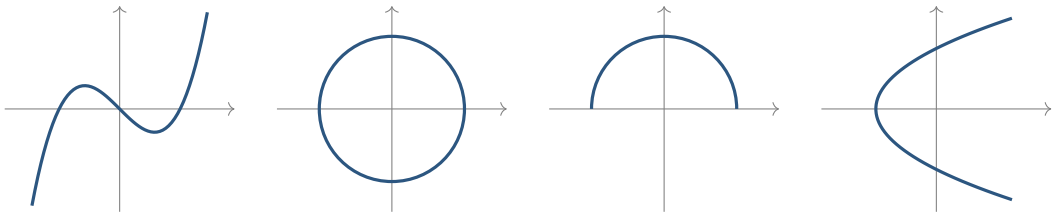
EXERCICES – CHAPITRE 2

APPLICATIONS ET RELATIONS BINAIRES

⋆ *application directe* ⋆⋆ *mise en œuvre* ⋆⋆⋆ *problème* ⋆⋆⋆⋆ *problème long, en autonomie*

Applications

EXERCICE 1 ⋆



(a) (b) (c) (d)

Les quatre courbes ci-dessus sont, de gauche à droite, la courbe d'équation $y = x^3 - x$, le cercle de centre O et de rayon 1, sa moitié supérieure, et la courbe d'équation $x = y^2 - 1$.

1. Pour chacune d'elles, dire s'il existe une partie E de $\mathbb{R}$ telle qu'elle soit le graphe d'une application de E dans $\mathbb{R}$, et préciser E le cas échéant. Lorsque ce n'est pas le cas, dire laquelle des deux exigences de la condition $(*)$ du cours est en défaut.
2. On note Γ la courbe (d). Montrer que la partie $\{(y,x) \mid (x,y) \in \Gamma\}$, obtenue en échangeant les rôles des deux axes, est le graphe d'une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, que l'on précisera.
3. Soit $E = \{1,2,3\}$ et $F = \{a,b\}$. Combien la partie $E \times F$ possède-t-elle de sous-ensembles ? Combien d'entre eux sont des graphes d'applications de E dans F ? Généraliser à deux ensembles finis à p et n éléments.

EXERCICE 2 ⋆

Dans chacun des cas suivants, dire si les applications f et g sont égales, en justifiant à partir de la caractérisation de l'égalité de deux applications.

1. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2} \end{array}\right.$ et $g : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}\right.$
2. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$ et $g : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$
3. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x^2) \end{array}\right.$ et $g : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2\ln|x| \end{array}\right.$
4. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(\sqrt{x}\right)^2 \end{array}\right.$ et $g : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}\right.$
5. $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & (-1)^n \end{array}\right.$ et $g : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & \cos(n\pi) \end{array}\right.$

EXERCICE 3 ⋆⋆

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

1. Montrer que $\min(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$, $\max(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$ et $(\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B)^2$ sont les fonctions indicatrices de parties de E que l'on précisera.
2. À quelle condition sur A et B la fonction $\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$ est-elle une fonction indicatrice ?
3. En utilisant les indicatrices, démontrer que pour toutes parties A, B, C de E :

$$(A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C = A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C) \qquad \text{et} \qquad A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C).$$

   On pourra remarquer que $\mathbf{1}_{A \Delta B}$ est le reste de la division euclidienne de $\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$ par 2.
4. Décrire la partie $A \,\Delta\, B \,\Delta\, C$ par une phrase.

EXERCICE 4 ⋆⋆

Soit E et F deux ensembles et f, g deux applications de E dans F. On suppose que

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad f(x) = f(y) \text{ ou } g(x) = g(y).$$

Montrer que l'une au moins des deux applications f et g est constante.

Image directe et image réciproque

EXERCICE 5 ⋆

On considère la fonction sinus, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les images directes $\sin(\mathbb{R})$, $\sin(\mathbb{R}_+)$, $\sin([0\,,2\pi])$, $\sin\left([0\,,\frac{\pi}{2}]\right)$ et $\sin\left([-\pi\,,\frac{\pi}{2}]\right)$.
2. Déterminer les images réciproques, par la fonction sinus, des parties $[-1\,,1]$, $[0\,,1]$, $[3\,,4]$, $\{1\}$ et $\{-1\,,1\}$.
3. Pourquoi l'écriture $\sin^{-1}(1)$ est-elle incorrecte, alors que $\sin^{-1}(\{1\})$ a un sens ?

EXERCICE 6 ⋆

On considère l'application

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x^2 - 4x + 1 \end{array} \right.$$

1. Déterminer $f([0\,,1])$, $f(\mathbb{R}_-)$, $f(\mathbb{R}_+)$ et $f([-2\,,2])$.
2. Déterminer $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{-1\})$, $f^{-1}([0\,,1])$ et $f^{-1}([-2\,,1])$.
3. On note $\Phi : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ l'application $A \mapsto f(A)$. Est-elle injective ? surjective ? On en déterminera l'image.

EXERCICE 7 ⋆⋆

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1, et l'on considère l'application

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z + \dfrac{1}{z} \end{array} \right.$$

1. L'application f est-elle injective ? surjective ?
2. Déterminer $f(\mathbb{R}^*)$ et $f(\mathbb{U})$.
3. Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R})$, et représenter cette partie du plan.

EXERCICE 8 ⋆⋆

Soit $f : E \to F$ une application, A, A' deux parties de E et B, B' deux parties de F.

1. Montrer que $A \subset A' \Rightarrow f(A) \subset f(A')$ et que $B \subset B' \Rightarrow f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$. Les réciproques sont-elles vraies ?
2. Montrer que $f(A) \setminus f(A') \subset f(A \setminus A')$, et que l'inclusion peut être stricte. Comparer avec $f^{-1}(B \setminus B')$ et $f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(B')$.
3. Montrer la *formule de projection* : $f\big(A \cap f^{-1}(B)\big) = f(A) \cap B$.

EXERCICE 9 ⋆⋆

Soit $f : X \to X$ une application. On dit qu'une partie A de X est *stable* par f si $f(A) \subset A$.

1. Traduire la stabilité à l'aide de l'image réciproque, puis avec des quantificateurs.
2. Déterminer les parties de $\mathbb{N}$ stables par $n \mapsto n+1$, puis celles qui sont stables par $n \mapsto n+2$.
3. Montrer qu'une réunion et une intersection quelconques de parties stables sont stables.
4. Le complémentaire d'une partie stable est-il stable ?

Composition

EXERCICE 10 ⋆

1. Pour $f(x) = 3x+1$ et $g(x) = x^2 - 1$, définies sur $\mathbb{R}$, calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.
2. Écrire chacune des fonctions suivantes comme composée de deux fonctions plus simples, en précisant les ensembles de départ et d'arrivée :

$$h_1 : x \mapsto \sqrt{3x-1} \qquad h_2 : x \mapsto \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad h_3 : x \mapsto \frac{1}{x+7} \qquad h_4 : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}.$$

3. Soit $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{x+1} \end{array} \right.$. Calculer $u \circ u$ et $u \circ u \circ u$, conjecturer une expression de l'itérée u^n, puis la démontrer.
4. Soit $v : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array} \right.$. Vérifier que v est à valeurs dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, puis calculer $v \circ v$.

EXERCICE 11 ⋆⋆

On travaille avec des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les fonctions affines f telles que $f \circ g = g \circ f$, où $g(x) = 2x+1$.
2. Déterminer les fonctions f qui commutent avec toutes les translations, c'est-à-dire telles que $f \circ \tau_a = \tau_a \circ f$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, où $\tau_a(x) = x + a$.
3. Déterminer les fonctions f qui commutent avec *toutes* les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Injections, surjections, bijections

EXERCICE 12 ⋆

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$f_1 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array} \right. \qquad f_2 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array} \right.$$

$$f_3 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & n+(-1)^n \end{array} \right. \qquad f_4 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,\ x-y) \end{array} \right.$$

$$f_5 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array} \right. \qquad f_6 : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{R}_+) \\ X & \longmapsto & X \cap \mathbb{R}_+ \end{array} \right.$$

$$f_7 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \lfloor n/2 \rfloor \end{array} \right. \qquad f_8 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & 2n \end{array} \right.$$

Calculer de plus $f_7 \circ f_8$ et $f_8 \circ f_7$.

EXERCICE 13 ⋆⋆

Même question pour les applications suivantes.

$$g_1 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,\ xy) \end{array} \right. \qquad g_2 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,\ xy) \end{array} \right.$$

$$g_3 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ (p,q) & \longmapsto & p + \dfrac{1}{q} \end{array} \right. \qquad g_4 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \longrightarrow & [-1\,,1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array} \right.$$

$$\pi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \text{nombre de nombres premiers de } [\![1\,;n]\!] \end{array} \right.$$

Pour g_1, on déterminera l'image ; pour g_4, on admettra que le réel π est irrationnel.

EXERCICE 14 ⋆

Montrer que les applications suivantes sont bijectives et déterminer leur application réciproque.

1. $f_1 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^x + 2}{\mathrm{e}^{-x}} \end{array} \right.$

2. $f_2 : \left| \begin{array}{ccc} [1\,,+\infty[& \longrightarrow & [0\,,+\infty[\\ x & \longmapsto & x - \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$

3. $f_3 : \left| \begin{array}{ccc} [2\,,+\infty[& \longrightarrow & [\ln 7\,,+\infty[\\ x & \longmapsto & \ln(x^2+x+1) \end{array} \right.$

4. $f_4 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{-3\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\} \\ z & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{i}z - \mathrm{i}}{z+3} \end{array} \right.$

EXERCICE 15 ⋆⋆

On considère l'application

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x}{1+x^2} \end{array} \right.$$

1. L'application f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1\,,1]$.
3. Montrer que l'application $g : \left| \begin{array}{ccc} [-1\,,1] & \longrightarrow & [-1\,,1] \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$ est bijective, et déterminer g^{-1}.

EXERCICE 16 ⋆

1. Soit $f : E \to F$ une application et A une partie de E. Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse, en justifiant par une démonstration ou un contre-exemple.
   (a) Si f est injective, alors $f_{|A}$ est injective.
   (b) Si $f_{|A}$ est injective, alors f est injective.
   (c) Si f est surjective, alors $f_{|A}$ est surjective.
   (d) Si $f_{|A}$ est surjective, alors f est surjective.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une bijection. Montrer que f est impaire si et seulement si f^{-1} l'est. Que dire des bijections paires ?

EXERCICE 17 ⋆⋆

1. Soit $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications. Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g et h le sont aussi.
2. Soit $f : E \to E$ et $n \geqslant 1$ un entier tels que $f^n = \mathrm{id}_E$. Montrer que f est bijective, et exprimer f^{-1} comme une itérée de f.
3. Soit $f : E \to F$ et $g : F \to E$ telles que $g \circ f \circ g = g$ et $f \circ g \circ f = f$. Montrer que si f est injective ou si g est surjective, alors $g \circ f = \mathrm{id}_E$. Donner un exemple où f et g ne sont pas bijectives.

EXERCICE 18 ⋆⋆⋆

Soit E un ensemble, $n \geqslant 2$ un entier et $f : E \to E$ une application telle que $f^n = f$.

1. Montrer que f est injective si et seulement si elle est surjective.
2. On suppose $n = 2$, c'est-à-dire $f \circ f = f$. Montrer que $f(x) = x$ pour tout $x \in f(E)$, puis que f est injective si et seulement si $f = \mathrm{id}_E$.
3. Pour $n = 3$, donner un exemple de bijection f différente de l'identité telle que $f^3 = f$.

EXERCICE 19 ⋆⋆

Soit X et Y deux ensembles non vides et $f : X \to Y$.

1. Montrer que f est injective si et seulement s'il existe $g : Y \to X$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Une telle application g est-elle unique ?
2. Montrer que f est surjective si et seulement s'il existe $h : Y \to X$ telle que $f \circ h = \mathrm{id}_Y$. On admettra que l'on peut choisir simultanément un antécédent pour chaque élément de Y.
3. On considère $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n^2$. Existe-t-il $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$? telle que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$?

EXERCICE 20 ⋆⋆⋆

Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles non vides.

1. Montrer que f est injective si et seulement si, pour tout ensemble Z et toutes applications g, $h : Z \to E$, l'égalité $f \circ g = f \circ h$ entraîne $g = h$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si, pour tout ensemble Z et toutes applications g, $h : F \to Z$, l'égalité $g \circ f = h \circ f$ entraîne $g = h$.
3. Soit G un ensemble ayant au moins deux éléments, et $\varphi : G^F \to G^E$, $g \mapsto g \circ f$. Montrer que φ est injective si et seulement si f est surjective, puis que φ est surjective si et seulement si f est injective.

EXERCICE 21 ⋆⋆⋆

Soit $f : E \to F$ une application. Montrer les équivalences suivantes.

1. f est injective $\iff$ pour toutes parties A, B de E, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
2. f est injective $\iff$ pour toute partie A de E, $f^{-1}(f(A)) = A$.
3. f est surjective $\iff$ pour toute partie B de F, $f(f^{-1}(B)) = B$.
4. f est bijective $\iff$ pour toute partie A de E, $f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$.

EXERCICE 22 ⋆⋆⋆

Soit $f : E \to F$ une application. On définit

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(F) \\ X & \longmapsto & f(X) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(F) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ Y & \longmapsto & f^{-1}(Y) \end{array} \right.$$

1. Montrer les équivalences : f injective $\iff$ φ injective $\iff$ ψ surjective.
2. Montrer les équivalences : f surjective $\iff$ φ surjective $\iff$ ψ injective.
3. Lorsque f est bijective, montrer que φ et ψ sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.

EXERCICE 23 ⋆⋆

Soit Ω un ensemble et X, Y deux parties de Ω. On considère

$$\theta : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y) \\ A & \longmapsto & (A \cap X,\ A \cap Y) \end{array} \right.$$

1. Montrer que θ est injective si et seulement si $X \cup Y = \Omega$.
2. Montrer que θ est surjective si et seulement si $X \cap Y = \varnothing$.
3. Lorsque θ est bijective, déterminer θ^{-1}. Quelle formule de dénombrement retrouve-t-on lorsque Ω est fini ?

EXERCICE 24 ⋆⋆⋆

Soit f, $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ deux applications telles que f soit injective, g surjective, et $f(n) \leqslant g(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $f = g$.
On pourra comparer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, les parties $f^{-1}(\llbracket 0\,;k \rrbracket)$ et $g^{-1}(\llbracket 0\,;k \rrbracket)$, et utiliser les lemmes du cours sur les parties d'un ensemble fini.

EXERCICE 25 ⋆⋆

Soit E un ensemble fini à p éléments et F un ensemble fini à n éléments.

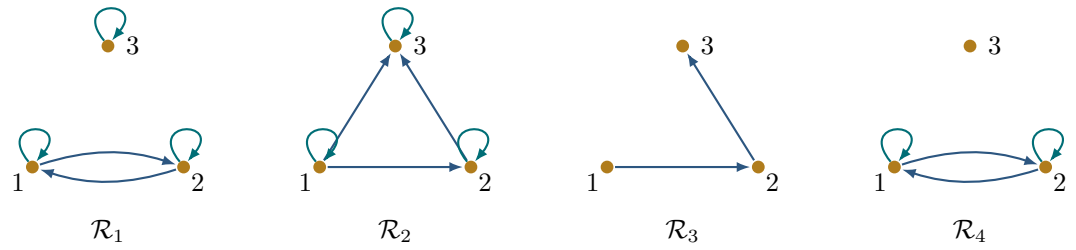
1. Montrer que l'application $\mathcal{P}(E) \to \{0,1\}^E$, $A \mapsto \mathbf{1}_A$, est bijective. En déduire, à l'aide de la question 2, une nouvelle démonstration du fait que $\mathcal{P}(E)$ possède 2^p éléments.
2. Montrer, par récurrence sur p et à l'aide du lemme des bergers, qu'il y a n^p applications de E dans F. On fixera un élément a de E et l'on regroupera les applications selon leur valeur en a. Dénombrer de même les applications injectives de E dans F, puis les bijections de E sur lui-même.
3. Pour $p = 4$ et $n = 2$, dénombrer les surjections de E sur F en dénombrant les applications qui ne le sont pas.
4. Soit A et B deux parties finies d'un ensemble. À l'aide des lemmes du cours, montrer que $A \cup B$ est fini et que
$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B).$$
On pourra écrire $A \cup B$ comme la réunion disjointe de A et de $B \setminus A$.

EXERCICE 26 ⋆⋆⋆

1. Montrer que l'application $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(a,b) \mapsto 2^a(2b+1)-1$, est bijective.
2. En déduire, par récurrence, que $\mathbb{N}^r$ est équipotent à $\mathbb{N}$ pour tout $r \geqslant 1$.
3. Construire une bijection de $[0\,,1]$ sur $[0\,,1[$. On pourra faire subir à la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ le décalage de l'« hôtel de Hilbert » et laisser fixes les autres réels.
4. Montrer que l'ensemble $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ des suites d'entiers naturels n'est pas équipotent à $\mathbb{N}$.

Relations binaires

EXERCICE 27 ⋆



Chaque diagramme représente une relation sur $E = \{1,2,3\}$: une flèche de x vers y signifie $x\,\mathcal{R}\,y$, et une boucle en x signifie $x\,\mathcal{R}\,x$.

1. Pour chacune des quatre relations, écrire son graphe, puis dire si elle est réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive.
2. Lesquelles sont des relations d'équivalence ? des relations d'ordre ? Pour les premières, donner les classes ; pour les secondes, dire si l'ordre est total.
3. Compléter le graphe de $\mathcal{R}_3$ par le plus petit nombre possible de couples pour obtenir une relation d'ordre.

EXERCICE 28 ⋆⋆

Soit E un ensemble fini à $n \geqslant 1$ éléments.

1. Combien existe-t-il de relations binaires sur E ? de relations réflexives ? de relations symétriques ? de relations à la fois réflexives et symétriques ?
2. Dresser la liste des partitions de $\{1,2,3\}$, puis dénombrer celles de $\{1,2,3,4\}$. Combien existe-t-il de relations d'équivalence sur un ensemble à 3 éléments ? à 4 éléments ?
3. Combien existe-t-il de relations d'ordre total sur un ensemble à n éléments ?

EXERCICE 29 ⋆⋆

1. Un élève propose la démonstration suivante : *« Soit $\mathcal{R}$ une relation symétrique et transitive sur E, et soit $x \in E$. Si $x\,\mathcal{R}\,y$, alors $y\,\mathcal{R}\,x$ par symétrie, donc $x\,\mathcal{R}\,x$ par transitivité. La relation $\mathcal{R}$ est donc réflexive. »* Localiser l'erreur et donner un contre-exemple. Quelle hypothèse supplémentaire rend le raisonnement correct ?
2. Montrer qu'une relation sur E qui est à la fois une relation d'équivalence et une relation d'ordre est la relation d'égalité.

3. Soit $\mathcal{R}$ une relation réflexive et transitive sur E, que l'on appelle un *préordre*. On pose $x \sim y \iff (x\,\mathcal{R}\,y$ et $y\,\mathcal{R}\,x)$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence. Que donne cette construction pour la divisibilité sur $\mathbb{Z}$?

Relations d'équivalence

EXERCICE 30 ⋆

Montrer que chacune des relations suivantes est une relation d'équivalence, et décrire ses classes, en les dessinant lorsqu'il s'agit de parties du plan.

1. Sur $\mathbb{R}^2$: $(x,y)\,\mathcal{R}\,(x',y') \iff x = x'$.
2. Sur $\mathbb{R}^2$: $(x,y)\,\mathcal{R}\,(x',y') \iff x^2+y^2 = x'^2+y'^2$.
3. Sur $\mathbb{R}$: $x\,\mathcal{R}\,y \iff x^2-y^2 = x-y$. Combien chaque classe a-t-elle d'éléments ?
4. Sur $\mathbb{R}^*$: $x\,\mathcal{R}\,y \iff xy > 0$.

EXERCICE 31 ⋆⋆

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes, puis donner leurs solutions dans $[0\,,2\pi[$:

   (a) $5x \equiv x + \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ (b) $\cos(3x) = \cos(x)$.

2. Soit x et y deux réels tels que $2x \equiv 2y\ [2\pi]$. A-t-on $x \equiv y\ [2\pi]$? Que peut-on affirmer ?
3. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de 3^{2026}.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

EXERCICE 32 ⋆⋆

On munit $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ de la relation $(p,q)\,\mathcal{R}\,(p',q') \iff pq' = p'q$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, et déterminer la classe de $(1,5)$.
2. Montrer que chaque classe contient un unique couple (p,q) tel que p et q soient premiers entre eux.
3. Expliquer en quoi cette relation « fabrique » les nombres rationnels à partir des entiers.

EXERCICE 33 ⋆⋆

Soit E un ensemble non vide et A une partie de E.

1. On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la relation $X\,\mathcal{R}\,Y \iff X \cap A = Y \cap A$. Montrer que c'est une relation d'équivalence, et que chaque classe contient une unique partie incluse dans A. Lorsque E a n éléments et A en a k, combien y a-t-il de classes, et combien chacune a-t-elle d'éléments ?
2. On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la relation $X \sim Y \iff (X = Y$ ou $X = \overline{Y})$. Montrer que c'est une relation d'équivalence, décrire ses classes et, lorsque E a n éléments, les dénombrer.

EXERCICE 34 ⋆⋆⋆

Soit $\mathcal{R}$ une relation quelconque sur un ensemble E. On définit sur E la relation $\sim$ par : $x \sim y$ si $x = y$, ou s'il existe des éléments $x_0 = x, x_1, \ldots, x_k = y$ de E, avec $k \geqslant 1$, tels que pour tout $i \in [\![1\,;k]\!]$, on ait $x_{i-1}\,\mathcal{R}\,x_i$ ou $x_i\,\mathcal{R}\,x_{i-1}$.

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence, et que c'est la plus petite relation d'équivalence qui contient $\mathcal{R}$: toute relation d'équivalence $\approx$ telle que $x\,\mathcal{R}\,y \Rightarrow x \approx y$ vérifie aussi $x \sim y \Rightarrow x \approx y$.

2. Sur $\mathbb{Z}$, on pose $x \mathcal{R} y \iff y - x \in \{3, 5\}$. Montrer que $\mathcal{R}$ n'est pas transitive, et déterminer les classes de $\sim$.

3. Même question avec $y - x \in \{4, 6\}$, puis avec $y - x \in \{a, b\}$, où a et b sont deux entiers naturels non nuls.

Relations d'ordre

EXERCICE 35 ⋆

Les relations suivantes sont-elles des relations d'ordre ? des relations d'équivalence ? Lorsqu'il s'agit d'un ordre, est-il total ?

1. Sur $\mathbb{Z}$: $x \mathcal{R} y \iff x = -y$.
2. Sur $\mathbb{R}$: $x \mathcal{R} y \iff \cos^2 x + \sin^2 y = 1$.
3. Sur $\mathbb{N}$: $x \mathcal{R} y \iff \exists (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ y = p\, x^q$.
4. Sur $\mathbb{C}$: $z \mathcal{R} z' \iff (\mathcal{R}e(z) \leqslant \mathcal{R}e(z') \text{ et } \mathcal{I}m(z) \leqslant \mathcal{I}m(z'))$.
5. Sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $f \mathcal{R} g \iff \forall x \in [0\,, 1],\ f(x) \leqslant g(x)$.
6. Sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $f \mathcal{R} g \iff f(\mathbb{R}) \subset g(\mathbb{R})$.

EXERCICE 36 ⋆⋆

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E. On appelle *borne supérieure* de A le plus petit élément, s'il existe, de l'ensemble des majorants de A ; on le note $\sup A$. On définit de même la borne inférieure $\inf A$.

1. Montrer que A possède un plus grand élément si et seulement si A possède une borne supérieure qui appartient à A.
2. Dans $(\mathbb{N}, |)$, dessiner le diagramme de Hasse de l'ensemble des diviseurs de 60. Déterminer, pour deux entiers a et b, la borne supérieure et la borne inférieure de $\{a, b\}$.
3. Dans $(\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, |)$, quels sont les éléments qui ne majorent aucun autre élément que lui-même ? Cet ensemble ordonné possède-t-il un plus petit élément ?
4. Dans $(\mathcal{P}(E), \subset)$, montrer que toute famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties possède une borne supérieure et une borne inférieure, que l'on déterminera.

EXERCICE 37 ⋆⋆⋆

On définit sur $\mathbb{N}^2$ l'ordre lexicographique : $(a, b) \preccurlyeq (c, d) \iff (a < c \text{ ou } (a = c \text{ et } b \leqslant d))$.

1. Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre total. L'ensemble $\mathbb{N}^2$ possède-t-il un plus grand élément ?
2. Les parties $A = \{(p, p) \mid p \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{(2, 10p) \mid p \in \mathbb{N}\}$ sont-elles majorées ? Ont-elles un plus grand élément ? une borne supérieure, au sens de l'exercice 36 ?
3. Montrer que toute partie non vide de $\mathbb{N}^2$ possède un plus petit élément.
4. Existe-t-il une suite strictement décroissante d'éléments de $(\mathbb{N}^2, \preccurlyeq)$? Comparer avec l'exercice 35 de la feuille du chapitre 1.

EXERCICE 38 ⋆⋆⋆

On munit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ de la relation $f \preccurlyeq g \iff \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant g(x)$.

1. Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre. Est-elle totale ?
2. Pour $m > 0$, on pose $\varphi_m : x \mapsto \mathrm{e}^{mx}$, et $U = \{\varphi_m \mid m > 0\}$. Deux éléments distincts de U sont-ils comparables ? La partie U est-elle minorée ? majorée ?
3. Déterminer l'ensemble des minorants de U, puis montrer que U admet une borne inférieure, au sens de l'exercice 36, que l'on précisera. Appartient-elle à U ?

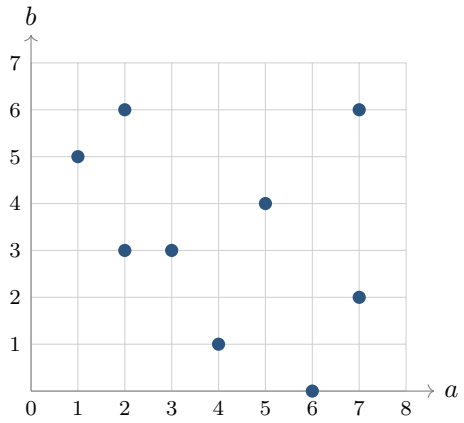
EXERCICE 39 ⋆⋆⋆

Soit E un ensemble et $\Phi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ une application *croissante* pour l'inclusion : $X \subset Y \Rightarrow \Phi(X) \subset \Phi(Y)$. On note $\mathcal{F} = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid \Phi(X) \subset X\}$ et $A = \bigcap_{X \in \mathcal{F}} X$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est non vide, puis que $\Phi(A) \subset A$.
2. Montrer que $\Phi(A) \in \mathcal{F}$, et en déduire que $\Phi(A) = A$.
3. Montrer que A est le plus petit point fixe de Φ : si $\Phi(X) = X$, alors $A \subset X$.
4. Déterminer A lorsque $E = \mathbb{N}$ et $\Phi(X) = \{0\} \cup \{n + 2 \mid n \in X\}$.

EXERCICE 40 ⋆⋆⋆

Soit B une partie de $\mathbb{N}^2$. On dit qu'un point (a, b) de B est *au sud-ouest* de B si aucun autre point (a', b') de B ne vérifie à la fois $a' \leqslant a$ et $b' \leqslant b$.



La figure représente une partie B de $\mathbb{N}^2$ à neuf éléments, placés sur le quadrillage des points à coordonnées entières.

1. Déterminer les points au sud-ouest de la partie B de la figure.
2. Montrer que la relation $(a, b) \leqslant (a', b') \iff (a \leqslant a' \text{ et } b \leqslant b')$ est un ordre partiel sur $\mathbb{N}^2$, et traduire « être au sud-ouest » à l'aide de cet ordre.
3. Montrer que toute partie non vide de $\mathbb{N}^2$ possède au moins un point au sud-ouest.
4. Montrer que toute partie non vide de $\mathbb{N}^2$ ne possède qu'un nombre fini de points au sud-ouest.

Exercices de synthèse

EXERCICE 41 ⋆⋆

Vrai ou faux. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

1. Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont telles que $g \circ f$ est injective, alors g est injective.
2. Toute application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifie $f(n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Pour toute application $f : E \to F$ et toutes parties A, B de F : $f^{-1}(B \setminus A) = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(A)$.
4. Si $f : E \to E$ est injective et vérifie $f \circ f = f$, alors $f = \mathrm{id}_E$.
5. L'application $\mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$, $A \mapsto E \setminus A$, est bijective.
6. Si deux applications f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifient $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, alors f et g sont bijectives.
7. Sur $\mathbb{R}$, la relation $x \mathcal{R} y \iff |x - y| \leqslant 1$ est une relation d'équivalence.
8. Toute partie finie non vide d'un ensemble totalement ordonné possède un plus grand élément.
9. Dans $(\mathbb{N}, |)$, toute partie non vide possède un plus petit élément.
10. Si $f : E \to F$ est surjective, alors l'application $\mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E)$, $B \mapsto f^{-1}(B)$, est injective.

EXERCICE 42 ⋆⋆

Soit E, F, G trois ensembles. Pour toute application $\varphi : F \times G \to E$ et tout $x \in F$, on note $\varphi(x, \cdot)$ l'application « partielle » $G \to E$, $y \mapsto \varphi(x, y)$.

1. Montrer que l'application
$$\Theta : \left| \begin{array}{ccc} E^{F \times G} & \longrightarrow & (E^G)^F \\ \varphi & \longmapsto & (x \mapsto \varphi(x, \cdot)) \end{array} \right.$$
est bijective, et déterminer sa réciproque.
2. Construire une bijection de $F^E \times G^E$ sur $(F \times G)^E$.
3. On suppose que F et G sont disjoints. Construire une bijection de $E^{F \cup G}$ sur $E^F \times E^G$.
4. On suppose que E, F et G sont finis, à a, b et c éléments. Quelles règles de calcul sur les puissances d'entiers naturels les trois bijections précédentes permettent-elles de retrouver, à l'aide de l'exercice 25 ?
5. Soit F un ensemble. Montrer que l'application qui, à une relation binaire $\mathcal{R}$ sur F, associe l'application $F \to \mathcal{P}(F)$, $x \mapsto \{y \in F \mid x \mathcal{R} y\}$, est une bijection de l'ensemble des relations binaires sur F sur l'ensemble $\mathcal{P}(F)^F$. Retrouver ainsi le nombre de relations binaires sur un ensemble à n éléments, obtenu à l'exercice 28.

En informatique, remplacer une fonction de deux variables par une fonction qui renvoie une fonction, comme à la question 1, s'appelle la curryfication.

EXERCICE 43 ⋆⋆⋆

Soit E un ensemble et $f : E \to E$. On appelle *racine carrée* de f toute application $g : E \to E$ telle que $g \circ g = f$.

1. Montrer qu'une racine carrée d'une bijection est une bijection, et qu'elle commute avec f.
2. Montrer que l'application $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n + 1$, n'a pas de racine carrée, alors que $n \mapsto n + 2$ en a. Qu'en est-il de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n + 1$?

3. Montrer que l'application $x \mapsto -x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'a pas de racine carrée parmi les fonctions affines, mais qu'elle en a une parmi les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pourra chercher une application qui permute les intervalles $]0\,,1]$, $]1\,,2]$, $[-1\,,0[$ et $[-2\,,-1[$ et s'inspirer de la rotation d'un quart de tour.

EXERCICE 44 ⋆⋆⋆

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante telle que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ f(mn) = f(m)\,f(n),$$

et telle qu'il existe un entier $k \geqslant 2$ vérifiant $f(k) = k$.

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$, puis montrer que $f(k^j) = k^j$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $f(n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que f coïncide avec l'identité sur chaque intervalle $[\![k^j\,;k^{j+1}]\!]$.
3. Conclure que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. L'hypothèse $f(k) = k$ est-elle indispensable ?

EXERCICE 45 ⋆⋆⋆

Soit f et g deux bijections de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$, et

$$h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ k & \longmapsto & f(k)\,g(k) \end{array} \right.$$

1. Montrer que l'ensemble des entiers k tels que $h(k)$ soit un nombre premier ou l'opposé d'un nombre premier est fini.
2. En déduire que h n'est pas surjective.
3. L'application h peut-elle être injective ?

EXERCICE 46 ⋆⋆⋆

Soit X un ensemble. Montrer que X est infini si et seulement si toute application $f : X \to X$ possède une partie stable, au sens de l'exercice 9, différente de $\varnothing$ et de X.
Pour un ensemble infini, on pourra considérer les itérés $f^n(x)$ d'un élément x ; pour un ensemble fini, on cherchera une application qui « fait tourner » les éléments.

EXERCICE 47 ⋆⋆⋆

Deux parties X et Y de $\mathbb{N}$ sont dites *incomparables* si aucune des deux n'est incluse dans l'autre, et *presque disjointes* si leur intersection $X \cap Y$ est finie.

1. Trouver une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de $\mathbb{N}$ telle que, pour tous n, $m \in \mathbb{N}$, l'inclusion $A_n \subset A_m$ entraîne $n = m$.

2. Pour toute partie X de $\mathbb{N}$, on pose $B_X = \{2k \mid k \in X\} \cup \{2k+1 \mid k \in \mathbb{N} \setminus X\}$. Montrer que l'inclusion $B_X \subset B_Y$ entraîne $X = Y$. En déduire que les parties B_X, pour $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, sont deux à deux distinctes et deux à deux incomparables.

3. Soit $(D_i)_{i\in I}$ une famille de parties non vides de $\mathbb{N}$, deux à deux disjointes. Montrer que l'application $I \to \mathbb{N}$, $i \mapsto \min D_i$, est injective. En déduire, à l'aide du théorème de Cantor, qu'une telle famille ne peut pas être indexée par $I = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

4. On fixe une suite $(F_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de parties finies de $\mathbb{N}$ dans laquelle figure toute partie finie de $\mathbb{N}$, comme à l'exercice 48 de la feuille du chapitre 1. Pour toute partie finie P de $\mathbb{N}$, on note $c(P)$ le plus petit entier j tel que $F_j = P$. Pour $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose enfin

$$T_n(X) = \{2k \mid k \in X,\ k \leqslant n\} \cup \{2n+1\} \qquad \text{et} \qquad C_X = \{c(T_n(X)) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

   (a) Montrer que c est injective, puis que C_X est une partie infinie de $\mathbb{N}$.

   (b) Soit X et Y deux parties distinctes de $\mathbb{N}$, et m le plus petit élément de $X \,\Delta\, Y$. Montrer que $C_X \cap C_Y$ a exactement m éléments.

   (c) En déduire que si $C_X \,\Delta\, C_Y$ est finie, alors $X = Y$.

   (d) Comparer avec la question 3.

EXERCICE 48 ⋆⋆⋆⋆

Soit E et F deux ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux injections. Le but de l'exercice est de construire une bijection de E sur F : c'est le *théorème de Cantor-Bernstein*.

1. On pose $G = E \setminus g(F)$ et, pour toute partie X de E, $\Phi(X) = G \cup g\big(f(X)\big)$. Montrer que Φ est croissante pour l'inclusion, et en déduire, grâce à l'exercice 39, l'existence d'une partie A de E telle que $A = G \cup g\big(f(A)\big)$.

2. On pose $B = E \setminus A$. Montrer que tout élément x de B possède un unique antécédent par g, que l'on note $\xi(x)$.

3. On définit $\varphi : E \to F$ par $\varphi(x) = f(x)$ si $x \in A$ et $\varphi(x) = \xi(x)$ si $x \in B$. Montrer que les parties $f(A)$ et $\xi(B) = g^{-1}(B)$ forment un recouvrement disjoint de F, puis que φ est bijective.

4. Application : montrer que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sont équipotents à l'aide des injections $n \mapsto (n, 0)$ et $(a, b) \mapsto 2^a 3^b$, sans utiliser l'exercice 26. Montrer de même que $[0\,,1]$ et $[0\,,1[$ sont équipotents.