Omega \setminus (X \cup Y)$, alors $\theta(\{\omega\}) = (\varnothing, \varnothing) = \theta(\varnothing)$.

$$\boxed{\theta \text{ injective} \iff X \cup Y = \Omega}$$

2. Supposons $X \cap Y = \varnothing$, et soit $(B, C) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y)$. Posons $A = B \cup C$. Comme $C \subset Y$ est disjointe de X, on a $A \cap X = B$, et de même $A \cap Y = C$. Si au contraire $\omega \in X \cap Y$, le couple $(\{\omega\}, \varnothing)$ n'est pas atteint, car $\omega \in A \cap X$ entraîne $\omega \in A \cap Y$.

$$\boxed{\theta \text{ surjective} \iff X \cap Y = \varnothing}$$

3. Lorsque X et Y forment une partition de Ω, le calcul précédent donne la réciproque.

$$\boxed{\theta^{-1}(B, C) = B \cup C}$$

Si Ω a n éléments, dont k dans X et $n - k$ dans Y, la bijection θ et le lemme 6 du cours donnent $2^n = \mathrm{card}(\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y)) = 2^k \times 2^{n-k}$. Plus profondément : choisir une partie de Ω, c'est choisir indépendamment sa trace sur X et sa trace sur Y, ce qui est l'idée même du principe multiplicatif.

EXERCICE 24 ⋆⋆⋆

Fixons $k \in \mathbb{N}$ et notons $I_k = [\![0\,;k]\!]$, qui a $k+1$ éléments.

- Si $g(n) \leqslant k$, alors $f(n) \leqslant g(n) \leqslant k$: on a $g^{-1}(I_k) \subset f^{-1}(I_k)$.
- L'application f étant injective, elle induit une bijection de $f^{-1}(I_k)$ sur son image, qui est une partie de I_k. D'après les lemmes 3 et 2 du cours, cette image est finie avec au plus $k+1$ éléments, donc $f^{-1}(I_k)$ aussi.

- La partie $g^{-1}(I_k)$ de $f^{-1}(I_k)$ est donc finie. Chacun des entiers $0, \dots, k$ a un antécédent par g, par exemple le plus petit, et ces antécédents sont distincts : ils forment une partie de $g^{-1}(I_k)$ à $k+1$ éléments, et le lemme 3 donne $\operatorname{card}(g^{-1}(I_k)) \geqslant k+1$.

Ainsi $g^{-1}(I_k)$ est une partie de $f^{-1}(I_k)$ qui a au moins autant d'éléments que lui. D'après le cas d'égalité du lemme 3 :

$$f^{-1}(I_k) = g^{-1}(I_k).$$

Soit enfin $n \in \mathbb{N}$ et $k = f(n)$. Alors $n \in f^{-1}(I_k) = g^{-1}(I_k)$, donc $g(n) \leqslant k = f(n)$. Avec l'hypothèse $f(n) \leqslant g(n)$, on conclut.

$$\boxed{f = g}$$

Attention : sans l'injectivité de f, le résultat tombe. Avec f nulle et $g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, on a bien $f \leqslant g$, g surjective, et $f \neq g$.

EXERCICE 25 ⋆⋆

1. L'application $\mathcal{P}(E) \to \{0,1\}^E$, $A \mapsto \mathbf{1}_A$, admet pour réciproque l'application $\chi \mapsto \chi^{-1}(\{1\})$: en effet, l'ensemble des points où $\mathbf{1}_A$ vaut 1 est A, et une fonction χ à valeurs dans $\{0,1\}$ est l'indicatrice de $\chi^{-1}(\{1\})$. D'après la question 2, il y a 2^p applications de E dans $\{0,1\}$, et deux ensembles en bijection ont le même cardinal, d'après le lemme 2 du cours.

$$\boxed{\operatorname{card} \mathcal{P}(E) = \operatorname{card} \{0,1\}^E = 2^p}$$

2. *Applications.* On raisonne par récurrence sur p, pour tout ensemble F à n éléments. Si $p = 0$, l'ensemble E est vide, et il existe une seule application de E dans F, celle de graphe vide : on a bien $n^0 = 1$. Supposons le résultat vrai au rang p, et soit E à $p+1$ éléments, $a \in E$ et $E' = E \setminus \{a\}$, qui a p éléments. On considère

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} F^E & \longrightarrow & F \\ \varphi & \longmapsto & \varphi(a) \end{array} \right.$$

Pour $y \in F$, la fibre $\Phi^{-1}(\{y\})$ est formée des applications qui envoient a sur y. La restriction $\varphi \mapsto \varphi_{|E'}$ est une bijection de cette fibre sur $F^{E'}$, dont la réciproque prolonge une application de E' en envoyant a sur y. Chaque fibre a donc n^p éléments, et le lemme des bergers donne $\operatorname{card}(F^E) = n \times n^p = n^{p+1}$.

Injections. Notons $A(p,n)$ le nombre d'injections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments, qui ne dépend que de p et n d'après le lemme 2 du cours. On montre par récurrence sur p que $A(p,n) = n(n-1)\cdots(n-p+1)$, produit de p facteurs, pour tout n. Le cas $p = 0$ est le même que ci-dessus. Pour l'hérédité, on reprend a, E' et l'application $\varphi \mapsto \varphi(a)$, restreinte aux injections. Si $n = 0$, il n'y a aucune application de $E \neq \varnothing$ dans $F = \varnothing$, et le produit, qui contient le facteur $n = 0$, est nul. Si $n \geqslant 1$, une injection qui envoie a sur y envoie E' dans $F \setminus \{y\}$, et la restriction est une bijection de la fibre au-dessus de y sur l'ensemble des injections de E' dans $F \setminus \{y\}$, qui a $n-1$ éléments d'après le lemme 3. Le lemme des bergers donne

$$A(p+1,n) = n \times A(p,n-1) = n \times (n-1)(n-2)\cdots(n-p).$$

Bijections. D'après le théorème 2 du cours, une application de E dans lui-même est bijective si et seulement si elle est injective : il y en a $A(p,p) = p!$.

$$\boxed{n^p \text{ applications} \qquad n(n-1)\cdots(n-p+1) \text{ injections} \qquad p! \text{ bijections de } E \text{ sur } E}$$

Le nombre d'injections est nul lorsque $p > n$, puisque le produit contient alors le facteur $n - n = 0$: c'est le principe des tiroirs.

3. Les applications de E dans F qui ne sont pas surjectives sont, pour $n = 2$, celles qui ne prennent qu'une valeur : ce sont les deux applications constantes.

$$\boxed{2^4 - 2 = 14 \text{ surjections}}$$

À retenir : pour dénombrer, on passe souvent au complémentaire. Pour $n = 3$, il faudrait retirer les applications qui évitent une valeur, en prenant garde de ne pas compter deux fois les constantes : c'est le principe d'inclusion-exclusion du chapitre de dénombrement.

4. Les parties $A \cap B$ et $B \setminus A$ de B sont finies, d'après le lemme 3 du cours. Elles sont disjointes et ont pour réunion B, donc, d'après le lemme 4,

$$\operatorname{card}(B) = \operatorname{card}(A \cap B) + \operatorname{card}(B \setminus A).$$

De même, A et $B \setminus A$ sont finies, disjointes, et ont pour réunion $A \cup B$. Le lemme 4 montre que $A \cup B$ est fini, et donne

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B \setminus A) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B).$$

$$\boxed{\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B)}$$

Pour $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 3\}$, on trouve bien $2 + 2 - 1 = 3$. Les éléments de $A \cap B$ sont comptés deux fois dans $\operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B)$, et la soustraction corrige ce double comptage : c'est le premier cas de la formule du crible, que le chapitre 21 généralisera à n parties.

EXERCICE 26 ⋆⋆⋆

1. Il suffit de montrer que $\beta : (a, b) \mapsto 2^a(2b+1)$ est une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}^*$, puis de retrancher 1.

- *Surjectivité.* Soit $m \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des entiers a tels que 2^a divise m contient 0 et est majoré par m, car $2^a \geqslant a$; il a un plus grand élément a. Le quotient $m/2^a$ est alors impair, de la forme $2b + 1$.
- *Injectivité.* Si $2^a(2b+1) = 2^{a'}(2b'+1)$ avec $a < a'$, on divise par 2^a : un entier impair serait égal à un entier pair. Donc $a = a'$, puis $b = b'$.

$$\boxed{(a, b) \mapsto 2^a(2b + 1) - 1 \text{ est une bijection de } \mathbb{N}^2 \text{ sur } \mathbb{N}.}$$

2. C'est vrai pour $r = 1$. Si $\sigma_r : \mathbb{N}^r \to \mathbb{N}$ est bijective, l'application $\mathbb{N}^{r+1} = \mathbb{N}^r \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(x, n) \mapsto \beta'(\sigma_r(x), n)$, où β' est la bijection de la question 1, est une composée de bijections.

$$\boxed{\mathbb{N}^r \text{ est équipotent à } \mathbb{N} \text{ pour tout } r \geqslant 1.}$$

3. On décale la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geqslant 1}$ d'un cran, comme les clients de l'hôtel de Hilbert :

$$\boxed{h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & \text{si } x = \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^* \\ x & \text{sinon} \end{cases}}$$

Le réel $1 = \frac{1}{1}$ n'est pas atteint, et chaque $\frac{1}{m}$ avec $m \geqslant 2$ a l'unique antécédent $\frac{1}{m-1}$; les autres réels sont fixes. L'application h est donc une bijection de $[0\,,1]$ sur $[0\,,1[$.

4. Raisonnons par l'absurde, et soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ une bijection ; on note $u^{(n)} = \sigma(n)$. On définit la suite v par $v_n = u_n^{(n)} + 1$. Pour tout n, v diffère de $u^{(n)}$ en son terme d'indice n : la suite v n'est pas atteinte par σ.

$$\boxed{\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \text{ n'est pas équipotent à } \mathbb{N}.}$$

C'est l'argument diagonal du théorème de Cantor, démontré dans le cours pour $\mathcal{P}(E)$: on modifie la n-ième suite à la n-ième place.

EXERCICE 27 ⋆

1. On lit les graphes sur les diagrammes, puis on teste chaque propriété.

- $\mathcal{R}_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$ est réflexive, symétrique et transitive ; elle n'est pas antisymétrique, puisque $1\,\mathcal{R}_1\,2$ et $2\,\mathcal{R}_1\,1$.
- $\mathcal{R}_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,3),(1,3)\}$ est réflexive, antisymétrique et transitive ; elle n'est pas symétrique.
- $\mathcal{R}_3 = \{(1,2),(2,3)\}$ est antisymétrique, mais ni réflexive, ni symétrique, ni transitive : on a $1\,\mathcal{R}_3\,2$ et $2\,\mathcal{R}_3\,3$, mais pas $1\,\mathcal{R}_3\,3$.
- $\mathcal{R}_4 = \{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1)\}$ est symétrique et transitive, mais pas réflexive, puisque 3 n'est pas en relation avec lui-même, ni antisymétrique.

2. On rassemble les résultats.

$\mathcal{R}_1$ est une équivalence, de classes $\{1,2\}$ et $\{3\}$; $\mathcal{R}_2$ est l'ordre total $1 \preccurlyeq 2 \preccurlyeq 3$.

Les relations $\mathcal{R}_3$ et $\mathcal{R}_4$ ne sont ni l'un ni l'autre. La relation $\mathcal{R}_4$ est le contre-exemple type de l'exercice 29 : symétrique et transitive sans être réflexive.

3. Une relation d'ordre contenant $\mathcal{R}_3$ doit contenir les trois boucles, par réflexivité, et le couple $(1,3)$, par transitivité. Ces quatre couples suffisent, puisqu'on obtient $\mathcal{R}_2$.

On ajoute $(1,1),(2,2),(3,3)$ et $(1,3)$, et l'on obtient $\mathcal{R}_2$.

EXERCICE 28 ⋆⋆

1. Une relation sur E est une partie de $E \times E$, qui a n^2 éléments d'après le lemme 6 du cours. Une relation réflexive contient obligatoirement les n couples (x,x) et choisit librement les $n^2 - n$ autres. Une relation symétrique est déterminée par les couples (x,y) avec $x \leqslant y$, pour une numérotation fixée de E : il y en a $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. Si elle est de plus réflexive, il ne reste à choisir que les $\frac{n(n-1)}{2}$ paires $\{x,y\}$ avec $x \neq y$.

2^{n^2} relations, 2^{n^2-n} réflexives, $2^{n(n+1)/2}$ symétriques, $2^{n(n-1)/2}$ réflexives et symétriques

2. Les partitions de $\{1,2,3\}$ sont

$$\{\{1,2,3\}\},\quad \{\{1\},\{2,3\}\},\quad \{\{2\},\{1,3\}\},\quad \{\{3\},\{1,2\}\},\quad \{\{1\},\{2\},\{3\}\}.$$

Pour $\{1,2,3,4\}$, on classe les partitions selon la taille de leurs parties :

- une seule partie à 4 éléments : 1 partition ;
- une partie à 3 éléments et un singleton : 4 partitions, selon le singleton ;
- deux paires : 3 partitions, selon le partenaire de 1 ;
- une paire et deux singletons : 6 partitions, selon la paire ;
- quatre singletons : 1 partition.

D'après le cours, les relations d'équivalence sur un ensemble correspondent exactement à ses partitions : à une relation on associe l'ensemble de ses classes, et à une partition la relation « appartenir à la même partie » (proposition 8).

Relations d'équivalence : 5 sur un ensemble à 3 éléments, 15 sur un ensemble à 4 éléments

Ces nombres, $1, 2, 5, 15, 52, \ldots$, sont les *nombres de Bell*.

3. Un ordre total sur E revient à ranger les éléments de E du plus petit au plus grand : on choisit le plus petit élément (n choix), puis le plus petit des restants ($n-1$ choix), et ainsi de suite.

$$\boxed{n! \text{ ordres totaux}}$$

EXERCICE 29 ⋆⋆

1. L'erreur est dans le « Si $x \mathcal{R} y$ » : rien n'assure l'existence d'un tel y. Le raisonnement montre seulement que tout élément en relation avec *au moins un* élément est en relation avec lui-même. La relation $\mathcal{R}_4$ de l'exercice 27 est un contre-exemple, de même que la relation vide sur un ensemble non vide.

$$\boxed{\text{Le raisonnement devient correct si l'on suppose } \forall x \in E,\ \exists y \in E,\ x \mathcal{R} y.}$$

2. Soit $\mathcal{R}$ une telle relation. Si $x \mathcal{R} y$, alors $y \mathcal{R} x$ par symétrie, donc $x = y$ par antisymétrie. Réciproquement, $x \mathcal{R} x$ pour tout x, par réflexivité.

$$\boxed{x \mathcal{R} y \iff x = y}$$

3. La relation $\sim$ est réflexive, car $\mathcal{R}$ l'est ; elle est symétrique par construction. Si $x \sim y$ et $y \sim z$, alors $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$, donc $x \mathcal{R} z$, et de même $z \mathcal{R} x$: elle est transitive.

$$\boxed{\sim \text{ est une relation d'équivalence.}}$$

Pour la divisibilité sur $\mathbb{Z}$, $a \mid b$ et $b \mid a$ équivaut à $|a| = |b|$.

$$\boxed{a \sim b \iff b = \pm a, \text{ et les classes sont les } \{a, -a\}.}$$

La divisibilité n'est pas un ordre sur $\mathbb{Z}$, faute d'antisymétrie, mais elle le devient sur l'ensemble des classes, que l'on peut identifier à $\mathbb{N}$: c'est pourquoi on la restreint à $\mathbb{N}$ dans le cours.

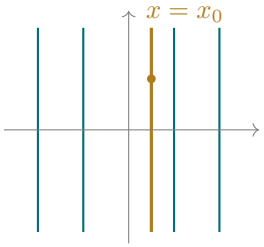
Relations d'équivalence

EXERCICE 30 ⋆

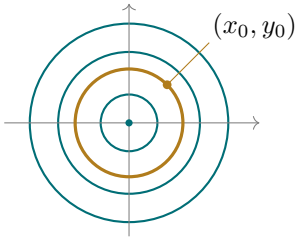
Les quatre relations sont de la même forme : $x \mathcal{R} y \iff \phi(x) = \phi(y)$, pour une application ϕ bien choisie. Une telle relation est toujours une relation d'équivalence, car l'égalité est réflexive, symétrique et transitive. Sa classe de x est l'image réciproque $\phi^{-1}(\{\phi(x)\})$, ensemble des éléments qui ont la même image que x.

1. Avec $\phi(x, y) = x$, la classe de (x_0, y_0) est la droite verticale d'équation $x = x_0$.

2. Avec $\phi(x, y) = x^2 + y^2$, la classe de (x_0, y_0) est le cercle de centre O passant par ce point, réduit à $\{O\}$ si $(x_0, y_0) = (0, 0)$.



Question 1



Question 2

Dans les deux cas, les classes découpent le plan en morceaux disjoints qui le recouvrent : des droites parallèles à gauche, des cercles concentriques et l'origine à droite. La classe du point marqué est tracée en ocre.

3. On a $x^2 - y^2 = x - y \iff x^2 - x = y^2 - y$: c'est la forme précédente avec $\phi(x) = x^2 - x$. De plus,

$$x^2 - y^2 - (x - y) = (x - y)(x + y - 1),$$

donc $y \mathcal{R} x$ si et seulement si $y = x$ ou $y = 1 - x$.

$$\boxed{\text{La classe de } x \text{ est } \{x, 1-x\} : \text{ deux éléments, sauf pour } x = \tfrac{1}{2}, \text{ dont la classe est } \{\tfrac{1}{2}\}.}$$

4. Pour x et y non nuls, $xy > 0$ si et seulement si x et y ont le même signe : c'est la forme précédente, où $\phi(x)$ est le signe de x.

$$\boxed{\text{Il y a deux classes : } \mathbb{R}_+^* \text{ et } \mathbb{R}_-^*.}$$

À retenir : « avoir la même image par ϕ » est la manière la plus rapide de démontrer qu'une relation est une équivalence. Toute relation d'équivalence est d'ailleurs de cette forme, avec pour ϕ l'application qui associe à chaque élément sa classe.

EXERCICE 31 ⋆⋆

1. (a) On retranche x, ce qui est licite, puis l'on divise l'égalité $4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ par 4, en divisant aussi le module :

$$5x \equiv x + \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \iff 4x \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \iff x \equiv \frac{\pi}{8}\ \left[\frac{\pi}{2}\right].$$

$$\boxed{\text{Solutions dans } [0\,,2\pi[: \ \frac{\pi}{8},\ \frac{5\pi}{8},\ \frac{9\pi}{8},\ \frac{13\pi}{8}}$$

(b) D'après le cours, $\cos a = \cos b$ si et seulement si $a \equiv b$ ou $a \equiv -b$ modulo 2π. Donc

$$\cos(3x) = \cos(x) \iff (2x \equiv 0\ [2\pi] \text{ ou } 4x \equiv 0\ [2\pi]) \iff \left(x \equiv 0\ [\pi] \text{ ou } x \equiv 0\ \left[\frac{\pi}{2}\right]\right).$$

Un multiple de π est un multiple de $\frac{\pi}{2}$, donc la première condition est contenue dans la seconde.

$$\boxed{\cos(3x) = \cos(x) \iff x \equiv 0\ \left[\frac{\pi}{2}\right] \qquad \text{Solutions dans } [0\,,2\pi[: \ 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}}$$

2. On a $2x \equiv 2y\ [2\pi]$ si et seulement si $2(y - x) = 2k\pi$, soit $y - x = k\pi$, pour un entier k.

$$\boxed{2x \equiv 2y\ [2\pi] \iff x \equiv y\ [\pi]}$$

On n'a pas $x \equiv y\ [2\pi]$ en général : $x = 0$ et $y = \pi$ en fournissent un contre-exemple. C'est le piège signalé dans le cours : diviser une congruence réelle oblige à diviser le module.

3. On cherche le reste de 3^{2026} modulo 100. On calcule

$$3^{10} = 59\,049 \equiv 49\ [100] \qquad \text{puis} \qquad 3^{20} \equiv 49^2 = 2401 \equiv 1\ [100].$$

Comme $2026 = 20 \times 101 + 6$, la compatibilité avec le produit (proposition 10) donne

$$3^{2026} = (3^{20})^{101} \times 3^6 \equiv 1 \times 729 \equiv 29\ [100].$$

$$\boxed{\text{Les deux derniers chiffres de } 3^{2026} \text{ sont } 29.}$$

4. On a $3^{2n+1} = 3 \times 9^n$ et $2^{n+2} = 4 \times 2^n$. Comme $9 \equiv 2\ [7]$,

$$3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 3 \times 2^n + 4 \times 2^n = 7 \times 2^n \equiv 0\ [7].$$

$$\boxed{7 \text{ divise } 3^{2n+1} + 2^{n+2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

Le calcul évite une récurrence : c'est tout l'intérêt de remplacer un nombre par un représentant plus simple de sa classe.

EXERCICE 32 ⋆⋆

1. La réflexivité et la symétrie sont immédiates. Pour la transitivité, supposons $pq' = p'q$ et $p'q'' = p''q'$. On multiplie la première égalité par q'' :

$$q'(pq'') = (p'q'')\,q = p''q'q = q'(p''q).$$

Comme $q' \neq 0$, on simplifie : $pq'' = p''q$. Enfin, $(p,q)\,\mathcal{R}\,(1,5)$ équivaut à $5p = q$.

$$\boxed{\overline{(1,5)} = \{(k,5k) \mid k \in \mathbb{N}^*\}}$$

Piège : c'est ici que sert la condition $q \neq 0$. Avec $q' = 0$, on aurait $(1,1)\,\mathcal{R}\,(0,0)$ et $(0,0)\,\mathcal{R}\,(2,1)$, sans avoir $(1,1)\,\mathcal{R}\,(2,1)$.

2. *Existence.* Soit (p,q) et $d = \text{pgcd}(p,q)$, non nul puisque $q \geqslant 1$. Le couple $(\frac{p}{d}, \frac{q}{d})$ appartient à E, est formé d'entiers premiers entre eux, et vérifie $p \cdot \frac{q}{d} = \frac{p}{d} \cdot q$.

Unicité. Soit (p,q) et (p',q') équivalents, chacun formé d'entiers premiers entre eux. L'entier q divise $p'q = pq'$ et est premier avec p : d'après le lemme de Gauss, il divise q'. De même q' divise q, et comme ils sont positifs, $q = q'$, puis $p = p'$.

$$\boxed{\text{Chaque classe contient un unique représentant irréductible.}}$$

3. La classe de (p,q) rassemble toutes les écritures $\frac{kp}{kq}$ d'une même fraction : $(p,q)\,\mathcal{R}\,(p',q')$ traduit exactement l'égalité $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$, mais sans utiliser la division. On peut alors *définir* $\mathbb{Q}$ comme l'ensemble des classes, et $\frac{p}{q}$ comme la classe de (p,q) ; la question 2 justifie l'écriture irréductible. C'est la construction de $\mathbb{Q}$ à partir de $\mathbb{Z}$, sur le modèle de la congruence de Gauss qui fabrique les classes modulo n.

EXERCICE 33 ⋆⋆

1. La relation est de la forme $\phi(X) = \phi(Y)$, avec $\phi(X) = X \cap A$: c'est une équivalence, comme à l'exercice 30. La classe de X contient $X \cap A$, qui est incluse dans A, puisque $(X \cap A) \cap A = X \cap A$. Si deux parties B et B' incluses dans A sont équivalentes, alors $B = B \cap A = B' \cap A = B'$.

Les classes sont donc en bijection avec les parties de A. La classe d'une partie $B \subset A$ est formée des parties $B \cup C$, où C décrit les parties de $E \setminus A$.

$$\boxed{2^k \text{ classes, de } 2^{n-k} \text{ éléments chacune}}$$

On vérifie que $2^k \times 2^{n-k} = 2^n$: c'est le lemme des bergers, appliqué à l'application $X \mapsto X \cap A$ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(A)$, dont les fibres sont les classes. On retrouve aussi la bijection θ de l'exercice 23, avec $X = A$ et $Y = E \setminus A$.

2. On note ici $E \setminus Y$ le complémentaire, pour éviter toute confusion avec la notation des classes. La relation est réflexive. Elle est symétrique, car $X = E \setminus Y$ équivaut à $Y = E \setminus X$. Pour la transitivité, supposons $X \sim Y$ et $Y \sim Z$: chacune des deux relations est une égalité ou un passage au complémentaire, et deux passages au complémentaire se compensent, donc $X = Z$ ou $X = E \setminus Z$.

$$\boxed{\text{La classe de } X \text{ est } \{X, E \setminus X\}.}$$

Comme E n'est pas vide, $X \neq E \setminus X$: chaque classe a exactement deux éléments. L'application qui associe à chaque partie sa classe a pour fibres les classes elles-mêmes ; son ensemble d'arrivée, l'ensemble des classes, est une partie de l'ensemble fini $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$, donc il est fini. Le lemme des bergers donne $2^n = 2 \times$ (nombre de classes).

$$\boxed{2^n/2 = 2^{n-1} \text{ classes}}$$

EXERCICE 34 ⋆⋆⋆

1. On appelle *chaîne* de x à y une suite comme dans l'énoncé.

- *Réflexivité :* $x \sim x$ par définition.
- *Symétrie :* une chaîne de x à y, parcourue à l'envers, est une chaîne de y à x, car la condition sur deux termes consécutifs est symétrique.
- *Transitivité :* si $x \sim y$ et $y \sim z$, on met bout à bout une chaîne de x à y et une chaîne de y à z ; les cas $x = y$ ou $y = z$ sont immédiats.

Si $x \mathcal{R} y$, la suite (x, y) est une chaîne : $\sim$ contient $\mathcal{R}$. Soit enfin $\approx$ une équivalence contenant $\mathcal{R}$, et $(x_0, \dots, x_k)$ une chaîne de x à y. Pour chaque i, on a $x_{i-1} \approx x_i$, directement ou grâce à la symétrie de $\approx$. Par transitivité de $\approx$, on obtient $x \approx y$.

$\boxed{\sim \text{ est la plus petite relation d'équivalence contenant } \mathcal{R}.}$

2. On a $0 \mathcal{R} 3$ et $3 \mathcal{R} 6$, mais $6 - 0 = 6 \notin \{3, 5\}$: la relation n'est pas transitive. Pour les classes, on remarque que la chaîne $x,\ x+3,\ x+6,\ x+1$ relie x à $x+1$, puisque $(x+6) - (x+1) = 5$. Donc $x \sim x+1$ pour tout x, et de proche en proche, tous les entiers sont équivalents.

$\boxed{\text{Il n'y a qu'une classe : } \mathbb{Z} \text{ tout entier.}}$

3. Avec $\{4, 6\}$, chaque pas d'une chaîne change x en $x \pm 4$ ou $x \pm 6$, ce qui conserve la parité ; inversement, la chaîne $x,\ x+6,\ x+2$ relie x à $x+2$.

$\boxed{\text{Pour } \{4,6\} : \text{ deux classes, les entiers pairs et les entiers impairs.}}$

Dans le cas général, notons $d = \text{pgcd}(a, b)$. Chaque pas d'une chaîne modifie l'entier d'un multiple de d, donc $x \sim y$ entraîne $d \mid y - x$. Réciproquement, le théorème de Bézout fournit des entiers u et v tels que $d = au + bv$; en faisant $|u|$ pas de $\pm a$ puis $|v|$ pas de $\pm b$, on relie x à $x + d$, et de proche en proche x à $x + md$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{x \sim y \iff y \equiv x\ [\text{pgcd}(a,b)] : \text{ les classes sont les pgcd}(a,b) \text{ classes de congruence.}}$

On retrouve la question 2, avec $\text{pgcd}(3, 5) = 1$, et le début de la question 3, avec $\text{pgcd}(4, 6) = 2$.

Relations d'ordre

EXERCICE 35 ⋆

1. La relation n'est pas réflexive, puisque $1 \neq -1$. Elle n'est donc ni un ordre ni une équivalence ; elle n'est d'ailleurs pas transitive, puisque $1 \mathcal{R} (-1)$ et $(-1) \mathcal{R} 1$, sans avoir $1 \mathcal{R} 1$.

$\boxed{\text{Ni ordre ni équivalence}}$

2. Comme $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, on a $x \mathcal{R} y \iff \sin^2 x = \sin^2 y$: c'est une équivalence, d'après l'exercice 30. Ce n'est pas un ordre, puisque $0 \mathcal{R} \pi$ et $\pi \mathcal{R} 0$.

$\boxed{\text{Équivalence, dont la classe de } x \text{ est } \{y \mid y \equiv x\ [\pi] \text{ ou } y \equiv -x\ [\pi]\}}$

3. La relation est réflexive, avec $p = q = 1$. Elle est transitive : si $y = p\, x^q$ et $z = p'\, y^{q'}$, alors $z = p' p^{q'}\, x^{qq'}$. Pour l'antisymétrie, supposons $y = p\, x^q$ et $x = p'\, y^{q'}$. Si $x = 0$, alors $y = 0$. Sinon $x \geqslant 1$, donc $y = p\, x^q \geqslant x$, et de même $y \geqslant 1$ donne $x \geqslant y$. Enfin, 2 et 3 ne sont pas comparables, car aucun des deux n'est de la forme p fois une puissance de l'autre.

$\boxed{\text{Ordre partiel}}$

4. Les trois propriétés se vérifient composante par composante, à partir de celles de l'ordre sur $\mathbb{R}$. Les complexes 1 et i ne sont pas comparables.

Ordre partiel

5. La relation est réflexive et transitive, mais pas antisymétrique : la fonction nulle et l'indicatrice de $]1\,,+\infty[$ sont en relation dans les deux sens, sans être égales. Elle n'est pas symétrique non plus.

Ni ordre ni équivalence : c'est un préordre

6. La relation est réflexive et transitive. Elle n'est pas antisymétrique, car $x \mapsto x$ et $x \mapsto x+1$ ont la même image $\mathbb{R}$, ni symétrique, car $\{0\} \subset \mathbb{R}$ mais $\mathbb{R} \not\subset \{0\}$.

Ni ordre ni équivalence : c'est un préordre

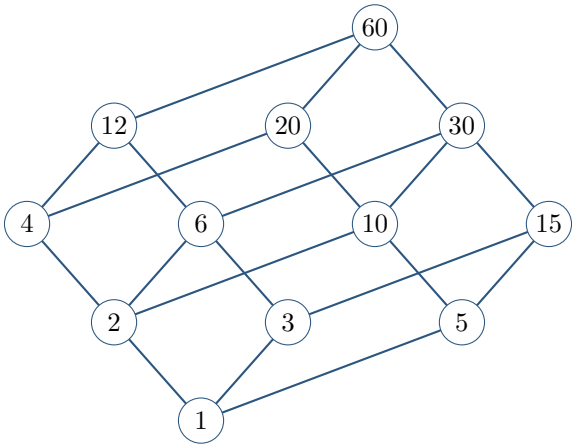
Attention : l'erreur la plus répandue est de conclure trop vite qu'une relation « qui ressemble à $\leqslant$ » est un ordre. Les relations 5 et 6 ne comparent qu'une partie de l'information sur les fonctions, d'où le défaut d'antisymétrie ; l'exercice 29 montre comment en tirer une équivalence.

EXERCICE 36 ⋆⋆

1. Supposons que A ait un plus grand élément M. C'est un majorant de A, et tout majorant m de A vérifie $M \preccurlyeq m$, puisque $M \in A$. Donc M est le plus petit des majorants : $M = \sup A$, qui appartient à A. Réciproquement, si $\sup A$ existe et appartient à A, c'est un élément de A qui majore A, donc son plus grand élément.

$$\max A \text{ existe } \iff (\sup A \text{ existe et } \sup A \in A), \text{ et alors } \max A = \sup A.$$

2. Les diviseurs de $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ sont les $2^a 3^b 5^c$ avec $a \in \{0,1,2\}$ et $b, c \in \{0,1\}$. Dans le diagramme de Hasse, on relie d à d' lorsque d'/d est un nombre premier.



Le diagramme a la forme d'un prisme : trois niveaux pour la puissance de 2, et un carré pour les facteurs 3 et 5. On y lit par exemple que les majorants communs de 4 et 6 sont 12 et 60, et que le plus petit est 12.

Pour deux entiers a et b, les majorants de $\{a,b\}$ sont leurs multiples communs ; d'après le cours de mathématiques expertes, ce sont exactement les multiples de $\text{ppcm}(a,b)$, qui est donc le plus petit d'entre eux pour la divisibilité. De même, les minorants sont les diviseurs communs, qui sont exactement les diviseurs de $\text{pgcd}(a,b)$.

$$\sup\{a,b\} = \text{ppcm}(a,b) \qquad \inf\{a,b\} = \text{pgcd}(a,b)$$

3. Un entier $n \geqslant 2$ ne majore que lui-même si aucun entier $d \geqslant 2$ autre que n ne divise n : ce sont les éléments *minimaux*.

Ce sont les nombres premiers.

Il n'y a pas de plus petit élément : il diviserait 2 et 3, donc leur pgcd, qui vaut 1. On a donc une infinité d'éléments minimaux, mais aucun plus petit élément : dans un ordre partiel, « minimal » et « plus petit » sont deux notions bien différentes.

4. Une partie M majore tous les A_i si et seulement si elle contient leur réunion, et une partie m les minore si et seulement si elle est contenue dans leur intersection.

$$\boxed{\sup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} A_i \qquad \inf_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} A_i}$$

Pour la famille vide, la borne supérieure est $\varnothing$ et la borne inférieure est E : tout élément de $\mathcal{P}(E)$ majore et minore la famille vide.

EXERCICE 37 ⋆⋆⋆

1. *Réflexivité :* $a = a$ et $b \leqslant b$. *Antisymétrie :* si $(a,b) \preccurlyeq (c,d)$ et $(c,d) \preccurlyeq (a,b)$, alors $a \leqslant c$ et $c \leqslant a$, donc $a = c$, puis $b \leqslant d$ et $d \leqslant b$. *Transitivité :* si $(a,b) \preccurlyeq (c,d) \preccurlyeq (e,f)$ et si l'une des deux inégalités entre premières composantes est stricte, alors $a < e$; sinon $a = c = e$ et $b \leqslant d \leqslant f$. *Totalité :* si $a \neq c$, l'un des deux est plus petit ; si $a = c$, on compare b et d.

$$\boxed{\preccurlyeq \text{ est un ordre total, sans plus grand élément, car } (a,b) \prec (a+1,0).}$$

2. Un majorant (c,d) de A vérifierait $c \geqslant p$ pour tout p : la partie A n'est pas majorée. La partie B est majorée par $(3,0)$. Elle n'a pas de plus grand élément, car $(2,10p) \prec (2,10(p+1))$. Ses majorants sont les couples (c,d) avec $c \geqslant 3$: un couple $(2,d)$ est dépassé par $(2,10p)$ dès que $10p > d$.

$$\boxed{A \text{ n'est pas majorée ; } B \text{ n'a pas de plus grand élément, mais } \sup B = (3,0) \notin B.}$$

Le couple $(3,0)$ vient « juste après » tous les $(2,b)$: entre les deux, il n'y a rien, bien qu'il y ait une infinité d'éléments au-dessous de $(3,0)$.

3. Soit P une partie non vide de $\mathbb{N}^2$. L'ensemble des premières composantes de ses éléments est une partie non vide de $\mathbb{N}$, qui a un plus petit élément a_0. Parmi les éléments de P de première composante a_0, on choisit celui dont la seconde composante b_0 est la plus petite. Pour tout $(a,b) \in P$, on a $a > a_0$, ou $a = a_0$ et $b \geqslant b_0$.

$$\boxed{(a_0,b_0) \text{ est le plus petit élément de } P.}$$

4. S'il existait une suite strictement décroissante (u_n), l'ensemble de ses termes aurait un plus petit élément u_{n_0}, d'après la question 3. Or $u_{n_0+1} \prec u_{n_0}$: c'est absurde.

$$\boxed{\text{Il n'existe pas de suite strictement décroissante dans } (\mathbb{N}^2, \preccurlyeq).}$$

C'est le même argument qu'à l'exercice 35 de la feuille du chapitre 1 pour $\mathbb{N}$. Il est ici plus surprenant : au-dessous de $(1,0)$, il y a une infinité d'éléments, les $(0,b)$. Une suite peut descendre aussi longtemps qu'elle veut, mais toute descente finit par s'arrêter.

EXERCICE 38 ⋆⋆⋆

1. Les trois propriétés se vérifient point par point, à partir de celles de l'ordre sur $\mathbb{R}$. L'ordre n'est pas total : les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$ ne sont pas comparables, la première étant plus grande en 1 et plus petite en -1.

$$\boxed{\preccurlyeq \text{ est un ordre partiel.}}$$

2. Soit $0 < m < m'$. Pour $x > 0$, $\mathrm{e}^{mx} < \mathrm{e}^{m'x}$, et pour $x < 0$, $\mathrm{e}^{mx} > \mathrm{e}^{m'x}$: les deux fonctions ne sont pas comparables. La fonction nulle minore U. Un majorant g vérifierait $g(1) \geqslant \mathrm{e}^m$ pour tout $m > 0$, ce qui est impossible.

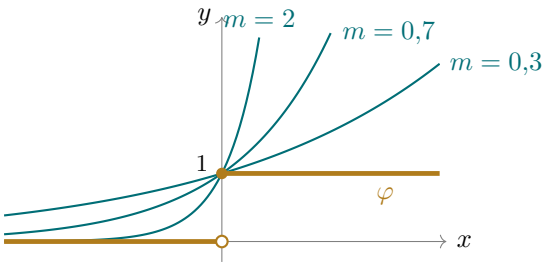
$$\boxed{\text{Deux éléments distincts de } U \text{ ne sont pas comparables ; } U \text{ est minorée, non majorée.}}$$

3. Une fonction g minore U si et seulement si, pour tout x, $g(x)$ minore l'ensemble $\{\mathrm{e}^{mx} \mid m > 0\}$.

- Pour $x \geqslant 0$, cet ensemble est contenu dans $[1\,,+\infty[$, et il contient des valeurs aussi proches de 1 que l'on veut, en prenant m petit. Donc $g(x) \leqslant 1$.
- Pour $x < 0$, il est contenu dans $]0\,,+\infty[$, et contient des valeurs aussi proches de 0 que l'on veut, en prenant m grand. Donc $g(x) \leqslant 0$.

Notons φ la fonction qui vaut 1 sur $\mathbb{R}_+$ et 0 sur $\mathbb{R}_-^*$. Les minorants de U sont exactement les fonctions $g \preccurlyeq \varphi$, et φ elle-même est un minorant.

$$\boxed{\inf U = \varphi = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+},\ \text{qui n'appartient pas à } U.}$$



Les courbes de U, en bleu pétrole, se resserrent vers la droite $y = 1$ à droite de l'axe et vers l'axe des abscisses à gauche quand m varie. Leur borne inférieure, en ocre, est discontinue en 0, alors que toutes les fonctions de U sont continues.

EXERCICE 39 ⋆⋆⋆

1. On a $\Phi(E) \subset E$, donc $E \in \mathcal{F}$. Soit $X \in \mathcal{F}$. Comme $A \subset X$, la croissance donne $\Phi(A) \subset \Phi(X) \subset X$. La partie $\Phi(A)$ est donc contenue dans tous les éléments de $\mathcal{F}$, donc dans leur intersection.

$$\boxed{\Phi(A) \subset A}$$

2. En appliquant Φ à l'inclusion $\Phi(A) \subset A$, on obtient $\Phi\big(\Phi(A)\big) \subset \Phi(A)$, ce qui signifie $\Phi(A) \in \mathcal{F}$. Donc $A \subset \Phi(A)$, puisque A est l'intersection des éléments de $\mathcal{F}$.

$$\boxed{\Phi(A) = A}$$

3. Si $\Phi(X) = X$, alors en particulier $\Phi(X) \subset X$, c'est-à-dire $X \in \mathcal{F}$, et donc $A \subset X$.

$$\boxed{A \text{ est le plus petit point fixe de } \Phi.}$$

C'est le *théorème de Knaster-Tarski* pour l'ensemble ordonné $(\mathcal{P}(E), \subset)$. Il servira à l'exercice 48.

4. Ici Φ est bien croissante, et une partie X vérifie $\Phi(X) \subset X$ si et seulement si $0 \in X$ et X est stable par $n \mapsto n+2$. La partie $2\mathbb{N}$ vérifie ces deux conditions. Réciproquement, toute partie X qui les vérifie contient 0, puis 2, puis 4, et par récurrence tous les entiers pairs.

$$\boxed{A = 2\mathbb{N}}$$

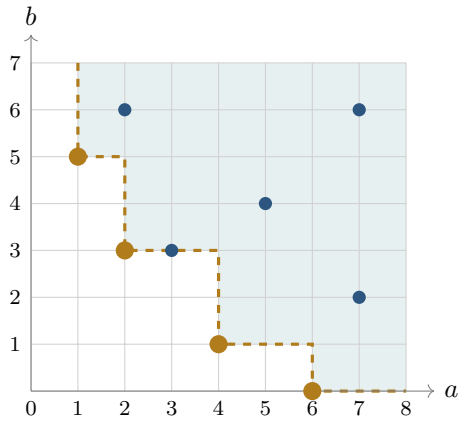
On reconnaît une définition « par induction » : A est la plus petite partie qui contient 0 et qui est stable par $n \mapsto n+2$.

EXERCICE 40 ⋆⋆⋆

1. On examine les neuf points. Un point n'est pas au sud-ouest dès qu'un autre point de B est à la fois à sa gauche, au sens large, et au-dessous, au sens large.

- $(2,6)$ est dominé par $(1,5)$, $(3,3)$ par $(2,3)$, $(5,4)$ par $(4,1)$, $(7,2)$ et $(7,6)$ par $(6,0)$;
- aucun point n'est à la fois au sud et à l'ouest de $(1,5)$, $(2,3)$, $(4,1)$ et $(6,0)$.

$$\boxed{\text{Les points au sud-ouest sont } (1,5),\ (2,3),\ (4,1) \text{ et } (6,0).}$$



Les quatre points au sud-ouest, en ocre, dessinent un escalier descendant. Chaque autre point de B se trouve dans la zone teintée, réunion des quarts de plan situés au nord-est des points de l'escalier.

2. Les trois propriétés se vérifient composante par composante. L'ordre est partiel, car $(0,1)$ et $(1,0)$ ne sont pas comparables. Un point de B est au sud-ouest si aucun autre point de B ne lui est inférieur.

$$\boxed{\text{Les points au sud-ouest de } B \text{ sont les éléments minimaux de } (B, \leqslant).}$$

3. Soit B une partie non vide. On choisit la plus petite première composante a_0 des points de B, puis la plus petite seconde composante b_0 des points de B d'abscisse a_0. Si $(a', b') \in B$ vérifie $a' \leqslant a_0$ et $b' \leqslant b_0$, alors $a' = a_0$ par minimalité de a_0, puis $b' = b_0$ par minimalité de b_0.

$$\boxed{(a_0, b_0) \text{ est au sud-ouest de } B.}$$

On a pris le plus petit élément de B pour l'ordre lexicographique de l'exercice 37.

4. Deux points distincts au sud-ouest ne sont pas comparables. Ils n'ont donc pas la même abscisse, et si (a, b) et (a', b') sont au sud-ouest avec $a < a'$, alors $b > b'$, sinon on aurait $(a, b) \leqslant (a', b')$. Rangeons les points au sud-ouest par abscisses croissantes : leurs ordonnées forment une suite strictement décroissante d'entiers naturels. Elle a au plus $b_0 + 1$ termes, où b_0 est l'ordonnée du premier point.

$$\boxed{\text{Toute partie non vide de } \mathbb{N}^2 \text{ a un nombre fini, non nul, de points au sud-ouest.}}$$

C'est le *lemme de Dickson* en dimension 2 : un ensemble ordonné peut être partiel et pourtant n'avoir, dans chaque partie, qu'un nombre fini d'éléments minimaux.

Exercices de synthèse

EXERCICE 41 ⋆⋆

1. **Fausse** D'après la proposition 6 du cours, c'est f qui est alors injective, pas nécessairement g. Avec $f : \{0\} \to \{0,1\}$, $0 \mapsto 0$, et $g : \{0,1\} \to \{0\}$, l'application $g \circ f$ est injective, puisque son ensemble de départ est un singleton, mais g ne l'est pas.
2. **Vraie** Par récurrence : $f(0) \geqslant 0$, et si $f(n) \geqslant n$, alors $f(n+1) > f(n) \geqslant n$, donc $f(n+1) \geqslant n+1$, puisque ce sont des entiers.
3. **Vraie** C'est la question 2 de l'exercice 8 : $x \in f^{-1}(B \setminus A)$ si et seulement si $f(x) \in B$ et $f(x) \notin A$.
4. **Vraie** C'est la question 2 de l'exercice 18 : l'égalité $f(f(x)) = f(x)$ et l'injectivité donnent $f(x) = x$.
5. **Vraie** Cette application c vérifie $c \circ c = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(E)}$, puisque $E \setminus (E \setminus A) = A$: c'est une involution, donc une bijection.

6. **Fausse** L'égalité $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ entraîne seulement que g est injective et f surjective. Prenons $g = \exp$, et $f(x) = \ln x$ pour $x > 0$, $f(x) = 0$ sinon : on a bien $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, mais g n'est pas surjective et f n'est pas injective.

7. **Fausse** La relation est réflexive et symétrique, mais pas transitive : $0 \mathcal{R} 1$ et $1 \mathcal{R} 2$, alors que $|0 - 2| = 2 > 1$.

8. **Vraie** Par récurrence sur le nombre n d'éléments. Un singleton a un plus grand élément. Si toute partie à n éléments en a un, soit A à $n+1$ éléments, $a \in A$, et M le plus grand élément de $A \setminus \{a\}$. Comme l'ordre est total, a et M sont comparables, et le plus grand des deux est le plus grand élément de A.

9. **Fausse** La partie $\{2, 3\}$ n'a pas de plus petit élément, puisque ni 2 ne divise 3, ni 3 ne divise 2.

10. **Vraie** C'est la question 2 de l'exercice 22.

Vraies : 2, 3, 4, 5, 8, 10. Fausses : 1, 6, 7, 9.

Piège : pour l'affirmation 8, la totalité de l'ordre est indispensable. Dans $(\mathbb{N}^*, |)$, la partie finie $\{2, 3\}$ n'a pas non plus de plus grand élément.

EXERCICE 42 ⋆⋆

1. L'application Θ est bien définie : pour $x \in F$, l'application partielle $\varphi(x, \cdot)$ appartient à E^G, donc $\Theta(\varphi)$ est une application de F dans E^G. Pour construire la réciproque, on fait le chemin inverse : à une application $\psi : F \to E^G$, qui associe à chaque $x \in F$ une application $\psi(x) : G \to E$, on associe l'application de deux variables

$$\Lambda(\psi) : \left| \begin{array}{ccc} F \times G & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & \psi(x)(y) \end{array} \right.$$

Soit $\varphi \in E^{F \times G}$. Pour tout $(x, y) \in F \times G$, on a

$$\Lambda\big(\Theta(\varphi)\big)(x, y) = \Theta(\varphi)(x)(y) = \varphi(x, \cdot)(y) = \varphi(x, y),$$

donc $\Lambda \circ \Theta$ est l'identité de $E^{F \times G}$. Soit ensuite $\psi \in (E^G)^F$ et $x \in F$. L'application $\Theta\big(\Lambda(\psi)\big)(x)$ est $y \mapsto \Lambda(\psi)(x, y) = \psi(x)(y)$, c'est-à-dire $\psi(x)$; donc $\Theta \circ \Lambda$ est l'identité de $(E^G)^F$. Le théorème 1 du cours conclut.

Θ est bijective, et $\Theta^{-1}(\psi)$ est l'application $(x, y) \mapsto \psi(x)(y)$.

2. Se donner deux applications $u : E \to F$ et $v : E \to G$, c'est se donner, en chaque point x, le couple de leurs valeurs. On pose donc

$$\Pi : \left| \begin{array}{ccc} F^E \times G^E & \longrightarrow & (F \times G)^E \\ (u, v) & \longmapsto & (x \mapsto (u(x), v(x))) \end{array} \right.$$

Notons $p : F \times G \to F$ et $q : F \times G \to G$ les deux projections, et associons à $w \in (F \times G)^E$ le couple $(p \circ w,\ q \circ w)$. D'une part, $p(u(x), v(x)) = u(x)$ et $q(u(x), v(x)) = v(x)$: on retrouve (u, v). D'autre part, pour tout $x \in E$, le couple $(p(w(x)), q(w(x)))$ est $w(x)$: on retrouve w. Le théorème 1 du cours conclut encore.

Π est bijective, de réciproque $w \mapsto (p \circ w,\ q \circ w)$.

3. On découpe une application définie sur $F \cup G$ en ses deux restrictions, en posant

$$\rho : \left| \begin{array}{ccc} E^{F \cup G} & \longrightarrow & E^F \times E^G \\ w & \longmapsto & (w_{|F},\ w_{|G}) \end{array} \right.$$

Inversement, à $(u, v) \in E^F \times E^G$, on associe l'application $w : F \cup G \to E$ définie par $w(z) = u(z)$ si $z \in F$ et $w(z) = v(z)$ si $z \in G$. C'est ici que sert l'hypothèse : chaque élément de $F \cup G$ appartient à *une seule* des deux parties, ce qui rend la définition de w cohérente. Les restrictions de w à F et à G

sont u et v, et une application w est le recollement de ses deux restrictions : les deux composées sont les identités.

$$\boxed{w \mapsto (w_{|F},\ w_{|G}) \text{ est une bijection de } E^{F\cup G} \text{ sur } E^F \times E^G.}$$

Piège : sans la disjonction, ρ reste définie, mais elle cesse d'être surjective dès que E a deux éléments distincts α et β. Si $z \in F \cap G$, un couple (u, v) tel que $u(z) = \alpha$ et $v(z) = \beta$ n'est pas atteint, puisque les deux restrictions d'une même application prennent la même valeur en z.

4. D'après l'exercice 25, l'ensemble des applications d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments a n^p éléments. Les ensembles $F \times G$ et $F \cup G$ ont bc et $b+c$ éléments, d'après les lemmes 6 et 4 du cours, et le lemme 6 donne aussi le cardinal des produits $F^E \times G^E$ et $E^F \times E^G$. Enfin, deux ensembles en bijection ont le même cardinal, d'après le lemme 2. Les questions 1, 2 et 3 donnent alors, dans cet ordre :

$$\boxed{a^{bc} = (a^c)^b \qquad b^a\, c^a = (bc)^a \qquad a^{b+c} = a^b\, a^c}$$

Ces trois règles, que l'on démontrerait d'ordinaire par récurrence, deviennent ici des évidences : chacune affirme seulement que deux façons de ranger les mêmes données en contiennent autant l'une que l'autre. Elles valent pour tous les entiers naturels, y compris 0, avec la convention $0^0 = 1$, qui est celle que dicte l'exercice 25 : il existe une application, et une seule, de $\varnothing$ dans $\varnothing$.

5. Comme dans le cours, on identifie une relation binaire sur F à son graphe, qui est une partie de $F \times F$; l'ensemble des relations binaires sur F est donc $\mathcal{P}(F \times F)$. Pour une relation $\mathcal{R}$ et $x \in F$, notons $\mathcal{R}(x) = \{y \in F \mid x\,\mathcal{R}\,y\}$, et $\Sigma(\mathcal{R})$ l'application $x \mapsto \mathcal{R}(x)$ de F dans $\mathcal{P}(F)$. Inversement, à une application $s : F \to \mathcal{P}(F)$, on associe la relation $\mathcal{R}_s$ de graphe $\{(x, y) \in F \times F \mid y \in s(x)\}$.

- Pour toute relation $\mathcal{R}$, on a $y \in \Sigma(\mathcal{R})(x) \iff x\,\mathcal{R}\,y$: la relation associée à $\Sigma(\mathcal{R})$ est $\mathcal{R}$.
- Pour toute application s et tout $x \in F$, on a $\mathcal{R}_s(x) = \{y \mid y \in s(x)\} = s(x)$: l'application associée à $\mathcal{R}_s$ est s.

D'après le théorème 1 du cours, Σ est une bijection de $\mathcal{P}(F \times F)$ sur $\mathcal{P}(F)^F$. Si F a n éléments, $\mathcal{P}(F)$ en a 2^n, d'après la question 1 de l'exercice 25, et la question 2 du même exercice donne $(2^n)^n$ applications de F dans $\mathcal{P}(F)$. Avec la première règle de la question 4 :

$$\boxed{\text{Il y a } (2^n)^n = 2^{n^2} \text{ relations binaires sur un ensemble à } n \text{ éléments.}}$$

On retrouve le résultat de la question 1 de l'exercice 28, qui comptait directement les parties de $F \times F$. La bijection Σ n'est d'ailleurs autre que celle de la question 1 pour $E = \{0, 1\}$, lue à travers la bijection $A \mapsto \mathbf{1}_A$ de l'exercice 25 : la relation correspond à l'indicatrice de son graphe, application de deux variables, et $\mathcal{R}(x)$ à l'application partielle $\mathbf{1}_{\mathcal{R}(x)} = \mathbf{1}_G(x, \cdot)$, où G est le graphe de $\mathcal{R}$.
À retenir : une application de deux variables est la même chose qu'une application qui, à la première variable, associe une application de la seconde. En informatique, ce passage s'appelle la *curryfication*, du nom du logicien Haskell Curry ; la question 5 en est une illustration familière, puisque décrire une relation par la liste, pour chaque x, des éléments y auxquels il est relié, c'est représenter un graphe par ses listes d'adjacence.

EXERCICE 43 ⋆⋆⋆

1. Soit g telle que $g \circ g = f$, avec f bijective. Comme $g \circ g$ est injective, g l'est (proposition 6 du cours, appliquée à la composée $g \circ g$) ; comme $g \circ g$ est surjective, g l'est aussi. Enfin,

$$g \circ f = g \circ g \circ g = f \circ g.$$

$$\boxed{g \text{ est bijective et commute avec } f.}$$

La commutation ne demande d'ailleurs pas que f soit bijective : toute racine carrée de f commute avec f.

2. Soit $f : n \mapsto n+1$ sur $\mathbb{Z}$, et supposons $g \circ g = f$. D'après la question 1, $g(n+1) = g(n)+1$ pour tout n, d'où, par récurrence dans les deux sens, $g(n) = n + c$ avec $c = g(0)$. Alors $g(g(n)) = n + 2c$, et l'on devrait avoir $2c = 1$, ce qui est impossible dans $\mathbb{Z}$.

$$\boxed{n \mapsto n+1 \text{ n'a pas de racine carrée sur } \mathbb{Z}\ ;\ n \mapsto n+1 \text{ est une racine carrée de } n \mapsto n+2.}$$

Sur $\mathbb{N}$, le même raisonnement s'applique : la commutation donne $g(n) = n + g(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis $2g(0) = 1$.

$$\boxed{n \mapsto n+1 \text{ n'a pas de racine carrée sur } \mathbb{N} \text{ non plus.}}$$

3. Si $g(x) = ax + b$, alors $g(g(x)) = a^2x + (a+1)b$, et l'égalité avec $-x$ imposerait $a^2 = -1$: il n'y a pas de racine carrée affine. Pour en construire une, on s'inspire de la rotation d'un quart de tour, qui envoie un vecteur u sur v, puis v sur $-u$. On fait « tourner » quatre blocs, pour chaque entier $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in]2k\,,2k+1] \\ 1-x & \text{si } x \in]2k+1\,,2k+2] \\ x-1 & \text{si } x \in [-2k-1\,,-2k[\\ -x-1 & \text{si } x \in [-2k-2\,,-2k-1[\end{cases} \qquad g(0) = 0}$$

Ces blocs recouvrent $\mathbb{R}$, et g envoie chaque bloc sur le suivant dans le cycle

$$]2k\,,2k+1] \longrightarrow]2k+1\,,2k+2] \longrightarrow [-2k-1\,,-2k[\longrightarrow [-2k-2\,,-2k-1[\longrightarrow]2k\,,2k+1].$$

On vérifie $g(g(x)) = -x$ sur chaque bloc :

- sur $]2k\,,2k+1]$: $x \mapsto x+1 \mapsto 1-(x+1) = -x$;
- sur $]2k+1\,,2k+2]$: $x \mapsto 1-x \mapsto (1-x)-1 = -x$;
- sur $[-2k-1\,,-2k[$: $x \mapsto x-1 \mapsto -(x-1)-1 = -x$;
- sur $[-2k-2\,,-2k-1[$: $x \mapsto -x-1 \mapsto (-x-1)+1 = -x$.

Quatre applications de g ramènent chaque réel à lui-même, comme quatre quarts de tour. Une telle racine carrée ne peut pas être continue, mais ce n'était pas demandé.

EXERCICE 44 ⋆⋆⋆

1. On a $f(0) = f(0 \cdot 0) = f(0)^2$ et $f(1) = f(1)^2$, donc $f(0)$ et $f(1)$ appartiennent à $\{0,1\}$. Comme $f(0) < f(1)$, on obtient $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Par récurrence sur j, $f(k^{j+1}) = f(k^j)\,f(k) = k^j \cdot k$.

$$\boxed{f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f(k^j) = k^j \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}}$$

2. L'inégalité $f(n) \geqslant n$ est l'affirmation 2 de l'exercice 41. Plus précisément, une application strictement croissante à valeurs entières augmente d'au moins 1 à chaque pas, donc, pour $m \leqslant n$,

$$f(n) - f(m) \geqslant n - m.$$

Soit $n \in [\![k^j\,;k^{j+1}]\!]$. On applique cette inégalité entre k^j et n, puis entre n et k^{j+1} :

$$f(n) \geqslant f(k^j) + (n-k^j) = n \qquad \text{et} \qquad f(n) \leqslant f(k^{j+1}) - (k^{j+1}-n) = n.$$

$$\boxed{f(n) = n \text{ pour tout } n \in [\![k^j\,;k^{j+1}]\!]}$$

L'image de l'intervalle d'entiers $[\![k^j\,;k^{j+1}]\!]$ est « coincée » : ses extrémités sont fixes, et une application strictement croissante n'a pas la place de s'en écarter.

3. Les intervalles $[\![k^j\,;k^{j+1}]\!]$, pour $j \in \mathbb{N}$, recouvrent $\mathbb{N}^*$, car $k^0 = 1$ et k^j tend vers $+\infty$. Avec $f(0) = 0$, on conclut.

$$\boxed{f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}}$$

L'hypothèse $f(k) = k$ est indispensable : l'application $n \mapsto n^2$ est strictement croissante et multiplicative, mais ses seuls points fixes sont 0 et 1.

EXERCICE 45 ⋆⋆⋆

1. Si $h(k) = f(k)\,g(k)$ vaut $\pm p$ avec p premier, l'un des deux facteurs vaut ± 1, puisque les seuls diviseurs de p sont ± 1 et $\pm p$. Or f est injective, donc $f(k) \in \{-1, 1\}$ pour au plus deux entiers k ; de même pour g.

$$\boxed{\text{Au plus quatre entiers } k \text{ vérifient } h(k) = \pm p \text{ avec } p \text{ premier.}}$$

2. D'après la question 1, l'application h atteint au plus quatre valeurs de la forme $\pm p$. Or il existe une infinité de nombres premiers : l'un d'eux au moins n'est pas atteint.

$$\boxed{h \text{ n'est pas surjective.}}$$

3. Oui. On prend $f = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$, et g égale à l'identité sur $\mathbb{N}$, qui permute circulairement les entiers négatifs par blocs de trois : pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$g : \quad -(3j+1) \longmapsto -(3j+2) \longmapsto -(3j+3) \longmapsto -(3j+1).$$

L'application g est une bijection de $\mathbb{Z}$, puisqu'elle permute chaque bloc. Les valeurs de h sont alors :

- pour $k \in \mathbb{N}$, $h(k) = k^2$: ce sont les carrés, deux à deux distincts ;
- pour le bloc d'indice j, les valeurs $(3j+1)(3j+2)$, $(3j+1)(3j+3)$ et $(3j+2)(3j+3)$.

Ces trois produits sont rangés par ordre strictement croissant, le dernier est strictement inférieur au premier produit du bloc suivant, $(3j+4)(3j+5)$, et aucun n'est un carré : les deux premiers sont strictement compris entre $(3j+1)^2$ et $(3j+2)^2$, le troisième entre $(3j+2)^2$ et $(3j+3)^2$.

$$\boxed{h \text{ est injective pour ce choix de } f \text{ et } g.}$$

Piège : la tentative naturelle d'échanger -1 et -2, puis -3 et -4, etc., échoue, car $h(-1) = (-1)(-2) = (-2)(-1) = h(-2)$. Une transposition donne deux fois le même produit ; c'est pourquoi l'on utilise des cycles de longueur 3.

EXERCICE 46 ⋆⋆⋆

Sens direct. Supposons X infini, et soit $f : X \to X$. On fixe $x \in X$ et l'on considère

$$S = \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad \text{et} \qquad S' = \{f^n(x) \mid n \geqslant 1\}.$$

Ces deux parties sont non vides et stables, puisque f envoie $f^n(x)$ sur $f^{n+1}(x)$. Si l'une d'elles diffère de X, on a trouvé la partie voulue. Sinon $S' = X$ contient x, qui s'écrit $x = f^m(x)$ avec $m \geqslant 1$. Les itérés de x se répètent alors de m en m, et $S = \{x, f(x), \dots, f^{m-1}(x)\}$. Associer à chaque élément de S le plus petit $k \in [\![0\,;m-1]\!]$ tel qu'il s'écrive $f^k(x)$ définit une injection de S dans $[\![0\,;m-1]\!]$: S est en bijection avec une partie d'un ensemble fini, donc finie d'après les lemmes 2 et 3 du cours, alors que $S = X$ est infini. C'est absurde.

Réciproque. Montrons la contraposée : si X est fini, il existe une application sans partie stable autre que $\varnothing$ et X. Si X est vide, c'est évident, car $\varnothing = X$. Sinon, écrivons $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, et posons $f(x_i) = x_{i+1}$ pour $i < n$ et $f(x_n) = x_1$. Une partie stable non vide contient un x_i, donc x_{i+1}, et de proche en proche tous les éléments : c'est X.

$$\boxed{X \text{ est infini} \iff \text{toute application } X \to X \text{ a une partie stable différente de } \varnothing \text{ et de } X.}$$

On obtient ainsi une caractérisation de l'infini qui ne fait intervenir aucun nombre, dans l'esprit de la définition de Dedekind : un ensemble est infini s'il est en bijection avec une partie stricte de lui-même.

EXERCICE 47 ⋆⋆⋆

1. Les singletons conviennent : $\{n\} \subset \{m\}$ signifie $n \in \{m\}$, c'est-à-dire $n = m$.

$$\boxed{A_n = \{n\}}$$

2. Supposons $B_X \subset B_Y$. Les entiers pairs de B_Y sont les $2k$ avec $k \in Y$, et ses entiers impairs les $2k+1$ avec $k \notin Y$.

- Si $k \in X$, l'entier pair $2k$ appartient à B_X, donc à B_Y : ainsi $k \in Y$, et $X \subset Y$.
- Si $k \notin X$, l'entier impair $2k+1$ appartient à B_X, donc à B_Y : ainsi $k \notin Y$. On a donc $\mathbb{N}\backslash X \subset \mathbb{N}\backslash Y$, c'est-à-dire $Y \subset X$.

$$\boxed{B_X \subset B_Y \Longrightarrow X = Y}$$

En particulier, $B_X = B_Y$ entraîne $X = Y$: les parties B_X sont deux à deux distinctes. Et si $X \neq Y$, aucune des inclusions $B_X \subset B_Y$ et $B_Y \subset B_X$ n'a lieu : les parties B_X sont deux à deux incomparables.

Le codage explique ce phénomène : les entiers pairs disent ce que X contient, les impairs ce qu'il ne contient pas. Agrandir X ajoute des pairs, mais retire autant d'impairs, si bien qu'aucune partie B_X ne peut en contenir une autre. On obtient ainsi, dans l'ensemble ordonné $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subset)$, une famille d'éléments deux à deux incomparables qui est indexée par $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ tout entier.

3. Chaque D_i est une partie non vide de $\mathbb{N}$; elle possède un plus petit élément, ce qui définit l'application $i \mapsto \min D_i$. Si $\min D_i = \min D_j = k$, alors $k \in D_i \cap D_j$: cette intersection n'est pas vide, et la disjonction des parties d'indices distincts impose $i = j$.

$$\boxed{i \mapsto \min D_i \text{ est injective.}}$$

Supposons maintenant $I = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, et notons $\iota : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ l'injection obtenue. On définit $s : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ en posant $s(n) = X$ si $n = \iota(X)$, la partie X étant unique par injectivité, et $s(n) = \varnothing$ si n n'est pas dans l'image de ι. Alors $s\big(\iota(X)\big) = X$ pour toute partie X : l'application s est une surjection de $\mathbb{N}$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, ce que le théorème 3 du cours (Cantor) interdit.

$$\boxed{\text{Aucune famille de parties non vides de } \mathbb{N} \text{ deux à deux disjointes n'est indexée par } \mathcal{P}(\mathbb{N}).}$$

4. (a) L'entier $c(P)$ est bien défini : P figure dans la suite (F_j), donc l'ensemble des j tels que $F_j = P$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, qui a un plus petit élément. Si $c(P) = c(Q) = j$, alors $P = F_j = Q$: l'application c est injective.

Les éléments pairs de $T_n(X)$ sont inférieurs ou égaux à $2n$, donc le plus grand élément de $T_n(X)$ est $2n+1$. Deux entiers $n \neq n'$ donnent donc des parties $T_n(X) \neq T_{n'}(X)$, et, c étant injective, l'application $n \mapsto c\big(T_n(X)\big)$ est une injection de $\mathbb{N}$ dans C_X. Si C_X était finie, à p éléments, la restriction de cette injection à $[\![0\,;p]\!]$, qui a $p+1$ éléments, serait une injection d'un ensemble à $p+1$ éléments dans un ensemble à p éléments, ce que le théorème 2 du cours interdit.

$$\boxed{c \text{ est injective, et } C_X \text{ est infinie.}}$$

(b) Par définition de m, les parties X et Y ont les mêmes éléments strictement inférieurs à m, et m appartient à l'une sans appartenir à l'autre ; quitte à les échanger, on suppose $m \in X$ et $m \notin Y$.

- Si $n < m$, alors $X \cap [\![0\,;n]\!] = Y \cap [\![0\,;n]\!]$, donc $T_n(X) = T_n(Y)$, et l'entier $c\big(T_n(X)\big)$ appartient à $C_X \cap C_Y$.
- Réciproquement, soit $z \in C_X \cap C_Y$, de la forme $z = c\big(T_n(X)\big) = c\big(T_{n'}(Y)\big)$. L'injectivité de c donne $T_n(X) = T_{n'}(Y)$, et la comparaison des plus grands éléments donne $n = n'$. Si l'on avait $n \geqslant m$, l'entier $2m$ appartiendrait à $T_n(X)$, puisque $m \in X$, donc à $T_n(Y)$, et l'on aurait $m \in Y$: c'est exclu. Donc $n < m$.

Ainsi $C_X \cap C_Y = \{c\big(T_n(X)\big) \mid n \in [\![0\,;m-1]\!]\}$ est l'image de $[\![0\,;m-1]\!]$ par l'injection de la question (a) : elle est en bijection avec cet intervalle.

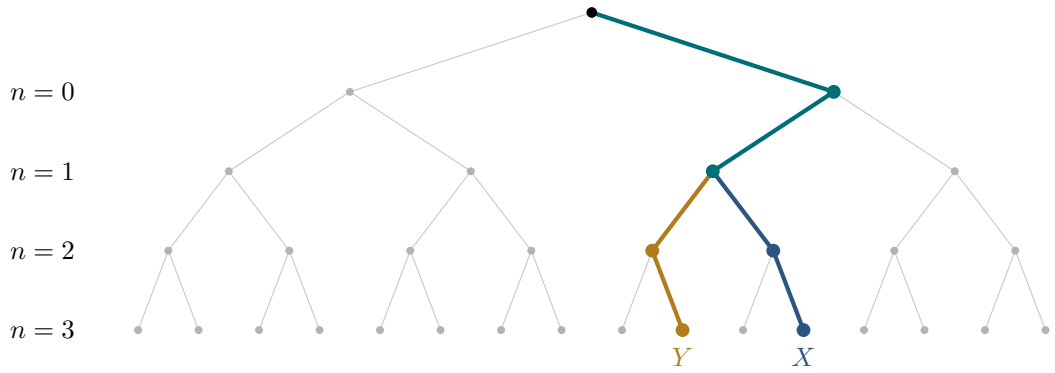
$$\boxed{\text{card}(C_X \cap C_Y) = m}$$

(c) On raisonne par contraposée : soit $X \neq Y$. La partie C_X est la réunion disjointe de $C_X \setminus C_Y$ et de $C_X \cap C_Y$, qui est finie d'après (b). Si $C_X \setminus C_Y$ était finie, C_X le serait aussi, d'après le lemme 4 du cours, ce qui contredit (a). La partie $C_X \setminus C_Y$ est donc infinie, et $C_X \,\Delta\, C_Y$, qui la contient, l'est aussi, d'après le lemme 3.

$$\boxed{C_X \,\Delta\, C_Y \text{ finie} \Longrightarrow X = Y}$$

(d) Les parties C_X, pour $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, sont infinies, deux à deux distinctes d'après (c), et deux à deux presque disjointes d'après (b). La question 3 interdisait une telle famille de parties deux à deux *disjointes* ; il suffit d'autoriser des intersections finies pour qu'elle existe.

$(C_X)_{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N})}$ est une famille de parties infinies de $\mathbb{N}$, deux à deux presque disjointes.



On lit la construction sur cet arbre. Le nœud de profondeur n atteint en descendant à droite au niveau k si $k \in X$, et à gauche sinon, représente la partie $X \cap [\![0\,;n]\!]$, codée par l'entier $c(T_n(X))$; la partie C_X est l'ensemble des codes des nœuds de la branche de X. Ici X et Y contiennent 0, ne contiennent pas 1, puis se séparent en $m = 2$: leurs branches n'ont en commun que les deux nœuds du tronc, en bleu pétrole, et $C_X \cap C_Y$ a deux éléments.
À retenir : l'intuition selon laquelle des parties infinies d'intersections finies seraient « presque » disjointes, donc pas plus nombreuses que des parties disjointes, est fausse. Des parties disjointes s'injectent dans $\mathbb{N}$ par leurs plus petits éléments, alors que les branches d'un arbre binaire, qui partagent deux à deux un tronc fini, sont en bijection avec les parties de $\mathbb{N}$ et ne peuvent donc pas, d'après le théorème de Cantor, être numérotées par les entiers.

EXERCICE 48 ⋆⋆⋆⋆

1. Si $X \subset Y$, alors $f(X) \subset f(Y)$, puis $g(f(X)) \subset g(f(Y))$, d'après l'exercice 8 ; donc $\Phi(X) \subset \Phi(Y)$. L'exercice 39 fournit alors un point fixe de Φ.

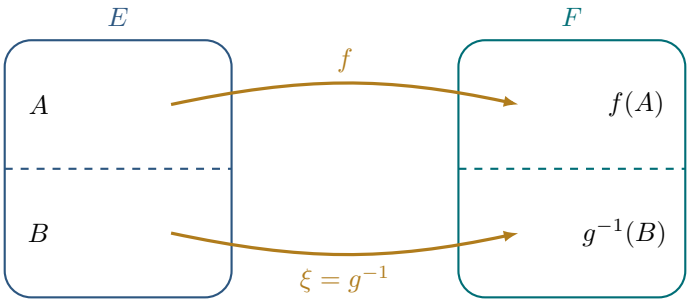
Il existe $A \subset E$ telle que $A = G \cup g(f(A))$.

2. Soit $x \in B$. Comme $x \notin A$ et $G \subset A$, on a $x \notin G = E \setminus g(F)$, donc $x \in g(F)$: il possède un antécédent par g, unique puisque g est injective.
3. *L'égalité* $\xi(B) = g^{-1}(B)$. Si $x \in B$, alors $g(\xi(x)) = x \in B$, donc $\xi(x) \in g^{-1}(B)$. Si $y \in g^{-1}(B)$, alors $x = g(y)$ appartient à B, et $y = \xi(x)$.
Disjonction. Si $y = f(a)$ avec $a \in A$, alors $g(y) = g(f(a)) \in g(f(A)) \subset A$, donc $g(y) \notin B$: on a $f(A) \cap g^{-1}(B) = \varnothing$.
Recouvrement. Soit $y \in F$. Si $g(y) \in B$, alors $y \in g^{-1}(B)$. Sinon, $g(y) \in A = G \cup g(f(A))$; comme $g(y) \notin G$, il s'écrit $g(y) = g(f(a))$ avec $a \in A$, et l'injectivité de g donne $y = f(a) \in f(A)$.

$F = f(A) \cup g^{-1}(B)$, réunion disjointe

Bijectivité de φ. La restriction de φ à A est $f_{|A}$, injective, à valeurs dans $f(A)$. Sa restriction à B est ξ, injective puisque $g \circ \xi = \mathrm{id}_B$, à valeurs dans $g^{-1}(B)$. Ces deux images sont disjointes, donc φ est injective ; elles recouvrent F, donc φ est surjective.

φ est une bijection de E sur F.



La bijection φ se lit sur ce schéma : elle suit f sur la partie A et remonte g sur la partie B, et les deux morceaux d'arrivée s'emboîtent exactement pour former F.

4. L'application $n \mapsto (n, 0)$ est une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^2$. L'application $(a, b) \mapsto 2^a 3^b$ est une injection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$: si $2^a 3^b = 2^{a'} 3^{b'}$ avec $a \leqslant a'$, on divise par 2^a ; l'entier impair 3^b est égal à $2^{a'-a} 3^{b'}$, donc $a = a'$, puis $3^b = 3^{b'}$ et $b = b'$. Le théorème de Cantor-Bernstein conclut.

De même, l'inclusion $[0\,,1[\to [0\,,1]$ et l'application $[0\,,1] \to [0\,,1[$, $x \mapsto \frac{x}{2}$, sont injectives.

$\boxed{\mathbb{N} \text{ et } \mathbb{N}^2 \text{ sont équipotents, ainsi que } [0\,,1] \text{ et } [0\,,1[.}$

À retenir : pour montrer que deux ensembles sont équipotents, il suffit de trouver une injection dans chaque sens, ce qui est souvent bien plus facile que d'exhiber une bijection, comme le montre la comparaison avec l'exercice 26.