CORRIGÉ – CHAPITRE 3

CALCUL ALGÉBRIQUE

⋆ *application directe* ⋆⋆ *mise en œuvre* ⋆⋆⋆ *problème* ⋆⋆⋆⋆ *problème long, en autonomie*

Manipulation des symboles somme et produit

EXERCICE 1 ⋆

Pour chaque expression, on repère la forme du terme général et les valeurs extrêmes de l'indice. Le nombre de termes d'une somme de m à n est $n-m+1$.

- **(a)** $\displaystyle\sum_{k=3}^{12} 2^k$, qui a 10 termes.
- **(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \frac{k}{2^k}$, qui a 10 termes, puisque $1024 = 2^{10}$.
- **(c)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{25} (-1)^{k+1}\, 2k$, qui a 25 termes : les termes sont les entiers pairs de 2 à 50, affectés du signe $+$ lorsque k est impair.
- **(d)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, qui a $2n$ termes.
- **(e)** $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} k = \sum_{j=0}^{n} (n+j)$, qui a $n+1$ termes, et non n.
- **(f)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_{n+1-k}}$, qui a n termes : la somme des deux indices vaut toujours $n+1$.

Piège : pour une somme alternée, le signe s'écrit $(-1)^k$ ou $(-1)^{k+1}$ selon le signe du premier terme ; on vérifie toujours la formule sur les deux premiers termes.

EXERCICE 2 ⋆

1. Pour $n \geqslant 1$, la relation de Chasles donne $S_n = S_{n-1} + a_n$.

$$\boxed{a_0 = S_0 \qquad \text{et} \qquad a_n = S_n - S_{n-1} \quad \text{pour } n \geqslant 1}$$

2. On utilise la relation de Chasles, la linéarité et la somme d'une constante, qui compte $n+1$ termes de 0 à n.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n+1} a_k = S_{n+1} \qquad \sum_{k=n+1}^{2n} a_k = S_{2n} - S_n \qquad \sum_{k=0}^{n} 2a_k = 2S_n}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (a_k - 1) = S_n - (n+1) \qquad \sum_{k=0}^{n} (a_k - k) = S_n - \frac{n(n+1)}{2}}$$

Attention : l'erreur la plus répandue est d'écrire $\sum_{k=0}^{n}(a_k - 1) = S_n - 1$: la constante 1 est retranchée à chacun des $n+1$ termes.

EXERCICE 3 ⋆

- **(a)** C'est une somme géométrique de raison -1, qui vaut 1 si n est pair et 0 s'il est impair.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k = \frac{1+(-1)^n}{2}}$$

- **(b)** On retire le terme $k=1$ à la somme de 1 à $n+1$: $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$.

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n+1} k = \frac{n(n+3)}{2}}$$

- **(c)** Par différence, $2\Big(\sum_{k=1}^{2n} k - \sum_{k=1}^{n} k\Big) = 2n(2n+1) - n(n+1)$.

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{2n} 2k = n(3n+1)}$$

- **(d)** Somme géométrique de premier terme 2^{n+1}, de raison 2, à n termes : $2^{n+1}(2^n - 1)$.

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{2n} 2^k = 2^{2n+1} - 2^{n+1}}$$

- **(e)** On regroupe les termes deux par deux après le terme nul, ce qui donne n paires valant 1 :

$$(-1+2) + (-3+4) + \cdots + (-(2n-1) + 2n).$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k = n}$$

- **(f)** Le changement d'indice $j = n - k$ redonne la somme (a).

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k} = \frac{1+(-1)^n}{2}}$$

- **(g)** La fonction $k \mapsto k(10-k)$ est symétrique par rapport à 5, ce qui invite à poser $j = k - 5$, qui décrit $[\![-10\,;10]\!]$. Alors $k(10-k) = (5+j)(5-j) = 25 - j^2$, et

$$\sum_{k=-5}^{15} k(10-k) = \sum_{j=-10}^{10}(25 - j^2) = 21 \times 25 - 2\sum_{j=1}^{10} j^2 = 525 - 770.$$

$$\boxed{\sum_{k=-5}^{15} k(10-k) = -245}$$

- **(h)** Le changement d'indice $j = n - k + 1$ donne la somme des entiers de 1 à n.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}(n-k+1) = \frac{n(n+1)}{2}}$$

EXERCICE 4 ⋆

- **(a)** Le facteur ne dépend pas de k : c'est un produit de 2001 facteurs égaux.

$$\boxed{(n^2-n)^{2001}}$$

- **(b)** On sort le facteur 2 de chacun des n facteurs : $\boxed{2^n\,n!}$
- **(c)** $\displaystyle\prod_{k=n+1}^{2n} k = \frac{(2n)!}{n!}$, d'où $\boxed{\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^2}$
- **(d)** On complète par les facteurs pairs : $(2n+1)! = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k) \times \prod_{k=0}^{n}(2k+1)$, d'où $\boxed{\frac{(2n+1)!}{2^n\,n!}}$
- **(e)** Le produit des exponentielles est l'exponentielle de la somme : $\boxed{\mathrm{e}^{-n(n+1)/2}}$
- **(f)** De même, $\boxed{2^{n(n+1)/2}}$
- **(g)** Produit télescopique, puisque $1-\frac{1}{k} = \frac{k-1}{k}$: $\boxed{\frac{1}{n}}$
- **(h)** Produit télescopique de pas 2 : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k} = \frac{3\times 4\times\cdots\times(n+2)}{1\times 2\times\cdots\times n}$, d'où $\boxed{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$
- **(i)** On factorise $4k^2-1=(2k-1)(2k+1)$, et chaque produit se traite comme en (d) :

$$\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n\,n!} \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=1}^{n}(2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n\,n!}.$$

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n}(4k^2-1) = \frac{(2n)!\,(2n+1)!}{4^n\,(n!)^2}}$$

  Pour $n=1$, on trouve bien $\frac{2\times 6}{4}=3$.
- **(j)** On sépare les deux facteurs ; le changement d'indice $j=n+1-k$ montre que

$$\prod_{k=1}^{n}(n+1-k) = n!.$$

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n}k(n+1-k) = (n!)^2}$$

Piège : en (a), l'indice k ne figure pas dans le facteur ; seul compte le nombre de facteurs, qui vaut 2001.

EXERCICE 5 ⋆⋆

1. Le changement d'indice $j=n+1-k$ est une bijection de $[\![1\,;n]\!]$ sur lui-même, donc

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1-k} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}.$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1-k}\right)=0}$$

La somme de droite est la même que celle de gauche, parcourue à l'envers : c'est l'argument de Gauss du cours.

2. On pose $j = 2n - k$: lorsque k décrit $[\![n+1\,;2n-1]\!]$, j décrit $[\![1\,;n-1]\!]$, et

$$\sin\frac{k\pi}{2n} = \sin\left(\pi - \frac{j\pi}{2n}\right) = \sin\frac{j\pi}{2n}.$$

Les deux sommes sont égales.

3. Le changement d'indice $j = n - k$ donne

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n-k+1} = \sum_{j=0}^{n}\frac{n-j}{j+1} = \sum_{j=0}^{n}\frac{(n+1)-(j+1)}{j+1} = (n+1)\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j+1} - (n+1).$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n-k+1} = (n+1)\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - (n+1)}$$

EXERCICE 6 ⋆⋆

1. On calcule directement :

$$\boxed{u_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \qquad u_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} \qquad u_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{19}{20}}$$

2. La somme u_{n+1} va de $n+1$ à $2n+2$: par rapport à u_n, elle perd le terme $\frac{1}{n}$ et gagne les deux termes $\frac{1}{2n+1}$ et $\frac{1}{2n+2}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} = \frac{2n(n+1) + n(2n+1) - 2(n+1)(2n+1)}{2n(n+1)(2n+1)}.$$

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = -\frac{3n+2}{2n(n+1)(2n+1)}}$$

3. Cette différence est strictement négative.

La suite (u_n) est strictement décroissante.

Étant minorée par 0, elle converge, d'après le chapitre 7 ; le chapitre 18 montrera que sa limite est $\ln 2$.

EXERCICE 7 ⋆⋆

1. Par linéarité, $\sum_{k=1}^{n}(x_k - \xi) = \sum_{k=1}^{n} x_k - n\xi$.

$$\boxed{\xi = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k}$$

C'est la moyenne des x_k : c'est l'unique réel autour duquel les écarts se compensent exactement.

2. En développant, puis en utilisant les deux hypothèses,

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - 1)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} x_k + n = n - 2n + n = 0.$$

Une somme de réels positifs n'est nulle que si chaque terme est nul.

$$\boxed{x_k = 1 \text{ pour tout } k}$$

Les hypothèses disent que la moyenne vaut 1 et que la moyenne des carrés vaut 1 : la variance, moyenne des carrés des écarts à la moyenne, est donc nulle.

EXERCICE 8 ⋆⋆⋆

1. En élevant l'inégalité à la puissance $\frac{1}{kn}$, qui est croissante sur $\mathbb{R}_+$, elle équivaut à

$$\boxed{g_k \leqslant g_n}$$

la moyenne géométrique des k premiers termes d'une suite croissante est inférieure à celle des n premiers.

2. Chacun des k facteurs $u_1, \ldots, u_k$ est majoré par u_k, et chacun des $n-k$ facteurs $u_{k+1}, \ldots, u_n$ est minoré par u_k, la suite étant croissante. Tous les nombres étant strictement positifs,

$$(u_1 \cdots u_k)^{n-k} \leqslant u_k^{k(n-k)} \leqslant (u_{k+1} \cdots u_n)^k.$$

3. On multiplie l'inégalité précédente par $(u_1 \cdots u_k)^k > 0$:

$$(u_1 \cdots u_k)^n \leqslant (u_1 \cdots u_k)^k \times (u_{k+1} \cdots u_n)^k = (u_1 \cdots u_n)^k.$$

$$\boxed{(u_1 u_2 \cdots u_k)^n \leqslant (u_1 u_2 \cdots u_n)^k}$$

À retenir : on compare deux produits en les découpant en blocs que l'on sait comparer facteur à facteur ; c'est le pendant multiplicatif de la relation de Chasles.

Sommes usuelles et sommes télescopiques

EXERCICE 9 ⋆

1. La somme S a 100 termes, de premier terme 2^{-10} et de raison 2^{-10}. Pour T_n, on sort le facteur $\frac{1}{6}$: $T_n = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k$.

$$\boxed{S = \frac{1}{2^{10}} \cdot \frac{1-2^{-1000}}{1-2^{-10}} = \frac{1-2^{-1000}}{2^{10}-1} \qquad T_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

2. On applique la formule de la somme géométrique, de raison -2 ou 4 :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{2n} u_k = \frac{1+2^{2n+1}}{3} \qquad \sum_{k=0}^{2n+1} u_k = \frac{1-2^{2n+2}}{3} \qquad \sum_{k=0}^{n} u_{2k} = \frac{4^{n+1}-1}{3}}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{2n}(u_k+n) = \frac{1+2^{2n+1}}{3} + n(2n+1) \qquad \left(\sum_{k=0}^{2n} u_k\right) + n = \frac{1+2^{2n+1}}{3} + n}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_{k+n} = (-2)^n \frac{1-(-2)^{n+1}}{3}}$$

Piège : les quatrième et cinquième sommes diffèrent : dans la première, la constante n est ajoutée à chacun des $2n+1$ termes. Les parenthèses ne sont pas décoratives.

EXERCICE 10 ⋆

1. On écrit $\ln\left(1+\frac{1}{p}\right) = \ln(p+1) - \ln p$, et $\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)$; dans le second cas, le télescopage se fait avec un pas de 2, et il reste deux termes à chaque bout.

$$\boxed{\sum_{p=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{p}\right) = \ln(n+1) \qquad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{3}{4} - \frac{2n+1}{2n(n+1)}}$$

2. En réduisant au même dénominateur, $a(k+3)+b(k+1)=1$ pour tout k, donc $a+b=0$ et $3a+b=1$.

$$\boxed{a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2} \qquad \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+3)}=\frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\Big)=\frac{3}{4}-\frac{2n+5}{2(n+2)(n+3)}}$$

3. En multipliant par k puis en faisant $k=0$, on obtient $a=\frac{1}{2}$; de même, $b=-1$ et $c=\frac{1}{2}$. On regroupe les termes en deux différences de même forme :

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\Big).$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}}$$

À retenir : ces décompositions sont des décompositions en éléments simples, qui seront systématisées au chapitre 13.

EXERCICE 11 ⋆⋆

1. Les $2n$ termes forment n paires $(-(2p-1)+2p)=1$.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k=n}$$

2. Notons T_n la somme. Pour $n=1$, $T_1=-1=\frac{-3-1}{4}$. Si la formule est vraie au rang n, alors

$$\begin{aligned}T_{n+1}&=\frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}+(-1)^{n+1}(n+1)\\&=\frac{(-1)^{n+1}\big(-(2n+1)+4(n+1)\big)-1}{4}=\frac{(-1)^{n+1}(2n+3)-1}{4}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k=\frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}}$$

Pour $2n$ termes, on trouve $\frac{(4n+1)-1}{4}=n$, en accord avec la question 1.

3. Pour $k\leqslant 2n$, le minimum vaut k, et pour $k>2n$, il vaut $2n$:

$$\sum_{k=n}^{3n}\min(k,2n)=\sum_{k=n}^{2n}k+\sum_{k=2n+1}^{3n}2n=\frac{3n(n+1)}{2}+2n^2.$$

$$\boxed{\sum_{k=n}^{3n}\min(k,2n)=\frac{n(7n+3)}{2}}$$

Pour $n=1$, on trouve bien $1+2+2=5$.

EXERCICE 12 ⋆⋆

1. La somme télescopique vaut $(n+1)^4$. En développant $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$,

$$(n+1)^4=4\sum_{k=0}^{n}k^3+n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)+(n+1).$$

On isole la somme cherchée, et l'on factorise par $(n+1)$, puis par n :

$$4\sum_{k=0}^{n}k^3=(n+1)\big((n+1)^3-n(2n+1)-2n-1\big)=(n+1)(n^3+n^2)=n^2(n+1)^2.$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \Big(\sum_{k=0}^{n} k\Big)^2}$$

2. Le calcul, un peu long mais sans difficulté, donne $f(n) - f(n-1) = n^4$: on développe $(n-1)^5$, $(n-1)^4$ et $(n-1)^3$ par la formule du binôme, et les termes de degré 5, 3, 2, 1 et 0 se compensent. Comme $f(0) = 0$, une somme télescopique donne

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} \big(f(k) - f(k-1)\big) = \sum_{k=1}^{n} k^4,$$

qui est une somme d'entiers.

$$\boxed{f(n) = \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \in \mathbb{N}}$$

À retenir : pour montrer qu'une fraction est entière, il suffit parfois de la reconnaître comme une somme d'entiers. Une démonstration arithmétique directe, par les congruences modulo 2, 3 et 5, serait bien plus laborieuse.

EXERCICE 13 ⋆⋆

1. On a $u_{k+1} - u_k = \big(2a(k+1) + 2b - ak - b\big)2^k = (ak + 2a + b)\,2^k$. L'identification donne $a = 1$ et $2a + b = 2$.

$$\boxed{u_k = k\,2^k \qquad \sum_{k=0}^{n} (k+2)\,2^k = u_{n+1} - u_0 = (n+1)\,2^{n+1}}$$

2. De même, $u_{k+1} - u_k = \big(ak^2 + (4a+b)k + (2a+2b+c)\big)2^k$, et l'identification avec $k^2 2^k$ donne $a = 1$, $4a + b = 0$, $2a + 2b + c = 0$.

$$\boxed{u_k = (k^2 - 4k + 6)\,2^k \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2\,2^k = (n^2 - 2n + 3)\,2^{n+1} - 6}$$

Pour $n = 2$, on vérifie $0 + 2 + 16 = 18 = 3 \times 8 - 6$.

EXERCICE 14 ⋆⋆⋆

1. D'une part, $S_{n+1} = S_n + (n+1)q^{n+1}$. D'autre part, le terme d'indice 0 étant nul, la translation $k \mapsto k+1$ donne

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (k+1)q^{k+1} = q\,S_n + q\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

En égalant les deux expressions, puis en multipliant par $1 - q$:

$$(1-q)S_n = q\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q} - (n+1)q^{n+1}.$$

$$\boxed{S_n = \frac{n\,q^{n+2} - (n+1)\,q^{n+1} + q}{(q-1)^2}}$$

2. On calcule, par translation d'indice,

$$(q-1)S_n = \sum_{k=0}^{n} k\,q^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} k\,q^k = n\,q^{n+1} - \sum_{k=1}^{n} q^k = n\,q^{n+1} - q\,\frac{1-q^n}{1-q},$$

et l'on retrouve la même expression en divisant par $q - 1$.

3. D'une part, $\sigma(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, dont la dérivée est

$$\sigma'(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

D'autre part, en dérivant la somme terme à terme, $\sigma'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$, donc $S_n = q\,\sigma'(q)$, ce qui redonne la formule. *À retenir :* la troisième méthode est la plus rapide et se généralise aux sommes $\sum k^2 q^k$ en dérivant deux fois. Elle annonce l'étude des séries entières de deuxième année.

EXERCICE 15 ⋆⋆

1. La factorisation du cours donne $\frac{a^n-1}{a-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k$. Comme $a > 1$, chacun des n termes est majoré par a^{n-1}.

$$\boxed{\frac{a^n-1}{a-1} \leqslant n\,a^{n-1}}$$

2. Pour la seconde inégalité, qui entraîne la première puisque $2 \cdot n! \leqslant (n+1)!$, on raisonne par récurrence. Pour $n = 1$, $1 \leqslant 2$. Si $\sum_{k=1}^{n} k! \leqslant 2 \cdot n!$, alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} k! \leqslant 2 \cdot n! + (n+1)! \leqslant (n+1)! + (n+1)! = 2\,(n+1)!,$$

puisque $2 \cdot n! \leqslant (n+1) \cdot n!$.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k! \leqslant 2 \cdot n! \leqslant (n+1)!}$$

La somme est dominée par son dernier terme : c'est la croissance très rapide de la factorielle, que le chapitre 10 précisera.

EXERCICE 16 ⋆⋆⋆

1. On pose $A_{-1} = 0$, de sorte que $a_k = A_k - A_{k-1}$ pour tout $k \geqslant 0$. Par translation d'indice,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k B_k = \sum_{k=0}^{n} A_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k B_{k+1} = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k\,(B_{k+1} - B_k).$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k\,b_k}$$

C'est l'analogue discret de $\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$, que l'on verra au chapitre 6 : A joue le rôle de la primitive f de a, et b celui de la dérivée g' de B.

2. On applique la formule à des familles indexées à partir de 1, ce qui ne change rien à la démonstration, avec $a_k = 1$, donc $A_k = k$, et $B_k = H_k$, donc $b_k = \frac{1}{k+1}$:

$$\sum_{k=1}^{n} H_k = n\,H_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+1} = n\,H_n - (n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = n\,H_n - (n-1) + (H_n - 1).$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)\,H_n - n}$$

3. Avec $a_k = k$, donc $A_k = \frac{k(k+1)}{2}$, et la même suite $B_k = H_k$:

$$\sum_{k=1}^{n} k\,H_k = \frac{n(n+1)}{2}\,H_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(k+1)}{2(k+1)} = \frac{n(n+1)}{2}\,H_n - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} k.$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k\,H_k = \frac{n(n+1)}{2}\,H_n - \frac{n(n-1)}{4}}$$

Pour $n=2$, on vérifie $1+2\times\frac{3}{2} = 4 = 3\times\frac{3}{2} - \frac{1}{2}$.

Sommes doubles

EXERCICE 17 ⋆

On décrit chaque ensemble d'indices par des inégalités, puis on lit les bornes en fixant d'abord j ; le dessin de l'énoncé permet de vérifier, colonne par colonne, quelles valeurs de i correspondent à chaque j.

- S_1**.** L'ensemble est $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$: pour j fixé, i va de 0 à j.
- S_2**.** L'ensemble est $i \geqslant 0$, $j \geqslant 0$, $i+j \leqslant n$: pour j fixé, i va de 0 à $n-j$.
- S_3**.** L'ensemble est $0 \leqslant i \leqslant n$ et $i \leqslant j \leqslant m$: pour j fixé, i va de 0 à $\min(j,n)$, ce qui oblige à distinguer $j \leqslant n$ et $j > n$.

$$\boxed{S_1 = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} a_{i,j} \qquad S_2 = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-j} a_{i,j} \qquad S_3 = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} a_{i,j} + \sum_{j=n+1}^{m}\sum_{i=0}^{n} a_{i,j}}$$

Piège : pour S_3, la forme trapézoïdale de l'ensemble d'indices ne se laisse pas décrire par une seule somme double à bornes simples ; on la découpe en un triangle et un rectangle, par la relation de Chasles.

EXERCICE 18 ⋆⋆

On utilise les sommes usuelles du cours et la proposition 8 sur les sommes triangulaires.

- **(a)** On somme 1 sur j couples pour chaque j : $\sum_{j=1}^{n} j$.

$$\boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$$

- **(b)** Le terme ne dépend pas de j : $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} i = n\times\frac{n(n+1)}{2}$.

$$\boxed{\frac{n^2(n+1)}{2}}$$

- **(c)** On somme d'abord sur i : $\sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right)$.

$$\boxed{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}}$$

- **(d)** On ajoute à (c) la somme $\sum_{j=1}^{n} j\times j = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

$$\boxed{\frac{n(n+1)^2}{2}}$$

- **(e)** On développe $(i+j)^2 = i^2+2ij+j^2$: les deux termes carrés donnent chacun $n\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, et le terme rectangle $2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

$$\boxed{\frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}}$$

- **(f)** Par symétrie, c'est le double de la somme sur $i<j$ de $j-i$. Pour j fixé, $\sum_{i=1}^{j-1}(j-i)=\frac{j(j-1)}{2}$, et $\sum_{j=1}^{n}\frac{j(j-1)}{2}=\frac{(n-1)n(n+1)}{6}$.

$$\boxed{\frac{(n-1)n(n+1)}{3}}$$

- **(g)** On somme d'abord sur i, ce qui fait disparaître le dénominateur : $\sum_{j=1}^{n}\frac{(j+1)(2j+1)}{6}$.

$$\boxed{\frac{n(4n^2+15n+17)}{36}}$$

- **(h)** Pour i fixé, $\sum_{j=1}^{n}\max(i,j)=i\times i+\sum_{j=i+1}^{n}j=i^2+\frac{n(n+1)}{2}-\frac{i(i+1)}{2}$. En sommant sur i :

$$\boxed{\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}}$$

- **(i)** On utilise $\min(i,j)+\max(i,j)=i+j$, dont la somme double vaut $n^2(n+1)$.

$$\boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

- **(j)** Le terme est un produit $3^i\times 3^j$: la somme double est le carré de $\sum_{i=1}^{n}3^i=\frac{3(3^n-1)}{2}$.

$$\boxed{\frac{9\,(3^n-1)^2}{4}}$$

À retenir : le résultat (i) est la somme des carrés, et ce n'est pas un hasard. Pour tout entier k entre 1 et n, on a $\min(i,j)\geqslant k$ pour exactement $(n-k+1)^2$ couples, ceux de $[\![k\,;n]\!]^2$; en écrivant $\min(i,j)$ comme le nombre d'entiers $k\geqslant 1$ tels que $k\leqslant\min(i,j)$, puis en intervertissant, on obtient $\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)^2=\sum_{k=1}^{n}k^2$. Toutes ces formules ont été vérifiées pour $n\leqslant 7$.

EXERCICE 19 ⋆

Le produit d'exponentielles de même base est l'exponentielle de la somme des exposants, ce qui ramène les deux premiers produits à des sommes doubles. Pour le troisième, on sépare les facteurs.

$$\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}x^{i+j}=x^{\sum(i+j)}=x^{n^2(n+1)},\qquad \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}i^{\,j}=\prod_{i=1}^{n}i^{\,n(n+1)/2}.$$

$$\boxed{x^{n^2(n+1)}\qquad (n!)^{n(n+1)/2}\qquad (n!)^{2n}}$$

Dans le dernier, chaque i apparaît n fois, de même que chaque j : $\prod_{i,j}ij=\big(\prod_i i\big)^n\big(\prod_j j\big)^n$.

EXERCICE 20 ⋆⋆

1. D'après la proposition 7 du cours, la somme double est un produit de deux sommes.

$$\boxed{S_n=\Big(\sum_{k=1}^{n}k\Big)^2}$$

2. Le carré $[\![1\,;n+1]\!]^2$ est la réunion disjointe de quatre morceaux : le carré $[\![1\,;n]\!]^2$, la colonne $j=n+1$ avec $i\leqslant n$, la ligne $i=n+1$ avec $j\leqslant n$, et le coin $(n+1,n+1)$. La relation de Chasles donne l'égalité.

3. Avec $a_{i,j}=ij$, les deux sommes simples valent chacune $(n+1)\frac{n(n+1)}{2}$, et le coin vaut $(n+1)^2$:

$$S_{n+1}-S_n=2(n+1)\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)^2=(n+1)^2(n+1)=(n+1)^3.$$

En sommant ces différences de 0 à $n-1$, et puisque $S_0 = 0$, on obtient $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$. La question 1 conclut.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n} k\Big)^2}$$

La figure de l'énoncé est exactement ce calcul : l'équerre ajoutée au passage de n à $n+1$ est formée de la colonne, de la ligne et du coin, et son aire est $(n+1)^3$.

EXERCICE 21 ⋆⋆

Par la proposition 7 du cours, le produit vaut $P = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{x_i}{x_j}$. Les n termes diagonaux valent 1. Les autres se regroupent par paires $\{(i,j),(j,i)\}$ avec $i<j$, au nombre de $\frac{n(n-1)}{2}$, et pour $u = \frac{x_i}{x_j} > 0$,

$$u + \frac{1}{u} - 2 = \frac{(u-1)^2}{u} \geqslant 0.$$

Donc $P \geqslant n + 2\times\frac{n(n-1)}{2} = n^2$.

$$\boxed{\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j}\Big) \geqslant n^2, \text{ avec égalité si et seulement si tous les } x_i \text{ sont égaux.}}$$

L'égalité impose $u=1$ pour chaque paire. Cette inégalité exprime que la moyenne arithmétique des x_i est supérieure à leur moyenne harmonique ; elle se déduira aussi de l'inégalité de Cauchy-Schwarz du chapitre 19.

EXERCICE 22 ⋆⋆⋆

Pour tous i et j, les familles étant croissantes, $a_i - a_j$ et $b_i - b_j$ ont le même signe : leur produit est positif. En développant la somme double par linéarité,

$$0 \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_i - a_j)(b_i - b_j) = \sum_{i,j} a_i b_i - \sum_{i,j} a_i b_j - \sum_{i,j} a_j b_i + \sum_{i,j} a_j b_j.$$

Le premier et le dernier terme valent $n\sum_k a_k b_k$, et les deux termes centraux valent $\big(\sum_i a_i\big)\big(\sum_j b_j\big)$. Donc

$$0 \leqslant 2n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k - 2\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} b_j\Big),$$

et l'on divise par $2n^2$.

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geqslant \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} b_j\Big)}$$

Si l'une des familles est croissante et l'autre décroissante, chaque produit est négatif, et l'inégalité est renversée. *À retenir :* la moyenne des produits dépasse le produit des moyennes lorsque les deux grandeurs « varient dans le même sens ». En probabilités, au chapitre 21, cela s'énoncera : deux variables aléatoires qui varient dans le même sens ont une covariance positive.

EXERCICE 23 ⋆⋆⋆

1. Notons $T = \sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} i^p$.

- En sommant d'abord sur i, à j fixé : $T = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j-1} i^p = \sum_{j=1}^{n} S_{j-1}^{(p)} = \sum_{k=0}^{n-1} S_k^{(p)}$.
- En sommant d'abord sur j, à i fixé : il y a $n-i$ valeurs de j, et le terme $i=n$, nul, peut être ajouté, donc

$$T = \sum_{i=0}^{n} (n-i)\, i^p = n\, S_n^{(p)} - S_n^{(p+1)}.$$

$$\boxed{n\,S_n^{(p)} - S_n^{(p+1)} = \sum_{k=0}^{n-1} S_k^{(p)}}$$

2. Pour $p=1$, on a $S_k^{(1)} = \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(k^2+k)$, donc le membre de droite vaut

$$\frac{1}{2}(S_{n-1}^{(2)} + S_{n-1}^{(1)}) = \frac{1}{2}(S_n^{(2)} - n^2 + S_n^{(1)} - n).$$

On isole $S_n^{(2)}$:

$$3\,S_n^{(2)} = (2n-1)\,S_n^{(1)} + n^2 + n = \frac{(2n-1)n(n+1)}{2} + n(n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}.$$

$$\boxed{S_n^{(2)} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

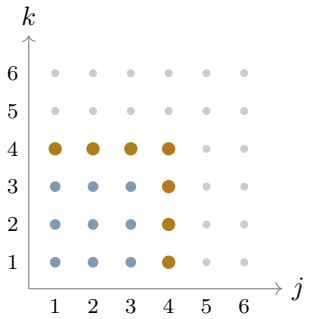
3. Pour $p=3$, on utilise $S_k^{(3)} = \frac{k^2(k+1)^2}{4} = \frac{1}{4}(k^4+2k^3+k^2)$, et l'on procède de même : le membre de droite fait intervenir $S_n^{(4)}$, que l'on isole.

$$\boxed{S_n^{(4)} = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}}$$

C'est bien la fonction $f(n)$ de l'exercice 12. La formule d'al-Haytham permet ainsi de calculer, de proche en proche, toutes les sommes de puissances.

EXERCICE 24 ⋆⋆⋆

Pour $m \in [\![1\,;n]\!]$, les couples (j,k) tels que $\max(j,k) \leqslant m$ forment le carré $[\![1\,;m]\!]^2$, à m^2 éléments. Ceux tels que $\max(j,k) = m$ sont donc au nombre de $m^2 - (m-1)^2 = 2m-1$: ils forment l'équerre de la figure.



Pour $n=6$ et $m=4$, les couples tels que $\max(j,k)=4$, en ocre, forment une équerre de $2\times 4-1=7$ points, qui borde le carré des couples tels que $\max(j,k)\leqslant 3$, en bleu.

On regroupe la somme selon la valeur m de $\max(j,k)$, puis l'on somme sur i :

$$\sum_{(i,j,k)} \min\left(i, \max(j,k)\right) = \sum_{m=1}^{n} (2m-1) \sum_{i=1}^{n} \min(i,m),$$

$$\sum_{i=1}^{n} \min(i,m) = \frac{m(m+1)}{2} + m(n-m) = mn - \frac{m(m-1)}{2}.$$

Il reste une somme de polynômes en m, que l'on calcule avec les sommes usuelles.

$$\boxed{\sum_{(i,j,k)\in[\![1\,;n]\!]^3} \min\left(i, \max(j,k)\right) = \frac{n^2(n+1)(5n+1)}{12}}$$

Pour $n = 2$, on trouve $\frac{4\times3\times11}{12} = 11$, ce que confirme l'énumération des huit triplets.

Coefficients binomiaux et formule du binôme

EXERCICE 25 ⋆

1. On factorise par la plus petite factorielle :

$$\boxed{(n+1)! - n! = n\cdot n! \qquad \frac{(n+3)!}{(n+1)!} = (n+2)(n+3) \qquad \frac{n+2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!}}$$

2. Les puissances et les factorielles se simplifient :

$$\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{(n+1)\,b^2}}$$

3. La ligne $n = 6$ du triangle de Pascal est $1, 6, 15, 20, 15, 6, 1$.

$$\boxed{(x+1)^6 = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1}$$

Pour $(x-1)^6$, les termes de degré impair changent de signe ; dans la somme, ils se compensent et les autres doublent.

$$\boxed{(x+1)^6 + (x-1)^6 = 2x^6 + 30x^4 + 30x^2 + 2}$$

EXERCICE 26 ⋆

On reconnaît chaque fois $(a+b)^n$ pour des valeurs bien choisies de a et b : $(1+2)^n$, $(1-1)^n$, $(1-\frac{1}{2})^n$, $(1+4)^n$. Pour la dernière, on écrit $(-1)^k 2^{k-1} = \frac{1}{2}(-2)^k$, et l'on retranche le terme $k = 0$ de $(1-2)^{2n}$.

$$\boxed{3^n \qquad 0 \qquad \frac{1}{2^n} \qquad 5^n \qquad \frac{(1-2)^{2n}-1}{2} = 0}$$

Attention : la deuxième somme vaut 0 parce que $n \geqslant 1$; pour $n = 0$, elle vaudrait 1, car $0^0 = 1$.

EXERCICE 27 ⋆⋆

En appliquant deux fois la formule du pion, $k(k-1)\binom{n}{k} = n(k-1)\binom{n-1}{k-1} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$, d'où

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j} = n(n-1)\,2^{n-2}.$$

En ajoutant $\sum k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$, calculée dans le cours, on obtient la deuxième somme. Pour la troisième, la formule du pion au rang $n+1$ donne $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$.

$$\boxed{n(n-1)\,2^{n-2} \qquad n(n+1)\,2^{n-2} \qquad \frac{2^{n+1}-1}{n+1}}$$

La troisième somme, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x$, se retrouve aussi en intégrant $(1+x)^n$ entre 0 et 1, comme on sait le faire depuis la Terminale et comme le reprendra le chapitre 6.

EXERCICE 28 ⋆⋆

1. Pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$,

$$\binom{n}{k+1} \Big/ \binom{n}{k} = \frac{n!\,k!\,(n-k)!}{(k+1)!\,(n-k-1)!\,n!} = \frac{n-k}{k+1}.$$

Ce quotient est strictement supérieur à 1 si et seulement si $n-k > k+1$, c'est-à-dire $k < \frac{n-1}{2}$, et il vaut 1 si et seulement si $k = \frac{n-1}{2}$. La famille croît jusqu'au milieu, puis décroît.

$$\boxed{\text{Le maximum est atteint en } k = \tfrac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair, en } k = \tfrac{n-1}{2} \text{ et } k = \tfrac{n+1}{2} \text{ sinon.}}$$

2. Les $2n+1$ coefficients $\binom{2n}{k}$ ont pour somme $2^{2n} = 4^n$, et le plus grand d'entre eux est $\binom{2n}{n}$. Celui-ci est donc au moins égal à leur moyenne.

$$\boxed{\binom{2n}{n} \geqslant \frac{4^n}{2n+1}}$$

Pour $n = 4$, $\binom{8}{4} = 70 \geqslant \frac{256}{9} \approx 28{,}4$: la minoration est grossière, mais elle donne le bon ordre de grandeur exponentiel. La formule de Stirling, établie plus tard dans l'année, montre que $\binom{2n}{n}$ est équivalent à $\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$.

EXERCICE 29 ⋆⋆

1. Le produit $P_n(1) = \prod \frac{k+1}{k}$ est télescopique, et $P_n(-n)$ contient le facteur $1 - \frac{n}{n} = 0$.

$$\boxed{P_n(0) = 1 \qquad P_n(1) = n+1 \qquad P_n(-n) = 0}$$

2. On écrit

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+x}{k} \qquad \text{et} \qquad P_n(x-1) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k-1+x}{k}.$$

Les numérateurs de $x\,P_n(x)$ sont x, $x+1$, …, $x+n$, et ceux de $(x+n)\,P_n(x-1)$ sont x, $x+1$, …, $x+n-1$, puis $x+n$: les deux produits ont les mêmes facteurs et le même dénominateur $n!$.

$$\boxed{x\,P_n(x) = (x+n)\,P_n(x-1)}$$

3. Pour $p \in \mathbb{N}$, le produit des dénominateurs est $n!$, et celui des numérateurs est

$$(p+1)(p+2)\cdots(p+n) = \frac{(n+p)!}{p!}.$$

$$\boxed{P_n(p) = \binom{n+p}{p}}$$

On peut aussi le démontrer par récurrence sur p, à partir de la relation $P_n(p) = \frac{p+n}{p} P_n(p-1)$ que donne la question 2.

EXERCICE 30 ⋆⋆

Par la formule du binôme, avec $a = 3$ et $b = \pm\sqrt{5}$,

$$(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}\left(1+(-1)^k\right)\sqrt{5}^{\,k} = 2 \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} 3^{n-k}\, 5^{k/2}.$$

Les termes d'indice impair, qui contiennent $\sqrt{5}$, se compensent, et la somme restante est un entier naturel.

$$\boxed{(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n \text{ est un entier naturel pair.}}$$

Notons N cet entier. Comme $0 < 3-\sqrt{5} < 1$, on a $0 < (3-\sqrt{5})^n < 1$, donc $N-1 < (3+\sqrt{5})^n < N$: l'entier qui suit $(3+\sqrt{5})^n$ est N, qui est pair. Par exemple, $(3+\sqrt{5})^2 = 14+6\sqrt{5} \approx 27{,}4$, et l'entier suivant est 28.

EXERCICE 31 ⋆⋆

1. Par le calcul, les deux membres valent

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(p-k)!\,(n-p)!} = \frac{n!}{k!\,(p-k)!\,(n-p)!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}\cdot\frac{p!}{k!\,(p-k)!}.$$

Combinatoirement, on choisit d'abord A, puis on la complète en B en choisissant $p-k$ éléments parmi les $n-k$ restants ; ou bien on choisit d'abord B, puis A à l'intérieur de B.

2. En sommant sur k et en factorisant par $\binom{n}{p}$, on obtient $\binom{n}{p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}$ et $\binom{n}{p}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}$, que la formule du binôme donne.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p\binom{n}{p} \qquad \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 0 \quad (p \geqslant 1)}$$

La première somme compte les couples $A \subset B$ avec $\mathrm{card}(B) = p$: il y a $\binom{n}{p}$ choix de B, et 2^p choix de A dans B.

EXERCICE 32 ⋆⋆

1. Par la formule de Pascal et la symétrie, $\binom{2p+2}{p+1} = \binom{2p+1}{p} + \binom{2p+1}{p+1} = 2\binom{2p+1}{p}$.

2. On trouve $S_0 = 1$, $S_1 = 1+\frac{2}{2} = 2$ et $S_2 = 1+\frac{3}{2}+\frac{6}{4} = 4$. Par la formule de Pascal,

$$\binom{n+1+k}{k} = \binom{n+k}{k} + \binom{n+k}{k-1}, \qquad \text{donc}$$

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+k}{k}\frac{1}{2^k} + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+k}{k-1}\frac{1}{2^k}.$$

La première somme vaut $S_n + \binom{2n+1}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}}$. Dans la seconde, la translation $j = k-1$ donne

$$\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\binom{n+1+j}{j}\frac{1}{2^j} = \frac{1}{2}\Big(S_{n+1} - \binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}}\Big).$$

D'après la question 1, les deux termes isolés se compensent, et il reste $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2}S_{n+1}$.

$$\boxed{S_{n+1} = 2S_n \qquad \text{donc} \qquad S_n = 2^n}$$

EXERCICE 33 ⋆⋆

Notons $T_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k}$; grâce à la convention $\binom{a}{b} = 0$ pour $b > a$, on peut sommer sur tous les $k \geqslant 0$. Alors $T_0 = 1 = F_1$, $T_1 = 1 = F_2$, et par la formule de Pascal,

$$T_{n+2} = \sum_{k\geqslant 0}\binom{n+1-k}{k} + \sum_{k\geqslant 1}\binom{n+1-k}{k-1} = T_{n+1} + \sum_{j\geqslant 0}\binom{n-j}{j} = T_{n+1}+T_n.$$

Les suites (T_n) et (F_{n+1}) vérifient la même relation de récurrence et ont les mêmes deux premiers termes : par récurrence double, elles sont égales.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k}=F_{n+1}}$$

Sur le triangle de Pascal, T_n est la somme des coefficients d'une « diagonale montante » : on part du bord gauche de la ligne n et l'on remonte d'une ligne en avançant d'un rang. Les sommes de ces diagonales sont $1,1,2,3,5,8,\dots$

EXERCICE 34 ⋆⋆⋆

1. On calcule $S_0,\dots,S_7$:

$$\boxed{1,\ 1,\ 0,\ -1,\ -1,\ 0,\ 1,\ 1}$$

La suite semble périodique de période 6.

2. La même manipulation qu'à l'exercice 33, avec le signe $(-1)^k$, donne

$$S_{n+2}=\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\binom{n+1-k}{k}+\sum_{k\geqslant 1}(-1)^k\binom{n+1-k}{k-1}=S_{n+1}-S_n,$$

le changement d'indice $j=k-1$ faisant apparaître le signe -1. Alors $S_{n+3}=S_{n+2}-S_{n+1}=-S_n$.

3. On en déduit $S_{n+6}=-S_{n+3}=S_n$, et la suite est déterminée par ses six premiers termes.

$$\boxed{S_n=1,1,0,-1,-1,0 \text{ selon que } n\equiv 0,1,2,3,4,5\ [6]}$$

Le chapitre 4 en donnera l'explication : les racines de $r^2=r-1$ sont les nombres complexes $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi/3}$, dont la puissance sixième vaut 1.

EXERCICE 35 ⋆⋆⋆

1. On écrit $k(k+1)(k+2)=6\binom{k+2}{3}$, puis la formule de la crosse de hockey, après le changement d'indice $j=k+2$:

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=6\sum_{j=3}^{n+2}\binom{j}{3}=6\binom{n+3}{4}.$$

$$\boxed{1\times 2\times 3+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}}$$

2. On cherche a, b, c tels que $k^3=a\frac{k(k-1)(k-2)}{6}+b\frac{k(k-1)}{2}+ck$; les valeurs $k=1,2,3$ donnent $c=1$, $b=6$, $a=6$.

$$k^3=6\binom{k}{3}+6\binom{k}{2}+\binom{k}{1},\qquad \sum_{k=0}^{n}k^3=6\binom{n+1}{4}+6\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}.$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

3. Le produit vaut $\frac{(k+m)!}{k!}=m!\binom{k+m}{m}$, et la crosse de hockey donne $\sum_{k=0}^{n}\binom{k+m}{m}=\binom{n+m+1}{m+1}$.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\prod_{p=1}^{m}(k+p)=m!\binom{n+m+1}{m+1}=\frac{(n+m+1)!}{(m+1)\,n!}}$$

Pour $m=1$, on retrouve $\sum_{k=0}^{n}(k+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. *À retenir :* les produits de facteurs consécutifs, appelés *factorielles montantes*, se somment aussi simplement que les puissances se dérivent ; c'est pourquoi on exprime les puissances à l'aide de coefficients binomiaux pour les sommer.

EXERCICE 36 ⋆⋆⋆

1. L'application $X \mapsto (X \cap A, X \cap B)$ est une bijection de l'ensemble des parties X de $A \cup B$ telles que $\text{card}(X \cap A) = k$ et $\text{card}(X) = q$ sur l'ensemble des couples (X_1, X_2) formés d'une partie de A à k éléments et d'une partie de B à $q-k$ éléments. Sa réciproque est $(X_1, X_2) \mapsto X_1 \cup X_2$, et $X_1 \cup X_2$ a bien q éléments, d'après le lemme 4 du chapitre 2, puisque A et B sont disjoints. Le lemme 6 du chapitre 2 donne le cardinal du produit.

$$\boxed{\binom{a}{k}\binom{b}{q-k} \text{ parties}}$$

2. Les parties X de $A \cup B$ à q éléments se répartissent en $q+1$ catégories disjointes, selon la valeur de $\text{card}(X \cap A)$, qui va de 0 à q. Le lemme 4 du chapitre 2, étendu à une réunion disjointe finie, donne la formule, puisque $A \cup B$ a $a+b$ éléments.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{q} \binom{a}{k}\binom{b}{q-k} = \binom{a+b}{q}}$$

3. On prend $a = b = q = n$, et l'on utilise la symétrie des coefficients binomiaux :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}}$$

Le chapitre 13 en donnera une autre démonstration, en identifiant les coefficients des deux membres de l'égalité de polynômes

$$(1+X)^a(1+X)^b = (1+X)^{a+b}.$$

EXERCICE 37 ⋆⋆

1. Dans $\big((a+b)+c\big)^7 = \sum_{j=0}^{7} \binom{7}{j}(a+b)^{7-j}c^j$, le terme en c^1 est $7(a+b)^6 c$, et le coefficient de a^2b^4 dans $(a+b)^6$ est $\binom{6}{2} = 15$.

$$\boxed{7 \times 15 = 105 = \frac{7!}{2!\,4!\,1!}}$$

2. De même, le terme en z^r de $\big((x+y)+z\big)^n$ est $\binom{n}{r}(x+y)^{n-r}z^r$, et le coefficient de $x^p y^q$ dans $(x+y)^{p+q}$ est $\binom{p+q}{p}$. Le produit se simplifie :

$$\binom{n}{r}\binom{p+q}{p} = \frac{n!}{r!\,(p+q)!} \cdot \frac{(p+q)!}{p!\,q!}.$$

$$\boxed{\text{Le coefficient de } x^p y^q z^r \text{ est } \frac{n!}{p!\,q!\,r!}}$$

C'est le nombre de façons de choisir, parmi les n facteurs du produit, ceux qui fournissent x, ceux qui fournissent y et ceux qui fournissent z.

EXERCICE 38 ⋆

(a) L'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donne $y + z = 3$, puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ donne $-2z = -2$. La remontée donne $z = 1$, $y = 2$, puis $x = -2y + z = -3$.

$$\boxed{(x, y, z) = (-3, 2, 1)}$$

(b) L'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donne $y + z - t = -1$, puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ donne $-z = 2$. Alors $z = -2$, $t = -1 - z = 1$ par la dernière équation, $y = 1 + t = 2$ et $x = 1 - t = 0$.

$$\boxed{(x, y, z, t) = (0, 2, -2, 1)}$$

(c) L'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donne $-y - 2t = -1$. Les inconnues z et t ne sont en tête d'aucune ligne : ce sont des paramètres. On obtient $y = 1 - 2t$, puis $x = 3 - y - 3z - t = 2 - 3z + t$.

$$\boxed{\{(2 - 3z + t,\ 1 - 2t,\ z,\ t) \mid (z, t) \in \mathbb{R}^2\}}$$

L'ensemble des solutions dépend de deux paramètres : deux équations ne suffisent pas à déterminer quatre inconnues.

(d) On échange L_1 et L_2, pour avoir un pivot égal à 1. Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1$ donnent $-3y + 5z = -3$ et $-6y + 10z = -6$, puis $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ donne $0 = 0$. Avec $z = 3s$:

$$\boxed{\{(1 + s,\ 1 + 5s,\ 3s) \mid s \in \mathbb{R}\}}$$

La troisième équation initiale est la somme du double de la première et de la deuxième : les trois plans ont une droite commune.

EXERCICE 39 ⋆

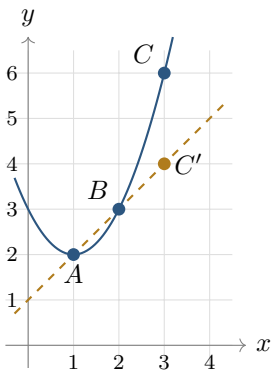
1. Les trois conditions s'écrivent $a + b + c = 2$, $4a + 2b + c = 3$, $9a + 3b + c = 6$. Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ donnent $3a + b = 1$ et $8a + 2b = 4$, puis $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ donne $2a = 2$.

$$\boxed{a = 1,\ b = -2,\ c = 3 :\ y = x^2 - 2x + 3}$$

2. Seul le second membre de la troisième équation change, et l'on obtient $2a = 0$, donc $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$.

$$\boxed{y = x + 1 :\ \text{la seule courbe obtenue est une droite.}}$$

Les points A, B et C' sont alignés : aucune parabole, au sens strict, ne passe par eux.



La parabole $y = x^2 - 2x + 3$, en bleu, passe par A, B et C, et a son sommet en A. La droite $y = x + 1$, en ocre, passe par A, B et C' : lorsque les trois points sont alignés, la « parabole » dégénère en droite.

EXERCICE 40 ⋆⋆

Le coefficient m de x dans la première équation peut s'annuler : on prend pour pivot le coefficient 1 de la troisième. On échange L_1 et L_3, puis $L_3 \leftarrow L_3 - mL_1$ donne $(1-m)y - (1+m)z = -m$. On élimine y grâce à L_2, dont le pivot vaut 1 : $L_3 \leftarrow L_3 - (1-m)L_2$ donne

$$\big(-(1+m) - 3(1-m)\big)z = -m - m(1-m), \qquad \text{soit} \qquad (2m-4)\,z = m(m-2).$$

- Si $m \neq 2$, alors $z = \frac{m}{2}$, puis $y = m - 3z = -\frac{m}{2}$ et $x = 1 - y - z = 1$.
- Si $m = 2$, la dernière ligne s'écrit $0 = 0$: avec le paramètre z, on obtient $y = 2 - 3z$ et $x = 1 - y - z = 2z - 1$.

$$\boxed{m \neq 2 : \ \left(1, -\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right) \qquad m = 2 : \ \{(2z-1,\ 2-3z,\ z) \mid z \in \mathbb{R}\}}$$

Piège : si l'on prend m comme premier pivot, il faut traiter à part le cas $m = 0$, qui n'a pourtant rien de particulier : la solution y vaut $(1, 0, 0)$, comme le donne la formule générale.

EXERCICE 41 ⋆⋆

1. Pour $(x, y, z) = (0, 0, 1)$, les premiers membres valent 3, 1 et $m-1$, qui sont les seconds membres.

2. Les plans seraient parallèles si leurs vecteurs de coefficients $(m, 2, 3)$ et $(m-1, m, 1)$ étaient proportionnels. La troisième composante imposerait $(m, 2, 3) = 3(m-1, m, 1)$, donc à la fois $m = 3m-3$ et $2 = 3m$, ce qui est incompatible. Pour $m = 0$, on résout $2y + 3z = 3$ et $-x + z = 1$.

$$\boxed{\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \left\{\left(z-1,\ \frac{3-3z}{2},\ z\right) \mid z \in \mathbb{R}\right\} \text{ pour } m = 0}$$

3. Comme $(0, 0, 1)$ est solution, on pose $z = 1 + w$: le système devient homogène,

$$mx + 2y + 3w = 0, \qquad (m-1)x + my + w = 0, \qquad (m+1)x + my + (m-1)w = 0.$$

La deuxième équation donne $w = -(m-1)x - my$. En reportant dans les deux autres :

$$(3-2m)x + (2-3m)y = 0 \qquad \text{et} \qquad m\big((3-m)x + (2-m)y\big) = 0.$$

- Si $m = 0$, la troisième équation disparaît : l'intersection est la droite trouvée à la question 2.
- Si $m \neq 0$, on divise par m. En éliminant x ou y, on fait apparaître le coefficient

$$(3-2m)(2-m) - (2-3m)(3-m) = m(4-m).$$

  Pour $m \neq 4$, il est non nul, et l'on obtient $x = y = 0$, puis $w = 0$.
- Si $m = 4$, les deux équations se réduisent à $x + 2y = 0$, et l'on obtient une droite.

$$\boxed{m \notin \{0, 4\} : \ \{(0, 0, 1)\} \qquad m = 0 \text{ ou } m = 4 : \ \text{une droite passant par } (0, 0, 1)}$$

Pour $m = 4$, la droite est $\{(1 - z,\ \frac{z-1}{2},\ z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Dans les deux cas particuliers, les trois plans ont une droite commune ; sinon, ils se coupent en un seul point.

EXERCICE 42 ⋆⋆⋆

1. Par récurrence sur k : c'est vrai pour $k = 1$, la somme étant vide, et si c'est vrai au rang k,

$$x_{k+1} = ax_k + b = a^k x_1 + b\sum_{j=1}^{k-1} a^j + b = a^k x_1 + b\sum_{j=0}^{k-1} a^j.$$

2. Les $n-1$ premières équations sont équivalentes aux formules de la question 1, qui expriment $x_2, \ldots, x_n$ en fonction de x_1. La dernière devient $a^n x_1 + b\sum_{j=0}^{n-1} a^j = x_1$, soit

$$\boxed{(1-a^n)\,x_1 = b\,(1 + a + \cdots + a^{n-1}), \qquad \text{avec} \qquad 1 - a^n = (1-a)(1 + a + \cdots + a^{n-1}).}$$

3. On distingue les cas proposés.

- *Si* $a^n \neq 1$, alors $a \neq 1$ et $1 + a + \cdots + a^{n-1} \neq 0$: on simplifie, et $x_1 = \frac{b}{1-a}$. Ce nombre est le point fixe de $x \mapsto ax + b$, donc tous les x_k lui sont égaux.
- *Si* $a = 1$, l'équation devient $0 = nb$. Si $b \neq 0$, il n'y a pas de solution ; si $b = 0$, les solutions sont les n-uplets constants.
- *Si* $a = -1$ *et* n *est pair*, les deux membres sont nuls : x_1 est quelconque, et les termes alternent entre x_1 et $b - x_1$.

$$\boxed{a^n \neq 1 : \left(\tfrac{b}{1-a}, \ldots, \tfrac{b}{1-a}\right) \qquad a = 1,\ b = 0 : (c, \ldots, c) \qquad a = 1,\ b \neq 0 : \varnothing}$$

$$\boxed{a = -1,\ n \text{ pair} : (c,\ b - c,\ c,\ b - c,\ \ldots,\ c,\ b - c),\ c \in \mathbb{R}}$$

Dans $\mathbb{R}$, ces cas sont exhaustifs, puisque $a^n = 1$ impose $|a| = 1$. Le chapitre 4 fera apparaître d'autres racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$, et donc d'autres solutions lorsque a est complexe.

Exercices de synthèse

EXERCICE 43 ⋆⋆

1. **Fausse** La somme comporte $n + 1$ termes égaux à 2 : elle vaut $2(n + 1)$.
2. **Vraie** Chacun des n facteurs fournit un facteur 3.
3. **Fausse** Pour $n = 2$ et $a_1 = a_2 = 1$, on trouve $4 \neq 2$: il manque les termes rectangles.
4. **Vraie** C'est une somme télescopique.
5. **Vraie** C'est la formule du binôme pour $(1 + 2)^n$.
6. **Vraie** Par la formule de Pascal et la symétrie,
$$\binom{2n}{n} = \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-1}{n} = 2\binom{2n-1}{n-1}.$$
7. **Vraie** Ces couples correspondent aux parties $\{i, j\}$ à deux éléments de $[\![1\,;n]\!]$, qui sont au nombre de $\binom{n}{2}$.
8. **Fausse** Pour $n = 2$, avec $a_{2,1} = 1$ et les autres termes nuls, le membre de gauche contient le terme $a_{2,1}$ et vaut 1, alors que le membre de droite ne porte que sur les couples $i \leqslant j$ et vaut 0. L'interversion correcte est
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{i,j}.$$
9. **Vraie** Les deux opérations, effectuées l'une après l'autre, sont des opérations élémentaires : la seconde utilise la ligne L_1, déjà modifiée, mais distincte de L_2.
10. **Fausse** Le système $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 0$ a une solution. Un tel système est souvent incompatible, mais pas toujours.

$$\boxed{\text{Vraies : 2, 4, 5, 6, 7, 9.} \qquad \text{Fausses : 1, 3, 8, 10.}}$$

Piège : l'affirmation 9 est vraie. Ce sont les opérations *simultanées* $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ que dénonce le cours ; ce qui compte, c'est que chaque étape soit réversible.

EXERCICE 44 ⋆⋆

1. Avec $x_0 = 0$ et $x_4 = 4$, la condition (V) s'écrit $2x_k = x_{k-1} + x_{k+1}$ pour $k = 1, 2, 3$, et la condition (T) dit que $4x_k$ est égal à la somme des quatre autres termes. On obtient les deux systèmes suivants :

$$\text{(V)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} \qquad \text{(T)} \begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

Pour (V), on échange L_1 et L_2 afin de disposer du pivot -1, puis $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ donne $3x_2 - 2x_3 = 0$. On échange alors L_2 et L_3, et $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$ donne $4x_3 = 12$. La remontée donne $x_3 = 3$, puis $x_2 = 2x_3 - 4 = 2$ et $x_1 = 2x_2 - x_3 = 1$.

Pour (T), on échange de même L_1 et L_2, puis $L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ donnent $15x_2 - 5x_3 = 20$ et $-5x_2 + 5x_3 = 0$. On échange L_2 et L_3, et $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$ donne $10x_3 = 20$. La remontée donne $x_3 = 2$, puis $x_2 = x_3 = 2$ et $x_1 = 4x_2 - x_3 - 4 = 2$.

$$\boxed{(\mathrm{V}) : (x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3) \qquad (\mathrm{T}) : (x_1, x_2, x_3) = (2, 2, 2)}$$

2. Pour $k \in [\![1\,;n]\!]$, la condition $2x_k = x_{k-1} + x_{k+1}$ s'écrit $x_{k+1} - x_k = x_k - x_{k-1}$. Notons $d_k = x_{k+1} - x_k$ pour $k \in [\![0\,;n]\!]$: on a $d_k = d_{k-1}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$, donc, de proche en proche, $d_k = d_0$ pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$. La somme des d_k est télescopique :

$$\beta - \alpha = x_{n+1} - x_0 = \sum_{k=0}^{n} (x_{k+1} - x_k) = (n+1)\, d_0.$$

Ainsi $d_0 = \frac{\beta - \alpha}{n+1}$, et, par un nouveau télescopage, $x_k = x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} d_j = \alpha + k\, d_0$. Réciproquement, cette famille est en progression arithmétique, de premier terme α et de dernier terme β, et chacun de ses termes intérieurs est la moyenne de ses deux voisins.

$$\boxed{\forall k \in [\![0\,;n+1]\!], \quad x_k = \alpha + \frac{k\,(\beta - \alpha)}{n+1} = \frac{(n+1-k)\,\alpha + k\,\beta}{n+1}}$$

Pour $n = 3$, $\alpha = 0$ et $\beta = 4$, on retrouve $x_k = k$, conformément à la question 1. ✓

3. Pour $k \in [\![1\,;n]\!]$, la somme des $n+1$ réels autres que x_k vaut $S - x_k$, donc la condition (T) s'écrit $(n+1)\, x_k = S - x_k$, c'est-à-dire

$$(n+2)\, x_k = S.$$

Les n réels x_1, …, x_n sont donc égaux à un même réel $c = \frac{S}{n+2}$. En reportant dans la définition de S, on obtient $S = \alpha + \beta + nc$, et l'égalité $(n+2)\, c = \alpha + \beta + nc$ donne $c = \frac{\alpha + \beta}{2}$. Réciproquement, si $x_1 = \cdots = x_n = c$, la moyenne des réels autres que x_k vaut

$$\frac{\alpha + \beta + (n-1)\, c}{n+1} = \frac{2c + (n-1)\, c}{n+1} = c,$$

et la condition (T) est vérifiée.

$$\boxed{x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{\alpha + \beta}{2}}$$

Les deux profils sont très différents. Dans le modèle (V), où chaque point n'échange de chaleur qu'avec ses deux voisins, la température varie de façon affine le long de la barre : c'est le profil d'une barre en régime permanent. Dans le modèle (T), où chaque point échange avec tous les autres, l'intérieur est à une température uniforme, égale à la moyenne des températures des extrémités, quel que soit le nombre de points.

À retenir : on a résolu deux systèmes de n équations à n inconnues sans effectuer de pivot, en exploitant leur structure : une somme télescopique pour le premier, la somme S de toutes les inconnues pour le second. La feuille du chapitre 16 reprendra le modèle (V) en dimension deux, sur une grille dont chaque coefficient intérieur est la moyenne de ses quatre voisins.

EXERCICE 45 ⋆⋆

1. Raisonnons par récurrence sur n. Pour $n = 0$, le plan forme une seule région, et $r_0 = 1$. Supposons que n droites en position générale délimitent toujours r_n régions, et considérons $n+1$ droites en position générale. Les n premières sont aussi en position générale, et délimitent r_n régions. D'après le fait admis, la dernière droite est coupée en $n+1$ morceaux, qui partagent chacun en deux

une région différente : elle ajoute $n+1$ régions, quelle que soit la disposition des droites. La somme des $r_{k+1} - r_k = k+1$ est télescopique :

$$r_n = r_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(r_{k+1} - r_k) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1}(k+1) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\boxed{r_n = \frac{n^2+n+2}{2} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}}$$

On trouve $r_1 = 2$, $r_2 = 4$, $r_3 = 7$ et $r_4 = 11$, ce qui est conforme à la figure.

2. D'après le fait admis, il y a autant de régions non bornées que d'arcs, c'est-à-dire $2n$. Les autres régions sont bornées, et leur nombre vaut

$$r_n - 2n = \frac{n^2-3n+2}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

$$\boxed{\text{pour } n \geqslant 1,\ n \text{ droites en position générale délimitent } \binom{n-1}{2} \text{ régions bornées}}$$

Pour $n = 4$, on trouve $\binom{3}{2} = 3$ régions bornées : ce sont les deux triangles et le quadrilatère colorés de la figure. Pour $n = 3$, on trouve une seule région bornée, le triangle formé par les trois droites. ✓

3. On raisonne comme à la question 1. En ajoutant un plan P à n plans en position générale, on partage en deux autant de régions de l'espace que les n droites tracées sur P délimitent de régions de P, c'est-à-dire r_n d'après la question 1. Le nombre p_n de régions de l'espace ne dépend donc que de n, avec

$$p_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad p_{n+1} = p_n + r_n.$$

Par télescopage, puis avec l'expression de r_k trouvée à la question 1, on obtient

$$p_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} r_k = 1 + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{k}{0} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{k}{1} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{k}{2}.$$

La formule de la crosse de hockey (proposition 10 du cours) donne $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k}{j} = \binom{n}{j+1}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$: les termes d'indice $k < j$ sont nuls, et si $n-1 < j$, les deux membres sont nuls.

$$\boxed{p_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = \frac{n^3+5n+6}{6}}$$

Pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$, on trouve $p_n = 1, 2, 4, 8, 15$, alors que $2^n = 1, 2, 4, 8, 16$: les deux suites coïncident jusqu'à $n = 3$, puis se séparent.

À retenir : chaque région est déterminée par le côté qu'elle occupe par rapport à chacun des plans, ce qui donne au plus 2^n régions ; pour quatre plans, l'une des 16 combinaisons de côtés est impossible. Ainsi, pour les quatre plans des faces d'un tétraèdre, aucun point n'est situé à la fois du côté opposé au tétraèdre pour chacune des quatre faces. Dans le plan, la même chose se produit dès trois droites, puisque $r_3 = 7 < 8$. Une suite qui commence par 1, 2, 4, 8 n'est pas forcément celle des puissances de 2.

EXERCICE 46 ⋆⋆⋆

1. On a $E_{n,1} = \{(n)\}$ et $E_{n,2} = \{(k, n-k) \mid k \in [\![0\,;n]\!]\}$, qui a $n+1$ éléments.

$$\boxed{E_{2,3} = \{(2,0,0),(0,2,0),(0,0,2),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\},\ \text{de cardinal } 6}$$

2. Notons $s_i = x_1 + \cdots + x_i + i$ pour $1 \leqslant i \leqslant p-1$. On a $s_1 \geqslant 1$, $s_{i+1} - s_i = x_{i+1} + 1 \geqslant 1$, et $s_{p-1} = n - x_p + p - 1 \leqslant n + p - 1$: les s_i sont strictement croissants et forment une partie à $p-1$ éléments de $[\![1\,;n+p-1]\!]$. Réciproquement, à une partie $\{s_1 < \cdots < s_{p-1}\}$, on associe, avec $s_0 = 0$ et $s_p = n + p$,

$$x_i = s_i - s_{i-1} - 1 \geqslant 0, \qquad \text{de somme} \qquad \sum_{i=1}^{p} x_i = s_p - s_0 - p = n,$$

par télescopage. Les deux applications sont réciproques l'une de l'autre, et le théorème 1 du cours donne le cardinal.

$$\boxed{\operatorname{card}(E_{n,p}) = \binom{n+p-1}{p-1}}$$



$(x_1, x_2, x_3) = (2,1,3) \longleftrightarrow \{3,5\}$

Pour $n = 6$ et $p = 3$, on aligne $n + p - 1 = 8$ cases, et l'on place $p - 1 = 2$ barres, en ocre, dans les cases 3 et 5 : les billes bleues situées avant, entre et après les barres sont au nombre de 2, 1 et 3. Choisir une solution revient à choisir la position des barres.

3. En posant $y_i = x_i - 1$, les p-uplets d'entiers strictement positifs de somme n correspondent bijectivement aux éléments de $E_{n-p,p}$, lorsque $n \geqslant p$.

$$\boxed{\binom{n-1}{p-1} \text{ solutions, ce qui reste valable, et vaut } 0, \text{ si } n < p}$$

4. On applique les deux résultats avec $n = 10$ et $p = 4$.

$$\boxed{\binom{13}{3} = 286 \text{ répartitions, dont } \binom{9}{3} = 84 \text{ où chaque enfant reçoit au moins un bonbon}}$$

EXERCICE 47 ⋆⋆⋆

Fixons n. Les deux sommes intérieures portent sur les couples (p,q) tels que $0 \leqslant p \leqslant q \leqslant n$: on les intervertit, puis l'on pose $r = n - q$, qui décrit $[\![0\,;n-p]\!]$:

$$\sum_{q=0}^{n}\sum_{p=0}^{q}\binom{n}{p}\binom{n-p}{n-q} = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\sum_{q=p}^{n}\binom{n-p}{n-q} = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}2^{n-p} = 3^n.$$

La dernière égalité est la formule du binôme pour $(1+2)^n$. Il reste une somme géométrique.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{m} 3^n = \frac{3^{m+1}-1}{2}}$$

Le nombre 3^n s'interprète : la somme intérieure compte les couples (P,Q) de parties d'un ensemble à n éléments telles que $P \subset Q$, et chaque élément a trois possibilités, être dans P, dans $Q \setminus P$, ou hors de Q.

EXERCICE 48 ⋆⋆⋆

1. On calcule les sommes, en lisant les chiffres de droite à gauche à partir de l'indice 0 :

$$(11010)_{-2} = (-2)^4 + (-2)^3 + (-2)^1 = 16 - 8 - 2 = 6, \qquad (1111)_{-2} = -8 + 4 - 2 + 1 = -5.$$

De même, $-1 = -2 + 1$, $2 = 4 - 2$ et $3 = 4 - 2 + 1$.

$$\boxed{-1 = (11)_{-2}, \qquad 2 = (110)_{-2}, \qquad 3 = (111)_{-2}}$$

2. Les termes d'indice $k < m$ sont nuls, et l'on factorise par $(-2)^m$:

$$\sum_{k=0}^{N} (\varepsilon_k - \eta_k)\,(-2)^k = (-2)^m \Big((\varepsilon_m - \eta_m) - 2 \sum_{k=m+1}^{N} (\varepsilon_k - \eta_k)\,(-2)^{k-m-1} \Big).$$

Le facteur entre parenthèses est la somme de $\varepsilon_m - \eta_m = \pm 1$ et d'un entier pair : il est impair, donc non nul.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} (\varepsilon_k - \eta_k)\,(-2)^k = (-2)^m \times (\text{entier impair}) \neq 0}$$

Si p avait deux écritures distinctes, on les compléterait par des chiffres nuls à gauche pour qu'elles aient la même longueur $N+1$; la différence des deux sommes serait nulle, ce qui contredit ce qui précède. L'écriture en base -2, si elle existe, est donc unique.

3. Comme p et ε ont même parité, $\varepsilon - p$ est pair et p' est un entier ; de plus, $\varepsilon - 2p' = p$. Par l'inégalité triangulaire,

$$|p'| \leqslant \frac{|\varepsilon| + |p|}{2} \leqslant \frac{1 + |p|}{2},$$

qui est strictement inférieur à $|p|$ dès que $|p| > 1$.

Montrons par récurrence forte sur $m \geqslant 1$ que tout entier p tel que $|p| \leqslant m$ admet une écriture en base -2. Pour $m = 1$, on a $0 = (0)_{-2}$, $1 = (1)_{-2}$ et $-1 = (11)_{-2}$. Supposons le résultat vrai jusqu'au rang m, et soit p tel que $|p| = m + 1 \geqslant 2$. Alors $|p'| \leqslant m$, et p' admet une écriture $(\varepsilon'_0, \dots, \varepsilon'_N)$. La translation d'indice $j = k + 1$ donne

$$p = \varepsilon + (-2) \sum_{k=0}^{N} \varepsilon'_k\,(-2)^k = \varepsilon + \sum_{j=1}^{N+1} \varepsilon'_{j-1}\,(-2)^j,$$

de sorte que $(\varepsilon, \varepsilon'_0, \dots, \varepsilon'_N)$ est une écriture de p.

$$\boxed{\text{tout entier relatif admet une unique écriture en base } -2}$$

Pour $p = 6$, on calcule successivement les couples (p, ε) suivants :

$$(6,0), \quad (-3,1), \quad (2,0), \quad (-1,1), \quad (1,1), \quad \text{puis } p' = 0.$$

Les chiffres ε obtenus, lus de droite à gauche, redonnent $6 = (11010)_{-2}$. ✓

Piège : l'inégalité $|p'| < |p|$ est fausse pour $p = -1$, qui donne $p' = 1$. C'est pourquoi l'initialisation doit traiter -1 en plus de 0 et 1 : une récurrence initialisée au seul entier 0 ne démontrerait rien.

4. (a) Les termes $(-2)^k$ d'indice pair valent $4^{k/2} > 0$, et ceux d'indice impair $k = 2j+1$ valent $-2 \times 4^j < 0$. La somme est donc maximale lorsque l'on garde tous les termes d'indice pair et aucun terme d'indice impair, et minimale dans le cas contraire. Avec $N = 2M + 1$, les indices pairs sont les $2j$ et les indices impairs les $2j + 1$, pour $j \in [\![0\,;M]\!]$; on obtient deux sommes géométriques de raison 4.

$$\boxed{\max = \sum_{j=0}^{M} 4^j = \frac{4^{M+1} - 1}{3} = a_M, \qquad \min = -2 \sum_{j=0}^{M} 4^j = -2a_M}$$

4. (b) L'application qui associe à $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_N) \in \{0,1\}^{N+1}$ la somme $\sum_{k=0}^{N} \varepsilon_k (-2)^k$ est injective d'après la question 2, et elle est à valeurs dans $[\![-2a_M\,;a_M]\!]$ d'après la question 4(a). Or l'ensemble de départ a $2^{N+1} = 4^{M+1}$ éléments, d'après le lemme 6 du chapitre 2 sur les produits cartésiens, appliqué de proche en proche, et l'ensemble d'arrivée en a

$$a_M + 2a_M + 1 = 3a_M + 1 = 4^{M+1}.$$

D'après le théorème 2 du chapitre 2, une injection entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective : tout entier de $[\![-2a_M\,;a_M]\!]$ admet une écriture à $2M+2$ chiffres.

Pour conclure, la formule du binôme donne $4^{M+1} = (1+3)^{M+1} \geqslant 1 + 3(M+1)$, en ne gardant que les deux premiers termes, donc $a_M \geqslant M+1$. Pour $p \in \mathbb{Z}$, on choisit $M = |p|$: alors $-2a_M \leqslant -|p| \leqslant p \leqslant |p| \leqslant a_M$, et p admet une écriture en base -2.

$$\boxed{\text{les écritures à } 2M+2 \text{ chiffres décrivent exactement } [\![-2a_M\,;a_M]\!]}$$

Pour $M=1$, les seize écritures à quatre chiffres décrivent ainsi les seize entiers de $[\![-10\,;5]\!]$.

À retenir : l'algorithme de la question 3 est une division par -2 avec un reste égal à 0 ou à 1, comme l'écriture en base 2 procède par divisions successives par 2. Mais là où la base 2 ne décrit que les entiers naturels, comme à l'exercice 49, et demande un signe pour les autres, la base -2 décrit tous les entiers relatifs. La question 4 montre une idée qui resservira souvent : pour une application entre deux ensembles finis de même cardinal, l'unicité entraîne l'existence.

EXERCICE 49 ⋆⋆⋆⋆

On note $W_k = w_0 + \cdots + w_k$.

1. (a) L'entier 1 est atteint : $1 = \psi(A)$ avec $A \neq \varnothing$. Les w_n étant des entiers au moins égaux à 1, la partie A est un singleton $\{a\}$ avec $w_a = 1$, et $1 \leqslant w_0 \leqslant w_a = 1$. Ensuite, soit $k \in \mathbb{N}$, et A telle que $\psi(A) = W_k + 1$. Si l'on avait $w_{k+1} > W_k + 1$, tous les w_j d'indice $j \geqslant k+1$ dépasseraient $W_k + 1$, donc A serait contenue dans $[\![0\,;k]\!]$ et $\psi(A) \leqslant W_k$: c'est absurde.

$$\boxed{w_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad w_{k+1} \leqslant W_k + 1}$$

1. (b) Montrons par récurrence sur k que tout entier de $[\![0\,;W_k]\!]$ est l'image d'une partie de $[\![0\,;k]\!]$. Pour $k=0$, $0 = \psi(\varnothing)$ et $1 = \psi(\{0\})$. Supposons le résultat vrai au rang k, et soit $N \in [\![W_k+1\,;W_{k+1}]\!]$. Alors $N - w_{k+1} \in [\![W_k + 1 - w_{k+1}\,;W_k]\!]$, et $W_k + 1 - w_{k+1} \geqslant 0$ d'après $(*)$: il existe $A \subset [\![0\,;k]\!]$ telle que $\psi(A) = N - w_{k+1}$, et $N = \psi(A \cup \{k+1\})$. Comme $W_k \geqslant k+1$ tend vers l'infini, tout entier est atteint.

$$\boxed{(*) \iff \psi \text{ surjective}}$$

2. Supposons $w_n = 2^n$. Alors $W_k = 2^{k+1} - 1$, et $(*)$ est vérifiée. Si $A \neq B$ avaient la même image, on retirerait leurs éléments communs, ce qui ne change pas l'égalité, et l'on noterait m le plus grand élément de $A \Delta B$, disons dans A. Alors $\psi(A) \geqslant 2^m$, tandis que $\psi(B) \leqslant 2^0 + \cdots + 2^{m-1} = 2^m - 1$: c'est absurde.

Réciproquement, supposons ψ bijective, et montrons $w_k = 2^k$ par récurrence. On sait que $w_0 = 1$. Si $w_j = 2^j$ pour $j \leqslant k$, alors $W_k = 2^{k+1} - 1$. Si l'on avait $w_{k+1} \leqslant W_k$, la question 1(b) fournirait $A \subset [\![0\,;k]\!]$ telle que $\psi(A) = w_{k+1} = \psi(\{k+1\})$, avec $A \neq \{k+1\}$, ce qui contredit l'injectivité. Donc $w_{k+1} \geqslant W_k + 1$, et $(*)$ donne l'égalité $w_{k+1} = 2^{k+1}$.

$$\boxed{\psi \text{ bijective} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ w_n = 2^n}$$

3. Pour $w_n = 2^n$, la bijection ψ traduit l'existence et l'unicité de l'écriture d'un entier en base 2 : la partie A est l'ensemble des rangs des chiffres égaux à 1. Par exemple, $13 = 2^0 + 2^2 + 2^3$ correspond à $A = \{0,2,3\}$, et s'écrit 1101 en base 2.

La suite $w_n = n+1$ vérifie $(*)$, puisque $n + 2 \leqslant \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1$, donc ψ est surjective. Elle n'est pas injective, puisque $3 = w_2 = w_0 + w_1$.

$$\boxed{w_n = n+1 : \ \psi \text{ surjective, non injective}}$$

À retenir : l'écriture binaire n'est pas un simple choix de notation : c'est la seule façon d'écrire tout entier, de manière unique, comme somme de termes distincts d'une suite croissante d'entiers.