# EXERCICES – CHAPITRE 3

## CALCUL ALGÉBRIQUE

⋆ *application directe* ⋆⋆ *mise en œuvre* ⋆⋆⋆ *problème* ⋆⋆⋆⋆ *problème long, en autonomie*

### Manipulation des symboles somme et produit

#### EXERCICE 1 ⋆

Écrire chacune des expressions suivantes à l'aide du symbole $\sum$, et préciser son nombre de termes.

(a) $2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{12}$

(b) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{4} + \dfrac{3}{8} + \cdots + \dfrac{10}{1024}$

(c) $2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + 50$

(d) $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n}$

(e) $n + (n+1) + (n+2) + \cdots + 2n$

(f) $\dfrac{x_1}{x_n} + \dfrac{x_2}{x_{n-1}} + \cdots + \dfrac{x_n}{x_1}$

#### EXERCICE 2 ⋆

On considère deux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(S_n)_{n\geqslant 0}$ reliées par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

1. Exprimer $a_n$ à l'aide des termes de la suite $(S_n)$, en distinguant le cas $n = 0$.
2. Exprimer à l'aide des termes de la suite $(S_n)$ les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k, \qquad \sum_{k=n+1}^{2n} a_k, \qquad \sum_{k=0}^{n} 2a_k, \qquad \sum_{k=0}^{n} (a_k - 1), \qquad \sum_{k=0}^{n} (a_k - k).$$

#### EXERCICE 3 ⋆

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes.

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k$

(b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} k$

(c) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} 2k$

(d) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} 2^k$

(e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k$

(f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}$

(g) $\displaystyle\sum_{k=-5}^{15} k\,(10-k)$

(h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (n-k+1)$

## EXERCICE 4 ⋆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une expression simple des produits suivants, à l'aide de puissances et de factorielles.

(a) $\displaystyle\prod_{k=-1000}^{1000} (n^2 - n)$

(b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k)$

(c) $\displaystyle\prod_{k=n+1}^{2n} k^2$

(d) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k+1)$

(e) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-k}$

(f) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} 2^k$

(g) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$

(h) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k}$

(i) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (4k^2 - 1)$

(j) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k\,(n+1-k)$

## EXERCICE 5 ⋆⋆

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Démontrer les égalités suivantes à l'aide d'un changement d'indice bien choisi.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}\right) = 0.$
2. $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n-1} \ln\left(\sin\frac{k\pi}{2n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\sin\frac{k\pi}{2n}\right).$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n-k+1} = (n+1)\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - (n+1).$

## EXERCICE 6 ⋆⋆

Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

1. Écrire $u_1$, $u_2$ et $u_3$ sous forme de fractions irréductibles.
2. Exprimer $u_{n+1} - u_n$ sous la forme d'une seule fraction. L'erreur la plus répandue consiste à croire que $u_{n+1} - u_n$ ne comporte qu'un terme : combien de termes de $u_n$ disparaissent-ils, et combien de termes nouveaux apparaissent-ils ?
3. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

## EXERCICE 7 ⋆⋆

Soit $n \geqslant 1$ et $x_1, \ldots, x_n$ des réels.

1. Pour quelle valeur du réel $\xi$ a-t-on $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x_k - \xi) = 0$ ? Interpréter.
2. On suppose que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = n$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = n$. Développer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x_k - 1)^2$, et en déduire que tous les $x_k$ sont égaux à 1.

### EXERCICE 8 ⋆⋆⋆

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite croissante de réels strictement positifs, et $n \geqslant 1$. On veut montrer que

$$\forall k \in [\![1\,;n]\!], \quad (u_1u_2\cdots u_k)^n \leqslant (u_1u_2\cdots u_n)^k.$$

1. Interpréter cette inégalité à l'aide des moyennes géométriques $g_k = (u_1\cdots u_k)^{1/k}$.
2. Pour $k \in [\![1\,;n]\!]$, comparer $(u_1\cdots u_k)^{n-k}$ et $(u_{k+1}\cdots u_n)^k$, en minorant chaque facteur du second produit par $u_k$.
3. Conclure.

## Sommes usuelles et sommes télescopiques

### EXERCICE 9 ⋆

1. Calculer $S = \dfrac{1}{2^{10}} + \dfrac{1}{2^{20}} + \dfrac{1}{2^{30}} + \cdots + \dfrac{1}{2^{1000}}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k-1}}{3^{k+1}}$.
2. On pose $u_k = (-2)^k$. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{2n} u_k, \qquad \sum_{k=0}^{2n+1} u_k, \qquad \sum_{k=0}^{n} u_{2k}, \qquad \sum_{k=0}^{2n} (u_k + n), \qquad \Big(\sum_{k=0}^{2n} u_k\Big) + n, \qquad \sum_{k=0}^{n} u_{k+n}.$$

### EXERCICE 10 ⋆

Soit $n \geqslant 2$ un entier.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \ln\Big(1 + \frac{1}{p}\Big)$ et $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$.
2. Déterminer deux réels $a$ et $b$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{(k+1)(k+3)} = \dfrac{a}{k+1} + \dfrac{b}{k+3}$, puis calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)}$.
3. Déterminer trois réels $a$, $b$, $c$ tels que, pour tout $k \geqslant 1$, $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}$, puis calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

### EXERCICE 11 ⋆⋆

1. Soit $n \geqslant 1$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$ en regroupant les termes deux par deux.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1) - 1}{4}$, et vérifier la cohérence avec la question 1.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=n}^{3n} \min(k, 2n)$, en découpant la somme en deux.

## EXERCICE 12 ⋆⋆

1. En calculant de deux façons la somme télescopique $\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^4-k^4\right)$, et en utilisant les sommes usuelles du cours, obtenir une expression de $\sum_{k=0}^{n} k^3$. Comparer avec le carré de $\sum_{k=0}^{n} k$.
2. On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $f(n)=\dfrac{n^5}{5}+\dfrac{n^4}{2}+\dfrac{n^3}{3}-\dfrac{n}{30}$. Montrer que $f(n)-f(n-1)=n^4$ pour tout $n\geqslant 1$, et en déduire que $f(n)$ est un entier pour tout $n\in\mathbb{N}$.

## EXERCICE 13 ⋆⋆

1. Déterminer deux réels $a$ et $b$ tels que la suite $u_k=(ak+b)\,2^k$ vérifie $u_{k+1}-u_k=(k+2)\,2^k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. En déduire $\sum_{k=0}^{n}(k+2)\,2^k$.
2. Par la même méthode, en cherchant $u_k=(ak^2+bk+c)\,2^k$, calculer $\sum_{k=0}^{n} k^2\,2^k$.

## EXERCICE 14 ⋆⋆⋆

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $q\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Le but est de calculer de trois façons la somme

$$S_n=\sum_{k=0}^{n} k\,q^k.$$

1. Exprimer $S_{n+1}$ en fonction de $S_n$ de deux façons différentes, l'une en isolant le dernier terme, l'autre par la translation d'indice $k\mapsto k+1$. En déduire $S_n$.
2. Calculer $(q-1)\,S_n$ en faisant apparaître une somme géométrique, et retrouver $S_n$.
3. On considère la fonction $\sigma:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\sum_{k=0}^{n} x^k$. Calculer sa dérivée de deux façons, et retrouver $S_n$.

## EXERCICE 15 ⋆⋆

1. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout réel $a>1$, $\dfrac{a^n-1}{a-1}\leqslant n\,a^{n-1}$. On pourra utiliser la factorisation de $a^n-1$.
2. Montrer que, pour tout $n\geqslant 1$, $\sum_{k=1}^{n} k!\leqslant(n+1)!$, puis que $\sum_{k=1}^{n} k!\leqslant 2\cdot n!$ pour tout $n\geqslant 1$.

## EXERCICE 16 ⋆⋆⋆

*Transformation d'Abel.* Soit $(a_k)_{k\geqslant 0}$ et $(B_k)_{k\geqslant 0}$ deux suites de réels. On pose $A_n=\sum_{k=0}^{n} a_k$ et $b_k=B_{k+1}-B_k$.

1. Montrer que, pour tout $n\geqslant 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k B_k=A_nB_n-\sum_{k=0}^{n-1} A_k\,b_k.$$

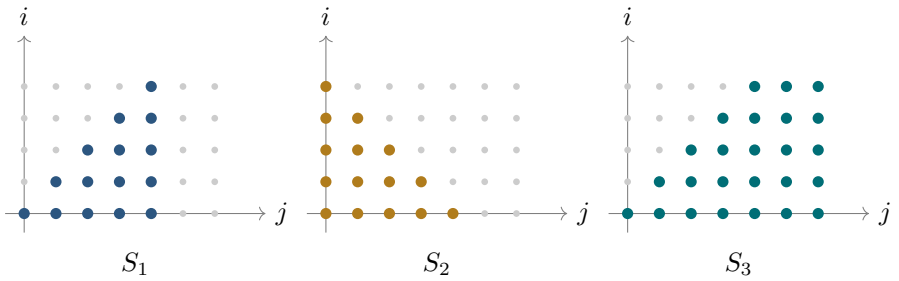
*On remarquera l'analogie avec la formule d'intégration par parties.*

2. On note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour $n \geqslant 1$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)\,H_n - n$.

3. Montrer de même que $\sum_{k=1}^{n} k\,H_k = \frac{n(n+1)}{2}\,H_n - \frac{n(n-1)}{4}$.

## Sommes doubles

### EXERCICE 17 ⋆




Les figures représentent, pour $n = 4$ et $m = 6$, les ensembles d'indices $(i, j)$ des trois sommes suivantes, que l'on demande d'écrire en sommant d'abord sur $i$ :

$$S_1 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}, \qquad S_2 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} a_{i,j}, \qquad S_3 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{m} a_{i,j} \quad (n \leqslant m).$$

### EXERCICE 18 ⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes, où $i$ et $j$ sont des entiers.

(a) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 1$

(b) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i$

(c) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i$

(d) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (i+j)$

(e) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j)^2$

(f) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |j-i|$

(g) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i^2}{j}$

(h) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \max(i,j)$

(i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min(i,j)$

(j) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} 3^{i+j}$

### EXERCICE 19 ⋆

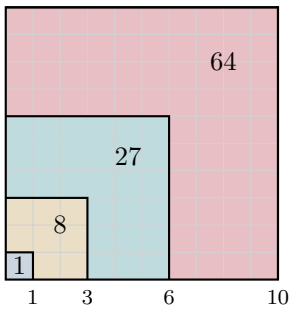
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x$ un réel strictement positif. Simplifier les produits suivants.

$$\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} x^{i+j}, \qquad \prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} i^{\,j}, \qquad \prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij.$$

## EXERCICE 20 ⋆⋆

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij$, avec $S_0 = 0$.

1. Exprimer $S_n$ en fonction de $\sum_{k=1}^{n} k$.
2. Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1\,;n+1]\!]^2}$ une famille de réels. Montrer que
$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1} a_{i,j} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} + \sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1} + \sum_{j=1}^{n} a_{n+1,j} + a_{n+1,n+1}.$$
3. En déduire que $S_{n+1} - S_n = (n+1)^3$, puis que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n} k\Big)^2$.




La figure illustre le résultat pour $n = 4$ : le carré de côté $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ est découpé en équerres d'aires $1^3$, $2^3$, $3^3$ et $4^3$.

## EXERCICE 21 ⋆⋆

Soit $n \geqslant 1$ et $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. Montrer que
$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j}\Big) \geqslant n^2.$$

*On écrira le produit comme une somme double, et l'on regroupera les termes d'indices $(i,j)$ et $(j,i)$.* Étudier le cas d'égalité.

## EXERCICE 22 ⋆⋆⋆

*Inégalité de Tchebychev.* Soit $n \geqslant 1$, et $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$, $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$ deux familles croissantes de réels. Montrer que
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geqslant \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} b_j\Big).$$

*On pourra étudier le signe de la somme double* $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)$. Que devient l'inégalité si l'une des familles est croissante et l'autre décroissante ?

### EXERCICE 23 ⋆⋆⋆

Pour $n, p \in \mathbb{N}$, on note $S_n^{(p)} = \sum_{i=0}^{n} i^p$, avec la convention $0^0 = 1$.

1. Soit $n, p \in \mathbb{N}$. En calculant de deux façons la somme $\sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} i^p$, démontrer la formule d'al-Haytham :
$$n\, S_n^{(p)} - S_n^{(p+1)} = \sum_{k=0}^{n-1} S_k^{(p)}.$$
2. Retrouver la valeur de $S_n^{(2)}$ à partir de celle de $S_n^{(1)}$.
3. En déduire une expression de $S_n^{(4)}$, et comparer avec l'exercice 12.

### EXERCICE 24 ⋆⋆⋆

Soit $n \geqslant 1$. Calculer
$$\sum_{(i,j,k) \in [\![1\,;n]\!]^3} \min\left(i, \max(j,k)\right).$$

*On pourra commencer par dénombrer, pour tout entier $m$ compris entre 1 et $n$, les couples $(j,k)$ de $[\![1\,;n]\!]^2$ tels que $\max(j,k) = m$.*

## Coefficients binomiaux et formule du binôme

### EXERCICE 25 ⋆

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier $(n+1)! - n!$, $\dfrac{(n+3)!}{(n+1)!}$ et $\dfrac{n+2}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!}$.
2. Soit $a$ et $b$ deux réels non nuls, et $u_n = \dfrac{a^n}{n!\, b^{2n}}$. Simplifier $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
3. Développer $(x+1)^6$ et $(x-1)^6$. En déduire, sans calcul supplémentaire, l'expression développée de $(x+1)^6 + (x-1)^6$.

### EXERCICE 26 ⋆

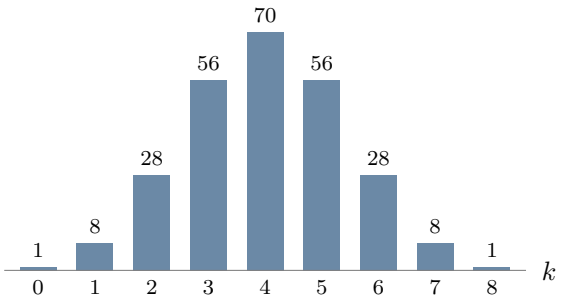
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes à l'aide de la formule du binôme.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} \binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n} 2^{2k} \binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k\, 2^{k-1}.$$

### EXERCICE 27 ⋆⋆

Soit $n \geqslant 2$. En utilisant la formule du pion $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, calculer
$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$$

## EXERCICE 28 ⋆⋆




La figure représente les coefficients $\binom{8}{k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant 8$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$, calculer le quotient $\binom{n}{k+1} \Big/ \binom{n}{k}$, et en déduire les variations de la famille $\left(\binom{n}{k}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$. Pour quelles valeurs de $k$ le coefficient est-il maximal ?
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{2n}{n} \geqslant \dfrac{4^n}{2n+1}$.

## EXERCICE 29 ⋆⋆

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{x}{k}\right)$.

1. Calculer $P_n(0)$, $P_n(1)$ et $P_n(-n)$.
2. Montrer que, pour tout réel $x$, $x\,P_n(x) = (x+n)\,P_n(x-1)$.
3. Pour $p \in \mathbb{N}$, exprimer $P_n(p)$ à l'aide d'un coefficient binomial.

## EXERCICE 30 ⋆⋆

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ est un entier naturel pair. En déduire que l'entier qui suit $(3+\sqrt{5})^n$ est pair.

## EXERCICE 31 ⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![0\,;n]\!]$.

1. Montrer que, pour tout $k \in [\![0\,;p]\!]$, $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p}\binom{p}{k}$. Interpréter ce résultat en dénombrant de deux façons les couples $(A,B)$ de parties d'un ensemble à $n$ éléments telles que $A \subset B$, $A$ ait $k$ éléments et $B$ en ait $p$.
2. En déduire $\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}$, et, pour $p \geqslant 1$, $\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 0$.

## EXERCICE 32 ⋆⋆

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $2\binom{2p+1}{p} = \binom{2p+2}{p+1}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} \dfrac{1}{2^k}$. Calculer $S_0$, $S_1$, $S_2$, puis montrer que $S_{n+1} = 2S_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, à l'aide de la formule de Pascal. En déduire $S_n$.

## EXERCICE 33 ⋆⋆

On note $(F_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de Fibonacci, définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} = F_{n+1}.$$

Interpréter le résultat sur le triangle de Pascal.

## EXERCICE 34 ⋆⋆⋆

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n-k}{k}$.

1. Calculer $S_0$, …, $S_7$, et formuler une conjecture.
2. Montrer que $S_{n+2} = S_{n+1} - S_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que $S_{n+3} = -S_n$.
3. Démontrer la conjecture.

## EXERCICE 35 ⋆⋆⋆

On utilise la formule de la crosse de hockey : pour tous entiers $0 \leqslant p \leqslant n$, $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

1. Calculer $1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \cdots + n(n+1)(n+2)$.
2. Écrire $k^3$ comme combinaison de $\binom{k}{3}$, $\binom{k}{2}$ et $\binom{k}{1}$, et retrouver la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k^3$.
3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \prod_{p=1}^{m} (k+p)$.

## EXERCICE 36 ⋆⋆⋆

*Formule de Vandermonde.* Soit $a$, $b$, $q$ trois entiers naturels. On considère deux ensembles disjoints $A$ et $B$, à $a$ et $b$ éléments.

1. Pour $k \in [\![0\,;q]\!]$, combien y a-t-il de parties $X$ de $A \cup B$ à $q$ éléments telles que $X \cap A$ ait $k$ éléments ? On justifiera la réponse à l'aide des lemmes du cours sur les ensembles finis.
2. En déduire la formule de Vandermonde :
$$\sum_{k=0}^{q} \binom{a}{k}\binom{b}{q-k} = \binom{a+b}{q}.$$
3. En déduire $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ pour $n \in \mathbb{N}$.

## EXERCICE 37 ⋆⋆

1. En écrivant $(a+b+c)^7 = \big((a+b)+c\big)^7$ et en appliquant deux fois la formule du binôme, déterminer le coefficient de $a^2b^4c$ dans le développement de $(a+b+c)^7$.
2. Plus généralement, soit $n \in \mathbb{N}$ et $p$, $q$, $r$ trois entiers naturels de somme $n$. Montrer que le coefficient de $x^p y^q z^r$ dans le développement de $(x+y+z)^n$ est $\dfrac{n!}{p!\,q!\,r!}$.

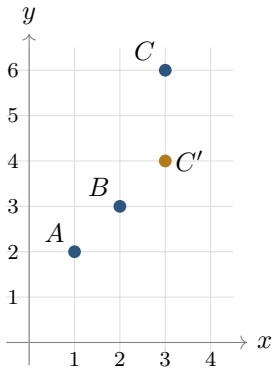
## EXERCICE 38 ⋆

Résoudre les systèmes suivants par la méthode du pivot, en indiquant à chaque étape les opérations effectuées.

(a) $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + 3y = 3 \\ y - z = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + t = 1 \\ x + y + z = 0 \\ y - t = 1 \\ z + t = -1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + y + 3z + t = 3 \\ x + 3z - t = 2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y - 2z = 2 \\ 5x - y = 4 \end{cases}$

## EXERCICE 39 ⋆




1. Déterminer les réels $a$, $b$, $c$ tels que la courbe d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points $A(1, 2)$, $B(2, 3)$ et $C(3, 6)$ de la figure.
2. Même question avec les points $A$, $B$ et $C'(3, 4)$. Interpréter le résultat obtenu.

## EXERCICE 40 ⋆⋆

Soit $m$ un réel. Résoudre, selon les valeurs de $m$, le système

$$\begin{cases} mx + y - z = 0 \\ y + 3z = m \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

*On choisira avec soin le premier pivot, pour ne pas avoir à diviser par une quantité qui peut s'annuler.*

## EXERCICE 41 ⋆⋆

Soit $m$ un réel. On considère les trois plans de l'espace

$\mathcal{P}_1 : mx + 2y + 3z = 3$, $\mathcal{P}_2 : (m-1)x + my + z = 1$, $\mathcal{P}_3 : (m+1)x + my + (m-1)z = m - 1$.

1. Vérifier que le point $(0, 0, 1)$ appartient aux trois plans, quelle que soit la valeur de $m$.
2. Montrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont jamais parallèles, et déterminer leur intersection lorsque $m = 0$.
3. Déterminer, selon les valeurs de $m$, l'intersection des trois plans.

### EXERCICE 42 ⋆⋆⋆

Soit $n \geqslant 2$ un entier et $a$, $b$ deux réels. On cherche les $n$-uplets $(x_1, \dots, x_n)$ de réels tels que

$$ax_1 + b = x_2, \quad ax_2 + b = x_3, \quad \dots, \quad ax_{n-1} + b = x_n, \quad ax_n + b = x_1.$$

1. Montrer que, pour une solution, $x_k = a^{k-1}x_1 + b\sum_{j=0}^{k-2} a^j$ pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$.
2. En déduire que le système équivaut à une seule équation en $x_1$, que l'on écrira à l'aide de la factorisation de $1 - a^n$.
3. Résoudre le système dans chacun des cas suivants : $a^n \neq 1$ ; $a = 1$ ; $a = -1$ et $n$ pair.

## Exercices de synthèse

### EXERCICE 43 ⋆⋆

**Vrai ou faux.** Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Les entiers $n$ sont supposés non nuls.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} 2 = 2n$.
2. Pour tous réels $a_1$, …, $a_n$, $\prod_{k=1}^{n}(3a_k) = 3^n \prod_{k=1}^{n} a_k$.
3. Pour tous réels $a_1$, …, $a_n$, $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$.
4. Pour toute suite $(u_k)$, $\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_1$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n$.
6. Pour tout $n \geqslant 1$, le coefficient $\binom{2n}{n}$ est pair.
7. Pour tout $n \geqslant 1$, le nombre de couples $(i, j)$ d'entiers tels que $1 \leqslant i < j \leqslant n$ est $\dfrac{n(n-1)}{2}$.
8. Pour toute famille de réels, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$.
9. L'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$, suivie de l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, transforme un système en un système équivalent.
10. Un système de trois équations linéaires à deux inconnues n'a jamais de solution.

### EXERCICE 44 ⋆⋆

*Deux équilibres.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $\alpha$, $\beta$ deux réels. On cherche les familles $(x_0, x_1, \dots, x_{n+1})$ de réels telles que $x_0 = \alpha$ et $x_{n+1} = \beta$, et qui vérifient l'une des deux conditions suivantes.

(V) Pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, le réel $x_k$ est la moyenne de ses deux voisins $x_{k-1}$ et $x_{k+1}$.

(T) Pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, le réel $x_k$ est la moyenne des $n+1$ réels $x_j$, pour $j \in [\![0\,;n+1]\!]$ et $j \neq k$.

On peut penser aux températures de $n+2$ points régulièrement espacés le long d'une barre, dont les extrémités sont maintenues aux températures $\alpha$ et $\beta$.

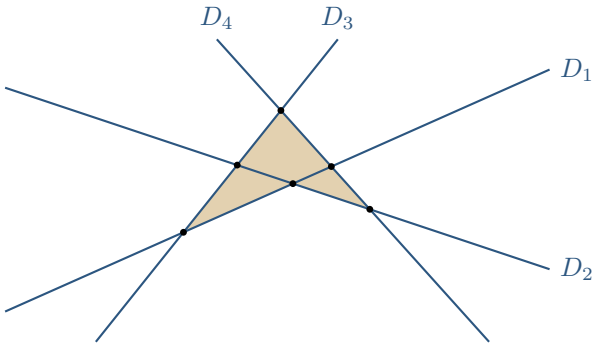
1. Dans cette question, $n = 3$, $\alpha = 0$ et $\beta = 4$. Écrire chacune des deux conditions sous la forme d'un système linéaire de trois équations d'inconnues $x_1$, $x_2$, $x_3$, et le résoudre par la méthode du pivot.

2. On revient au cas général, et l'on suppose la condition (V) vérifiée. Montrer que la différence $x_{k+1} - x_k$ ne dépend pas de $k \in [\![0\,;n]\!]$, et en déduire que la condition (V) est vérifiée par une unique famille, que l'on explicitera.

3. On suppose la condition (T) vérifiée, et l'on note $S = \sum_{j=0}^{n+1} x_j$. Montrer que $(n+2)\,x_k = S$ pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, et en déduire que la condition (T) est vérifiée par une unique famille, que l'on explicitera. Comparer les deux profils de température obtenus.

## EXERCICE 45 ⋆⋆

On dit que des droites du plan sont *en position générale* si deux d'entre elles ne sont jamais parallèles et si trois d'entre elles ne sont jamais concourantes. La figure montre quatre droites en position générale, qui délimitent onze régions du plan, dont trois sont bornées. On admettra les faits géométriques écrits en italique.




Les six points d'intersection sont marqués, et les trois régions bornées sont colorées.

1. *Si l'on ajoute une droite $D$ à $n$ droites en position générale, les $n+1$ droites restant en position générale, alors $D$ est coupée par les $n$ autres en $n$ points distincts, donc en $n+1$ morceaux, et chacun de ces morceaux partage en deux une région existante, deux morceaux distincts traversant deux régions distinctes.* Montrer que $n$ droites en position générale délimitent toujours le même nombre $r_n$ de régions, où $r_0 = 1$ et $r_{n+1} = r_n + n + 1$. Calculer $r_n$, et l'écrire à l'aide de coefficients binomiaux.

2. Soit $n \geqslant 1$. *Un cercle assez grand contient tous les points d'intersection ; les $n$ droites le coupent en $2n$ points, qui le découpent en $2n$ arcs, et les régions non bornées correspondent bijectivement à ces arcs.* En déduire le nombre de régions bornées, et le vérifier sur la figure.

3. Dans l'espace, on dit que des plans sont en position générale si deux d'entre eux ne sont jamais parallèles, si trois d'entre eux ont toujours un unique point commun, et si quatre d'entre eux n'ont jamais de point commun. *Si l'on ajoute un plan $P$ à $n$ plans en position générale, les $n+1$ plans restant en position générale, alors les $n$ autres plans coupent $P$ selon $n$ droites en position générale, et chacune des régions qu'elles délimitent dans $P$ partage en deux une région de l'espace existante, deux régions distinctes de $P$ traversant deux régions distinctes.* Montrer que $n$ plans en position générale délimitent

$$p_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$$

régions de l'espace, à l'aide de la formule de la crosse de hockey. Comparer $p_n$ et $2^n$ pour $0 \leqslant n \leqslant 4$.

## EXERCICE 46 ⋆⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On note $E_{n,p}$ l'ensemble des $p$-uplets $(x_1, \dots, x_p)$ d'entiers naturels tels que

$$x_1 + \cdots + x_p = n.$$

1. Déterminer $E_{n,1}$, $E_{n,2}$, et dénombrer $E_{2,3}$ en écrivant tous ses éléments.
2. À un élément $(x_1, \dots, x_p)$ de $E_{n,p}$, on associe la partie de $[\![1\,;n+p-1]\!]$

$$\{x_1 + 1,\ x_1 + x_2 + 2,\ \dots,\ x_1 + \cdots + x_{p-1} + (p-1)\}.$$

   Montrer que l'on définit ainsi une bijection de $E_{n,p}$ sur l'ensemble des parties à $p-1$ éléments de $[\![1\,;n+p-1]\!]$. En déduire le cardinal de $E_{n,p}$.
3. Combien y a-t-il de $p$-uplets d'entiers *strictement positifs* de somme $n$ ?
4. De combien de façons peut-on répartir 10 bonbons identiques entre 4 enfants ? et si chaque enfant doit en recevoir au moins un ?

## EXERCICE 47 ⋆⋆⋆

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Démontrer, sans raisonner par récurrence, que

$$\sum_{n=0}^{m} \sum_{q=0}^{n} \sum_{p=0}^{q} \binom{n}{p} \binom{n-p}{n-q} = \frac{3^{m+1}-1}{2}.$$

*On pourra commencer par intervertir les deux sommes intérieures, puis reconnaître une formule du binôme.*

## EXERCICE 48 ⋆⋆⋆

*Numération en base* $-2$. Soit $p \in \mathbb{Z}$. On appelle *écriture de* $p$ *en base* $-2$ toute famille finie $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_N)$ d'éléments de $\{0,1\}$ telle que

$$p = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon_k \, (-2)^k,$$

et l'on note alors $p = (\varepsilon_N \cdots \varepsilon_1 \varepsilon_0)_{-2}$. Ajouter des chiffres nuls à gauche ne change pas la somme : on considère que l'on obtient la même écriture. On veut montrer que tout entier relatif, positif ou négatif, admet une unique écriture en base $-2$, sans qu'aucun signe soit nécessaire.

1. Vérifier que $6 = (11010)_{-2}$ et $-5 = (1111)_{-2}$, puis écrire $-1$, $2$ et $3$ en base $-2$.
2. Soit $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_N)$ et $(\eta_0, \dots, \eta_N)$ deux familles distinctes d'éléments de $\{0,1\}$, et $m$ le plus petit indice tel que $\varepsilon_m \neq \eta_m$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{N} (\varepsilon_k - \eta_k) \, (-2)^k$$

   est le produit de $(-2)^m$ par un entier impair. En déduire l'unicité de l'écriture en base $-2$.
3. Soit $p \in \mathbb{Z}$. On note $\varepsilon \in \{0,1\}$ l'entier de même parité que $p$, et $p' = \dfrac{\varepsilon - p}{2}$. Vérifier que $p'$ est un entier, que $p = \varepsilon + (-2)\,p'$, et que $|p'| < |p|$ dès que $|p| \geqslant 2$. En déduire, par récurrence forte sur $|p|$, que tout entier relatif admet une écriture en base $-2$, et retrouver ainsi l'écriture de 6.
4. On donne une seconde démonstration de l'existence. Soit $M \in \mathbb{N}$ et $N = 2M+1$.
   (a) Lorsque $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_N)$ décrit $\{0,1\}^{N+1}$, montrer que la plus grande valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \varepsilon_k \, (-2)^k$ est $a_M = \dfrac{4^{M+1}-1}{3}$, et que la plus petite est $-2a_M$.

(b) En déduire, à l'aide de la question 2 et d'un argument de cardinal, que tout entier de $[\![-2a_M\,;a_M]\!]$ admet une écriture en base $-2$ à $2M+2$ chiffres. Conclure, en minorant $a_M$ à l'aide de la formule du binôme.

## EXERCICE 49 ⋆⋆⋆⋆

Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers strictement positifs. On note $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$, et l'on considère l'application

$$\psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ A & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n\in A} w_n \end{array} \right.$$

qui associe à une partie finie $A$ la somme des termes de la suite dont l'indice appartient à $A$, avec $\psi(\varnothing) = 0$.

1. *Surjectivité.*

   (a) On suppose $\psi$ surjective. Montrer que

   $$(*) \qquad w_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N},\ w_{k+1} \leqslant w_0 + w_1 + \cdots + w_k + 1.$$

   (b) Réciproquement, on suppose les conditions $(*)$ vérifiées. Montrer par récurrence sur $k$ que tout entier de $[\![0\,;w_0 + \cdots + w_k]\!]$ est atteint par $\psi$, et conclure.

2. *Bijectivité.* On suppose les conditions $(*)$ vérifiées. Montrer que $\psi$ est bijective si et seulement si $w_n = 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Interpréter le cas $w_n = 2^n$ à l'aide de l'écriture des entiers en base 2, et donner un exemple de suite $(w_n)$, différente de $(2^n)$, pour laquelle $\psi$ est surjective sans être injective.