CORRIGÉ – CHAPITRE 4

NOMBRES COMPLEXES ET TRIGONOMÉTRIE

⋆ *application directe* ⋆⋆ *mise en œuvre* ⋆⋆⋆ *problème* ⋆⋆⋆⋆ *problème long, en autonomie*

Trigonométrie

EXERCICE 1 ⋆

1. On retire à chaque angle un multiple de la période, 2π pour le cosinus et le sinus, π pour la tangente. On a $\frac{538\pi}{3} = 178\pi + \frac{4\pi}{3}$, $\frac{123\pi}{6} = 20\pi + \frac{\pi}{2}$ et $-\frac{77\pi}{4} = -20\pi + \frac{3\pi}{4}$.

$$\boxed{\cos\frac{538\pi}{3} = \cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} \qquad \sin\frac{123\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \qquad \tan\left(-\frac{77\pi}{4}\right) = \tan\frac{3\pi}{4} = -1}$$

2. Les angles associés (proposition 1 du cours) donnent :

$$\boxed{\cos(x-\pi) = \frac{4}{5} \qquad \cos(-\pi - x) = \cos(\pi + x) = \frac{4}{5} \qquad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x = -\frac{4}{5}}$$

La relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donne $\sin^2 x = \frac{9}{25}$, donc $\sin x = \pm\frac{3}{5}$: le cosinus seul ne détermine pas le sinus, puisque x et $-x$ ont le même cosinus. Lorsque $\pi \leqslant x < 2\pi$, le point $M(x)$ est sur le demi-cercle inférieur, et $\sin x \leqslant 0$.

$$\boxed{\sin x = -\frac{3}{5} \qquad \text{et} \qquad \tan x = \frac{-3/5}{-4/5} = \frac{3}{4}}$$

EXERCICE 2 ⋆

On lit chaque équation sur le cercle, puis l'on applique la proposition 4 du cours ; pour (c), on n'oublie pas de diviser aussi la période par 3.

- **(a)** Les points d'ordonnée $\frac{1}{2}$ sont $M(\frac{\pi}{6})$ et $M(\frac{5\pi}{6})$: $\boxed{x \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]}$
- **(b)** La tangente est π-périodique et $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$: $\boxed{x \equiv \frac{\pi}{3}\ [\pi]}$
- **(c)** $3x \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, soit $\boxed{x \equiv \frac{\pi}{6}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right]}$, ce qui donne trois points sur le cercle, $M(\frac{\pi}{6})$, $M(\frac{5\pi}{6})$ et $M(\frac{3\pi}{2})$.
- **(d)** Un cosinus est compris entre -1 et 1 : $\boxed{\text{aucune solution}}$
- **(e)** Un seul point du cercle a ces coordonnées, $M(\frac{2\pi}{3})$: $\boxed{x \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]}$
- **(f)** $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, ce qui donne les quatre points $M(\pm\frac{\pi}{6})$ et $M(\pi \pm \frac{\pi}{6})$: $\boxed{x \equiv \frac{\pi}{6}\ [\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{6}\ [\pi]}$

Piège : en (e), chacune des deux équations a deux familles de solutions, mais une seule leur est commune ; c'est le point du cercle qui a ces deux coordonnées.

EXERCICE 3 ⋆⋆

(a) La proposition 4 donne $5x \equiv \frac{2\pi}{3} + x\ [2\pi]$ ou $5x \equiv \pi - \frac{2\pi}{3} - x\ [2\pi]$, c'est-à-dire $4x \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $6x \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

$$\boxed{x \equiv \frac{\pi}{6}\ \left[\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{ou} \quad x \equiv \frac{\pi}{18}\ \left[\frac{\pi}{3}\right]}$$

(b) On a $2x \equiv x + \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ ou $2x \equiv -x - \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

$$\boxed{x \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{12}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right]}$$

(c) On écrit $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$, d'où $3x \equiv \frac{\pi}{2} - x\ [2\pi]$ ou $3x \equiv x - \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

$$\boxed{x \equiv \frac{\pi}{8}\ \left[\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{4}\ [\pi]}$$

(d) L'équation n'a de sens que si $\cos x \neq 0$. Elle s'écrit alors $\sin x\,(\frac{1}{\cos x} - 2) = 0$, c'est-à-dire $\sin x = 0$ ou $\cos x = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{x \equiv 0\ [\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]}$$

Attention : on ne divise pas par $\sin x$, ce qui ferait perdre les solutions $x \equiv 0\ [\pi]$.

(e) On écrit $-\cos x = \cos(\pi - x)$, de sorte que l'équation devient $\cos(2x) = \cos(\pi - x)$, d'où $2x \equiv \pi - x\ [2\pi]$ ou $2x \equiv x - \pi\ [2\pi]$, soit $x \equiv \frac{\pi}{3}\ [\frac{2\pi}{3}]$ ou $x \equiv \pi\ [2\pi]$; la seconde famille est contenue dans la première, puisque $\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}$. On peut aussi factoriser $2\cos^2 x + \cos x - 1 = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$.

$$\boxed{x \equiv \frac{\pi}{3}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right], \quad \text{soit, dans } [0\,,2\pi[\text{:}\ \ \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5\pi}{3}}$$

(f) On factorise les deux membres par $\sin\frac{3x}{2}$, à l'aide d'une formule de factorisation et de la formule de duplication :

$$\cos x - \cos(2x) = 2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(3x) = 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}.$$

L'équation équivaut donc à $\sin\frac{3x}{2} = 0$ ou $\sin\frac{x}{2} = \cos\frac{3x}{2} = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{3x}{2})$. La première condition donne $x \equiv 0\ [\frac{2\pi}{3}]$; la seconde donne $\frac{x}{2} \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{3x}{2}\ [2\pi]$ ou $\frac{x}{2} \equiv \frac{\pi}{2} + \frac{3x}{2}\ [2\pi]$, c'est-à-dire $x \equiv \frac{\pi}{4}\ [\pi]$ ou $x \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

$$\boxed{\text{solutions dans } [0\,,2\pi[\text{:}\quad 0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{4\pi}{3},\ \frac{3\pi}{2}}$$

On vérifie par exemple en $\frac{3\pi}{2}$: $\cos\frac{3\pi}{2} - \cos(3\pi) = 0 + 1 = 1$ et $\sin\frac{9\pi}{2} = 1$ ✓.

EXERCICE 4 ⋆

1. L'expression a un sens pour $\sin x \neq 0$, c'est-à-dire $x \not\equiv 0\ [\pi]$; alors $\cos\frac{x}{2} \neq 0$. Avec les formules de duplication en $\frac{x}{2}$,

$$\frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \boxed{\tan\frac{x}{2}}.$$

2. L'égalité a un sens pour tout réel x. La formule $\sin(x-a)+\sin(x+a) = 2\sin x\cos a$, avec $a = \frac{2\pi}{3}$ et $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, donne $-\sin x$ pour la somme des termes extrêmes, d'où le résultat. Géométriquement, ce sont les ordonnées des sommets d'un triangle équilatéral centré en O, dont la somme est nulle.

3. Il faut que $\tan x$ et $\tan(2x)$ existent et soient non nuls, c'est-à-dire $x \not\equiv 0\ [\frac{\pi}{4}]$. Alors

$$\frac{1}{\tan x} - \tan x = \frac{1-\tan^2 x}{\tan x} = \frac{2}{\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}} = \boxed{\frac{2}{\tan(2x)}},$$

grâce à la formule de duplication de la tangente.

EXERCICE 5 ⋆⋆

1. Les formules d'addition donnent

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\qquad \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

2. La formule $\cos^2 a=\frac{1+\cos(2a)}{2}$ donne $\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$, et $\cos\frac{\pi}{12}>0$.

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$$

Les deux nombres sont positifs, et leurs carrés sont égaux, puisque $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{8+2\sqrt{12}}{16}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$: ils sont donc égaux. La première méthode est préférable, car elle donne directement une forme sans radicaux emboîtés, plus facile à manipuler ; la seconde exige un contrôle de signe et laisse une expression qu'il faut ensuite simplifier.

3. La formule $\tan\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$ de l'exercice 4, avec $x=\frac{\pi}{4}$, évite toute racine carrée emboîtée :

$$\tan\frac{\pi}{8}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\boxed{\sqrt{2}-1}.$$

EXERCICE 6 ⋆⋆

(a) Les points d'ordonnée au moins $\frac{1}{2}$ forment l'arc allant de $M(\frac{\pi}{6})$ à $M(\frac{5\pi}{6})$ par le haut.

$$\boxed{\left[\frac{\pi}{6}\,,\frac{5\pi}{6}\right]\text{ sur }[0\,,2\pi]\text{ comme sur }[-\pi\,,\pi],\qquad \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[\frac{\pi}{6}+2k\pi\,,\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right]\text{ sur }\mathbb{R}}$$

(b) On a $2\sin^2 x\leqslant 1\iff\cos(2x)\geqslant 0\iff 2x\in[-\frac{\pi}{2}+2k\pi\,,\frac{\pi}{2}+2k\pi]$ pour un $k\in\mathbb{Z}$.

$$\boxed{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{4}+k\pi\,,\frac{\pi}{4}+k\pi\right]}$$

(c) Comme $\cos(2x)=2\cos^2 x-1$, l'inéquation équivaut à $\cos^2 x\leqslant 1$, toujours vraie :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions est }\mathbb{R}}$$

(d) Le trinôme $2X^2-9X+4$ a pour racines $\frac{1}{2}$ et 4, et l'inéquation s'écrit $(2\cos x-1)(\cos x-4)\geqslant 0$. Le second facteur est toujours strictement négatif, donc l'inéquation équivaut à $\cos x\leqslant\frac{1}{2}$.

$$\boxed{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[\frac{\pi}{3}+2k\pi\,,\frac{5\pi}{3}+2k\pi\right]}$$

(e) L'inéquation a un sens pour $x\neq\pm\frac{\pi}{2}$, et elle s'écrit $\dfrac{\sin x\,(1-2\cos x)}{\cos x}\geqslant 0$. On dresse le tableau de signes sur $]-\pi\,,\pi]$.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0
$1-2\cos x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\cos x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
quotient		$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	0

$$\boxed{\left]-\pi\,,-\frac{\pi}{2}\right[\ \cup\ \left[-\frac{\pi}{3}\,,0\right]\ \cup\ \left[\frac{\pi}{3}\,,\frac{\pi}{2}\right[\ \cup\ \{\pi\}}$$

Piège : on ne multiplie pas les deux membres par $\cos x$, dont le signe varie ; c'est l'erreur la plus répandue sur ce type d'inéquation.

EXERCICE 7 ⋆⋆

1. Comme $\sqrt{3}-\mathrm{i}=2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$, la proposition 18 du cours donne $\sqrt{3}\cos x-\sin x=2\cos(x+\frac{\pi}{6})$, qui décrit exactement $[-2\,,2]$ lorsque x décrit $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{l'équation a des solutions si et seulement si } m\in[-2\,,2]}$$

Pour $m=\sqrt{2}$, l'équation s'écrit $\cos(x+\frac{\pi}{6})=\cos\frac{\pi}{4}$, d'où $x+\frac{\pi}{6}\equiv\pm\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

$$\boxed{x\equiv\frac{\pi}{12}\ [2\pi]\quad\text{ou}\quad x\equiv-\frac{5\pi}{12}\ [2\pi]}$$

2. L'équation s'écrit $\cos x-\sqrt{3}\sin x=1$, soit $2\cos(x+\frac{\pi}{3})=1$, puisque $1-\mathrm{i}\sqrt{3}=2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$. Alors $x+\frac{\pi}{3}\equiv\pm\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

$$\boxed{x\equiv0\ [2\pi]\quad\text{ou}\quad x\equiv-\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]}$$

EXERCICE 8 ⋆⋆

On pose $u=\cos x$ et $v=\sin y$, qui vérifient le système linéaire $2u+3v=\sqrt{2}-\frac{3}{2}$, $4u+v=2\sqrt{2}-\frac{1}{2}$. L'opération $L_1\leftarrow 3L_2-L_1$, puis la remontée, donnent

$$10u=6\sqrt{2}-\frac{3}{2}-\sqrt{2}+\frac{3}{2}=5\sqrt{2},\qquad u=\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad v=2\sqrt{2}-\frac{1}{2}-4u=-\frac{1}{2}.$$

Dans $[-\pi\,,\pi]$, $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ équivaut à $x=\pm\frac{\pi}{4}$, et $\sin y=-\frac{1}{2}$ à $y=-\frac{\pi}{6}$ ou $y=-\frac{5\pi}{6}$.

$$\boxed{(x,y)\in\left\{\left(\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{6}\right),\left(\frac{\pi}{4},-\frac{5\pi}{6}\right),\left(-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{6}\right),\left(-\frac{\pi}{4},-\frac{5\pi}{6}\right)\right\}}$$

À retenir : le système n'est pas linéaire en x et y, mais il l'est en $\cos x$ et $\sin y$; le changement d'inconnues ramène à la méthode du pivot du chapitre 3.

EXERCICE 9 ⋆⋆

1. Comme $2+\cos x\geqslant 1>0$, f est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est 2π-périodique, et impaire puisque sin est impaire et cos paire : sa courbe est symétrique par rapport à l'origine, et il suffit d'étudier f sur $[0\,,\pi]$, la périodicité permettant ensuite de reconstituer la courbe sur $\mathbb{R}$.

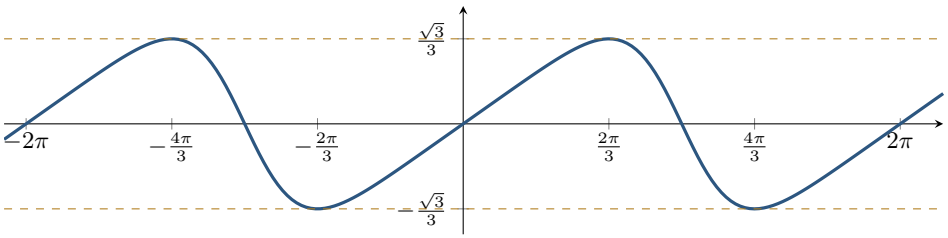
2. La formule de dérivation d'un quotient donne

$$f'(x)=\frac{\cos x\,(2+\cos x)+\sin^2 x}{(2+\cos x)^2}=\boxed{\frac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}},$$

qui est du signe de $1+2\cos x$: positive sur $[0\,,\frac{2\pi}{3}]$, négative sur $[\frac{2\pi}{3}\,,\pi]$. On calcule $f(\frac{2\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}/2}{3/2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	↘	0

3. Par imparité et périodicité, le maximum de f sur $\mathbb{R}$ vaut $\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$, atteint exactement aux réels $\boxed{x \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]}$, et le minimum vaut $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, atteint en $x \equiv -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.



La courbe oscille entre les deux droites en pointillé ; elle n'est pas sinusoïdale : la montée de 0 à $\frac{2\pi}{3}$ est plus lente que la descente de $\frac{2\pi}{3}$ à π.

EXERCICE 10 ⋆⋆⋆

1. Pour $n = 1$, il y a égalité. Si l'inégalité est vraie au rang n, la formule d'addition et l'inégalité triangulaire donnent

$$|\sin((n+1)x)| = |\sin(nx)\cos x + \cos(nx)\sin x| \leqslant |\sin(nx)| + |\sin x| \leqslant (n+1)|\sin x|,$$

puisque $|\cos x| \leqslant 1$ et $|\cos(nx)| \leqslant 1$. $\boxed{|\sin(nx)| \leqslant n\,|\sin x| \text{ pour tout } n \geqslant 1}$

2. On a $\frac{a}{2^n} \in]0\,,\pi[$, donc $\sin\frac{a}{2^n} > 0$. La formule $\sin(2u) = 2\sin u\cos u$, avec $u = \frac{a}{2^k}$, donne

$$\cos\frac{a}{2^k} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(a/2^{k-1})}{\sin(a/2^k)},$$

et le produit est télescopique, au sens du chapitre 3 :

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{a}{2^k} = \frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin(a/2^{k-1})}{\sin(a/2^k)} = \boxed{\frac{\sin a}{2^n\sin(a/2^n)}}.$$

3. On note P le produit cherché et l'on applique trois fois la formule de duplication, chaque angle étant le double du précédent :

$$8\sin\frac{\pi}{7}\,P = 4\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = 2\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = \sin\frac{8\pi}{7} = -\sin\frac{\pi}{7}.$$

Comme $\sin\frac{\pi}{7} \neq 0$, on obtient $\boxed{\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}}$

À retenir : la méthode est la même qu'à la question 2, lue dans l'autre sens : on multiplie par le sinus du plus petit angle pour déclencher les duplications successives.

EXERCICE 11 ⋆⋆⋆

1. En appliquant deux fois la formule $\cos(2u) = 2\cos^2 u - 1$:

$$\boxed{\cos(4t) = 2(2c^2-1)^2 - 1 = 8c^4 - 8c^2 + 1}$$

2. On a $\cos\frac{4\pi}{5} = \cos(\pi - \frac{\pi}{5}) = -c$, donc $8c^4 - 8c^2 + 1 = -c$, c'est-à-dire $8c^4 - 8c^2 + c + 1 = 0$. En développant, on vérifie que

$$\boxed{8c^4 - 8c^2 + c + 1 = (c+1)(2c-1)(4c^2-2c-1)}$$

3. Les racines sont -1, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$. Or le cosinus est strictement décroissant sur $[0\,,\pi]$, puisque sa dérivée $-\sin$ y est négative et ne s'annule qu'aux bornes ; comme $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{3}$, on a $c > \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Cela élimine -1, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$, qui est négatif.

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}}$$

4. L'équation s'écrit $\cos t = \cos\frac{\pi}{5}$, et la proposition 4 conclut : $\boxed{t \equiv \frac{\pi}{5}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad t \equiv -\frac{\pi}{5}\ [2\pi]}$

À retenir : le nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 2\cos\frac{\pi}{5}$ est le nombre d'or ; on le retrouvera avec les racines cinquièmes de l'unité à l'exercice 41.

Le corps des nombres complexes

EXERCICE 12 ⋆

Pour un quotient, on multiplie par le conjugué du dénominateur ; le module d'un quotient est le quotient des modules, ce qui fournit un contrôle.

- **(a)** $\dfrac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$, de module 1. **(b)** $\dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{2} = \mathrm{i}$, de module 1.
- **(c)** $\dfrac{(-5+12\mathrm{i})(4+2\mathrm{i})}{20} = \dfrac{-44+38\mathrm{i}}{20} : \boxed{-\dfrac{11}{5}+\dfrac{19}{10}\mathrm{i}}$, de module $\dfrac{|2+3\mathrm{i}|^2}{|4-2\mathrm{i}|} = \dfrac{13}{2\sqrt{5}} = \dfrac{13\sqrt{5}}{10}$.
- **(d)** $\dfrac{(1+2\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})}{10} = \dfrac{-5+5\mathrm{i}}{10} : \boxed{-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}}$, de module $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
- **(e)** $\dfrac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} = \dfrac{(1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{5} = \dfrac{1+3\mathrm{i}}{5}$, dont le carré est $\boxed{-\dfrac{8}{25}+\dfrac{6}{25}\mathrm{i}}$, de module $\dfrac{2}{5}$.
- **(f)** Les deux termes sont conjugués, donc la somme vaut $2\,\mathrm{Re}\left(\dfrac{(2+5\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{2}\right) = \mathrm{Re}(-3+7\mathrm{i}) : \boxed{-3}$, de module 3.
- **(g)** $\dfrac{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})(\sqrt{3}+\mathrm{i})}{4} = \dfrac{4\mathrm{i}}{4} = \boxed{\mathrm{i}}$, de module 1. **(h)** $\dfrac{2(1+\mathrm{i}\sqrt{3})}{4} = \boxed{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}$, de module 1.
- **(i)** On remarque que $(3+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) = 5-\mathrm{i}$, d'où, avec $(1-\mathrm{i})^2 = -2\mathrm{i}$,

$$\frac{(5-\mathrm{i})^6}{(3+2\mathrm{i})^5} = (3+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})^6 = (3+2\mathrm{i})(-2\mathrm{i})^3 = 8\mathrm{i}(3+2\mathrm{i}) = \boxed{-16+24\mathrm{i}},$$

de module $8\sqrt{13}$.

À retenir : avant de développer une puissance élevée, on cherche une factorisation. Le module permettait de contrôler le résultat : $\frac{26^3}{13^{5/2}} = 8\sqrt{13}$.

EXERCICE 13 ⋆

On écrit $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels, et l'on identifie parties réelles et imaginaires.

- **(a)** $2x + \mathrm{i}(2y+1) = x + 1 - \mathrm{i}y$, d'où $x = 1$ et $3y = -1$: $\boxed{z = 1 - \dfrac{\mathrm{i}}{3}}$
- **(b)** $8x - 4\mathrm{i}y = 3 + 2\mathrm{i}$: $\boxed{z = \dfrac{3}{8} - \dfrac{\mathrm{i}}{2}}$
- **(c)** $2z + 2\overline{z} = 4x$ est réel, alors que $2 + 3\mathrm{i}$ ne l'est pas : $\boxed{\text{aucune solution}}$
- **(d)** Pas besoin de x et y ici : $z = 1 + \dfrac{\mathrm{i}}{3+2\mathrm{i}} = 1 + \dfrac{\mathrm{i}(3-2\mathrm{i})}{13}$, d'où $\boxed{z = \dfrac{15+3\mathrm{i}}{13}}$

Piège : une équation où figure $\overline{z}$ n'est pas une équation du premier degré en z ; le passage aux parties réelle et imaginaire est la méthode sûre, et l'équation (c) montre qu'il peut n'y avoir aucune solution.

EXERCICE 14 ⋆

Les puissances de i se répètent de quatre en quatre : i^n vaut 1, i, -1, $-\mathrm{i}$ selon que $n \equiv 0$, 1, 2, 3 modulo 4. La somme est géométrique, de raison $\mathrm{i} \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{i}^k = \frac{1-\mathrm{i}^{n+1}}{1-\mathrm{i}} \qquad \text{vaut} \qquad \boxed{1,\quad 1+\mathrm{i},\quad \mathrm{i},\quad 0} \qquad \text{pour } n \equiv 0,1,2,3\ [4].$$

Le produit vaut $\mathrm{i}^{1+2+\cdots+n} = \mathrm{i}^{n(n+1)/2}$. Le reste de $\frac{n(n+1)}{2}$ modulo 4 dépend du reste de n modulo 8 : pour $n \equiv 0, 1, \ldots, 7$, l'exposant est congru à 0, 1, 3, 2, 2, 3, 1, 0 modulo 4.

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n} \mathrm{i}^k = 1,\ \mathrm{i},\ -\mathrm{i},\ -1,\ -1,\ -\mathrm{i},\ \mathrm{i},\ 1 \quad \text{pour } n \equiv 0,1,\ldots,7\ [8]}$$

On vérifie pour $n = 2$: $\mathrm{i} \times \mathrm{i}^2 = \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$ ✓.

EXERCICE 15 ⋆⋆

- **(a)** L'écriture $\mathrm{i} > 0$ n'a pas de sens : le cours montre qu'il n'existe aucune relation d'ordre sur $\mathbb{C}$ compatible avec les opérations, et le « raisonnement » proposé en est précisément la démonstration par l'absurde. Il n'y a rien à corriger dans la conclusion, sinon qu'elle prouve que l'hypothèse est absurde.
- **(b)** L'égalité $|z|^2 = z^2$ est fausse dès que z n'est pas réel ; la bonne relation est $|z|^2 = z\overline{z}$. Comme $|z|^2 \geqslant 0$, l'équation $|z|^2 = -1$ n'a **aucune solution** ; d'ailleurs $|\mathrm{i}|^2 = 1$.
- **(c)** L'inverse d'une somme n'est pas la somme des inverses, déjà dans $\mathbb{R}$. La bonne formule est $\dfrac{1}{a+\mathrm{i}b} = \dfrac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2}$.
- **(d)** L'inégalité triangulaire donne seulement $|z+\mathrm{i}| \leqslant |z|+1$. L'ensemble $|z+\mathrm{i}| = 2$ est le cercle de **centre** $-\mathrm{i}$ et de **rayon** 2, puisque $|z+\mathrm{i}| = |z-(-\mathrm{i})|$.

EXERCICE 16 ⋆⋆

1. D'après le cours, $|z \pm z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}(z\overline{z'})$; on ajoute les deux égalités.

$$\boxed{|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)}$$

Dans le parallélogramme construit sur les vecteurs d'affixes z et z', les diagonales ont pour longueurs $|z+z'|$ et $|z-z'|$: la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des quatre côtés.

2. On écrit $2z = (z+z') + (z-z')$ et $2z' = (z+z') - (z-z')$; l'inégalité triangulaire donne

$$2|z| \leqslant |z+z'| + |z-z'| \qquad \text{et} \qquad 2|z'| \leqslant |z+z'| + |z-z'|,$$

et l'on ajoute. L'égalité exige l'égalité dans les deux inégalités. Si $u = z+z'$ et $v = z-z'$ étaient tous deux non nuls, on aurait $v = \lambda u$ et $-v = \mu u$ avec $\lambda, \mu > 0$, d'où $(\lambda+\mu)u = 0$, ce qui est impossible. Donc $u = 0$ ou $v = 0$, et réciproquement ces cas donnent l'égalité.

$$\boxed{\text{égalité si et seulement si } z' = z \ \text{ ou } \ z' = -z}$$

3. Avec $z = a + \mathrm{i}b$, l'inégalité triangulaire donne $|z| \leqslant |a| + |\mathrm{i}b| = |a| + |b|$, avec égalité si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$, car $\mathrm{i}b$ et a ne sont positivement proportionnels que si l'un est nul. Pour l'autre inégalité, entre réels positifs,

$$\frac{(|a|+|b|)^2}{2} \leqslant a^2 + b^2 \iff 0 \leqslant (|a|-|b|)^2.$$

$$\boxed{\frac{|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|}{\sqrt{2}} \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|}$$

avec égalité à gauche si et seulement si $|a| = |b|$, et à droite si et seulement si z est réel ou imaginaire pur.

EXERCICE 17 ⋆⋆

La condition est suffisante : si $z_k = \lambda_k z_1$ avec $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_k > 0$, alors $\left|\sum z_k\right| = \left(\sum \lambda_k\right)|z_1| = \sum |z_k|$.

Réciproquement, supposons l'égalité, et notons $S = \sum z_k$. On a $|S| = \sum |z_k| > 0$, donc $S \neq 0$; posons $u = \frac{S}{|S|} \in \mathbb{U}$. Alors

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k| = |S| = \operatorname{Re}(S\,\overline{u}) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}(z_k\overline{u}) \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k\overline{u}| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Il y a donc égalité terme à terme : $\operatorname{Re}(z_k\overline{u}) = |z_k\overline{u}|$, ce qui signifie, comme dans la démonstration du théorème 3 du cours, que $z_k\overline{u}$ est un réel positif, à savoir $|z_k|$. Ainsi $z_k = |z_k|\,u$ pour tout k, et

$$\boxed{z_k = \lambda_k z_1 \quad \text{avec} \quad \lambda_k = \frac{|z_k|}{|z_1|} > 0}$$

Géométriquement, l'égalité a lieu si et seulement si tous les vecteurs ont même direction et même sens : la ligne brisée qui les met bout à bout est un segment.

EXERCICE 18 ⋆⋆⋆

1. Si $|z| \leqslant 1$, alors $|\overline{a}z| = |a|\,|z| \leqslant |a| < 1$, donc $\overline{a}z \neq 1$: $\boxed{1 - \overline{a}z \neq 0}$

2. On développe les deux carrés de modules par la formule $|u - v|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2\operatorname{Re}(u\overline{v})$:

$$|1 - \overline{a}z|^2 = 1 + |a|^2|z|^2 - 2\operatorname{Re}(\overline{a}z) \qquad \text{et} \qquad |z - a|^2 = |z|^2 + |a|^2 - 2\operatorname{Re}(z\overline{a}).$$

Les termes en Re sont égaux, et la différence vaut $1 + |a|^2|z|^2 - |z|^2 - |a|^2 = (1 - |a|^2)(1 - |z|^2)$. On divise par $|1 - \overline{a}z|^2 > 0$.

$$\boxed{1 - \left|\frac{z - a}{1 - \overline{a}z}\right|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \overline{a}z|^2}}$$

3. Si $|z| < 1$, le membre de droite est strictement positif ; si $|z| = 1$, il est nul.

$$\boxed{|z| < 1 \Rightarrow \left|\frac{z - a}{1 - \overline{a}z}\right| < 1 \qquad \text{et} \qquad |z| = 1 \Rightarrow \left|\frac{z - a}{1 - \overline{a}z}\right| = 1}$$

À retenir : l'application $z \mapsto \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$ envoie le disque unité ouvert dans lui-même et le cercle unité dans lui-même, en envoyant a sur 0 ; ces applications jouent un grand rôle en analyse complexe.

EXERCICE 19 ⋆⋆

1. Si $n^2 + m^2 = 3$, alors $n^2 \leqslant 3$ et $m^2 \leqslant 3$, donc $n, m \in \{-1, 0, 1\}$, et $n^2 + m^2 \leqslant 2$: contradiction. $\boxed{3 \notin S}$

2. Si $s = n^2 + m^2 = |n + \mathrm{i}m|^2$ et $s' = p^2 + q^2 = |p + \mathrm{i}q|^2$, alors, par multiplicativité du module,

$$ss' = |(n + \mathrm{i}m)(p + \mathrm{i}q)|^2 = (np - mq)^2 + (nq + mp)^2,$$

et $np - mq$, $nq + mp$ sont des entiers : $\boxed{ss' \in S}$. Avec $13 = |2 + 3\mathrm{i}|^2$ et $17 = |1 + 4\mathrm{i}|^2$, on obtient $(2 + 3\mathrm{i})(1 + 4\mathrm{i}) = -10 + 11\mathrm{i}$, et, en remplaçant $1 + 4\mathrm{i}$ par son conjugué, $(2 + 3\mathrm{i})(1 - 4\mathrm{i}) = 14 - 5\mathrm{i}$.

$$\boxed{221 = 10^2 + 11^2 = 14^2 + 5^2}$$

3. On a $3 = 1+1+1$ et $5 = 4+1+0$. Les carrés inférieurs à 15 sont 0, 1, 4, 9, et aucune somme de trois d'entre eux ne vaut 15 : avec 9, il faudrait $6 = a+b$ avec $a, b \in \{0,1,4\}$, impossible ; sans 9, la somme est au plus 12. $\boxed{15 \notin S',\ \text{donc } S' \text{ n'est pas stable par produit}}$
La méthode de la question 2 repose sur une multiplication de $\mathbb{R}^2$, celle de $\mathbb{C}$, qui vérifie $|zz'| = |z|\,|z'|$; il n'existe pas de multiplication analogue sur $\mathbb{R}^3$, et le contre-exemple $3 \times 5 = 15$ le montre à sa manière.

Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

EXERCICE 20 ⋆

On remplace $\cos x$ et $\sin x$ par les formules d'Euler, on développe par la formule du binôme, et l'on regroupe les termes conjugués.

- **(a)** $\cos^4 x = \dfrac{\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} + 4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 6 + 4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}}{16}$, d'où $\boxed{\cos^4 x = \dfrac{\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3}{8}}$
- **(b)** $(2\mathrm{i})^5 = 32\mathrm{i}$ et $\sin^5 x = \dfrac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^5}{32\mathrm{i}} = \dfrac{2\mathrm{i}\sin(5x) - 10\mathrm{i}\sin(3x) + 20\mathrm{i}\sin x}{32\mathrm{i}}$, d'où

$$\boxed{\sin^5 x = \frac{\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin x}{16}}$$

- **(c)** On écrit $\cos^2 x \sin^3 x = (1 - \sin^2 x)\sin^3 x$, ou l'on développe directement ; on trouve

$$\boxed{\cos^2 x\ \sin^3 x = \frac{2\sin x + \sin(3x) - \sin(5x)}{16}}$$

- **(d)** On linéarise $\cos^3 x = \frac{\cos(3x)+3\cos x}{4}$, puis l'on utilise $\sin a \cos b = \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$:

$$\cos^3 x \sin(3x) = \frac{\sin(6x)}{8} + \frac{3\big(\sin(4x) + \sin(2x)\big)}{8},$$

$$\boxed{\cos^3 x\ \sin(3x) = \frac{\sin(6x) + 3\sin(4x) + 3\sin(2x)}{8}}$$

On contrôle chaque formule en une valeur particulière : en $x = \frac{\pi}{2}$, (b) donne $\frac{1+5+10}{16} = 1$ ✓.

EXERCICE 21 ⋆⋆

1. Avec $c = \cos x$ et $s = \sin x$, la formule de Moivre et celle du binôme donnent

$$(c + \mathrm{i}s)^4 = c^4 + 4\mathrm{i}c^3 s - 6c^2 s^2 - 4\mathrm{i}cs^3 + s^4.$$

$$\boxed{\cos(4x) = c^4 - 6c^2 s^2 + s^4 \qquad \sin(4x) = 4c^3 s - 4cs^3}$$

2. La partie réelle de $(c + \mathrm{i}s)^5$ est $c^5 - 10c^3 s^2 + 5cs^4$. On remplace s^2 par $1 - c^2$:

$$c^5 - 10c^3(1 - c^2) + 5c(1 - c^2)^2 = \boxed{16c^5 - 20c^3 + 5c}.$$

3. Pour $x = \frac{\pi}{10}$, $\cos(5x) = 0$, et $c = \cos\frac{\pi}{10} \neq 0$ vérifie $16c^4 - 20c^2 + 5 = 0$, d'où $c^2 = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$. Le cosinus étant décroissant sur $[0\,,\pi]$ et $\frac{\pi}{10} < \frac{\pi}{6}$, on a $c^2 > \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, ce qui élimine $\frac{5-\sqrt{5}}{8} < \frac{3}{8}$; enfin $c > 0$.

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}}$$

EXERCICE 22 ⋆⋆

Dans chaque cas, on reconnaît la partie réelle, ou imaginaire, d'une somme d'exponentielles que l'on sait calculer.

(a) La formule du binôme, puis l'angle moitié donnent, pour tout réel x,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}=(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^n=2^n\cos^n\frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx/2}.$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx)=2^n\cos^n\frac{x}{2}\cos\frac{nx}{2}\qquad\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(kx)=2^n\cos^n\frac{x}{2}\sin\frac{nx}{2}}$$

(b) On linéarise, $\cos^2(kx)=\frac{1+\cos(2kx)}{2}$, et l'on applique la proposition 15 du cours avec l'angle $2x$, lorsque $x\not\equiv 0\ [\pi]$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\cos^2(kx)=\frac{n+1}{2}+\frac{\cos(nx)\sin((n+1)x)}{2\sin x}\qquad\sum_{k=0}^{n}\sin^2(kx)=\frac{n+1}{2}-\frac{\cos(nx)\sin((n+1)x)}{2\sin x}}$$

la seconde s'obtenant en retranchant la première de $n+1$. Si $x\equiv 0\ [\pi]$, les deux sommes valent $n+1$ et 0.

(c) C'est la partie réelle de la somme géométrique de raison $q=-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2}$, qui n'est jamais égale à 1 puisque $|q|=\frac{1}{2}$; aucune valeur de x n'est à écarter. On multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué de $1-q=\frac{2+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2}$, dont le carré du module vaut $\frac{5+4\cos x}{4}$:

$$\sum_{k=0}^{n}q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=\frac{2(2+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})\left(1+\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}\right)}{5+4\cos x}.$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\cos(kx)}{2^k}=\frac{2(2+\cos x)+\dfrac{(-1)^n}{2^n}(2\cos((n+1)x)+\cos(nx))}{5+4\cos x}}$$

Pour $n=0$, on trouve $\frac{4+2\cos x+2\cos x+1}{5+4\cos x}=1$ ✓.

(d) C'est la partie réelle de la somme géométrique de raison $q=\cos x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$. Si $x\equiv 0\ [\pi]$, chaque terme vaut $(\pm1)^k(\pm1)^k=1$, et la somme vaut $n+1$. Sinon $|q|=|\cos x|<1$, donc $q\neq 1$, et

$$1-q=1-\cos^2x-\mathrm{i}\sin x\cos x=-\mathrm{i}\sin x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x},\qquad\sum_{k=0}^{n}q^k=\frac{\mathrm{i}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}-\cos^{n+1}x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx})}{\sin x}.$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\cos^k x\cos(kx)=1+\frac{\cos^{n+1}x\,\sin(nx)}{\sin x}\quad\text{pour } x\not\equiv 0\ [\pi]}$$

Piège : la partie réelle d'un quotient n'est pas le quotient des parties réelles ; on simplifie d'abord le quotient, puis on prend la partie réelle.

EXERCICE 23 ⋆⋆

On applique la proposition 15 du cours avec $n-1$ termes non nuls et l'angle $t=\frac{\pi}{n}\not\equiv 0\ [2\pi]$; le terme d'indice 0 est nul.

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2n}}=\boxed{\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}},$$

puisque $\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n})=\cos\frac{\pi}{2n}$. Pour $n=2$, les deux membres valent 1 ; pour $n=3$, ils valent $\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}=\sqrt{3}=\frac{\cos(\pi/6)}{\sin(\pi/6)}$ ✓.

EXERCICE 24 ⋆⋆

1. Pour $u \in \mathbb{U}$, $\frac{1}{u} = \overline{u}$. En factorisant par uvw, de module 1,

$$|uv + vw + wu| = |uvw|\left|\frac{1}{w} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right| = |\overline{u} + \overline{v} + \overline{w}| = \boxed{|u + v + w|}.$$

2. Avec $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, $v = \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$, $w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$, on a $u + v + w = 0$, donc $uv + vw + wu = 0$ par la question 1, et

$$u^2 + v^2 + w^2 = (u + v + w)^2 - 2(uv + vw + wu) = \boxed{0}.$$

La partie réelle donne $\cos(2x) + \cos(2y) + \cos(2z) = 0$, puis, avec $\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$,

$$\boxed{\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = \frac{3}{2}}$$

On verra à l'exercice 51 que u, v, w sont alors les sommets d'un triangle équilatéral, ce qui rend ce résultat visible.

EXERCICE 25 ⋆⋆

1. Un complexe est réel s'il est égal à son conjugué. Avec $\overline{z} = \frac{1}{z}$ et $\overline{z'} = \frac{1}{z'}$,

$$\overline{\left(\frac{z + z'}{1 + zz'}\right)} = \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{z'}}{1 + \frac{1}{zz'}} = \frac{z' + z}{zz' + 1}, \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\frac{z + z'}{1 + zz'} \in \mathbb{R}}.$$

2. On écrit $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$, et l'angle moitié donne

$$\frac{1 + z}{1 - z} = \frac{2\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}}{-2\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}} = \mathrm{i}\,\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}, \qquad \boxed{\mathrm{i}\,\frac{1 + z}{1 - z} = -\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \in \mathbb{R}}.$$

3. Pour $z \neq -1$, l'équation $z = \frac{1+\mathrm{i}a}{1-\mathrm{i}a}$ équivaut à $z - 1 = \mathrm{i}a(z + 1)$, soit à $a = \frac{z-1}{\mathrm{i}(z+1)}$, ce qui prouve l'unicité. Avec $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta \in]-\pi\,, \pi[$, l'angle moitié donne $\frac{z-1}{z+1} = \mathrm{i}\tan\frac{\theta}{2}$.

$$\boxed{a = \tan\frac{\theta}{2} \in \mathbb{R}}$$

On retrouve les formules de la proposition 8 du cours : $\frac{1+\mathrm{i}a}{1-\mathrm{i}a} = \frac{(1+\mathrm{i}a)^2}{1+a^2} = \frac{1-a^2}{1+a^2} + \mathrm{i}\,\frac{2a}{1+a^2}$, dont les parties réelle et imaginaire sont $\cos\theta$ et $\sin\theta$ exprimés en fonction de $t = a = \tan\frac{\theta}{2}$.

EXERCICE 26 ⋆⋆

Pour $z \neq 0$, $z + \frac{1}{z}$ est réel si et seulement s'il est égal à son conjugué :

$$z + \frac{1}{z} = \overline{z} + \frac{1}{\overline{z}} \iff (z - \overline{z}) - \frac{z - \overline{z}}{z\overline{z}} = 0 \iff (z - \overline{z})\Big(1 - \frac{1}{|z|^2}\Big) = 0.$$

Le premier facteur est nul si et seulement si z est réel, le second si et seulement si $|z| = 1$.

$$\boxed{\left\{z \in \mathbb{C}^* \;\middle|\; z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{U} \cup \mathbb{R}^*}$$

Pour $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{U}$, on a d'ailleurs $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$: c'est la formule d'Euler.

Forme trigonométrique

EXERCICE 27 ⋆

On calcule le module, puis l'on reconnaît un angle connu ; pour les produits et les quotients, on combine modules et arguments.

- **(a)** $\boxed{1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}}$ **(b)** $\boxed{-3=3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}$ **(c)** $\boxed{9\mathrm{i}=9\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}}$
- **(d)** $\dfrac{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}}$: $\boxed{\dfrac{-\mathrm{i}\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\pi/4}}$
- **(e)** $\dfrac{8\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{(\sqrt{2})^5\,\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}\pi/4}}=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{9\mathrm{i}\pi/4}$: $\boxed{\dfrac{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^3}{(1-\mathrm{i})^5}=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}}$, c'est-à-dire $1+\mathrm{i}$.
- **(f)** $\sin x+\mathrm{i}\cos x=\mathrm{i}(\cos x-\mathrm{i}\sin x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$: $\boxed{\sin x+\mathrm{i}\cos x=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/2-x)}}$

Piège : en (f), on est tenté de lire « module 1, argument x » ; c'est faux, les rôles du cosinus et du sinus étant échangés.

EXERCICE 28 ⋆

1. On passe en forme trigonométrique avant d'élever à la puissance.

$$(1+\mathrm{i})^{18}=2^9\,\mathrm{e}^{18\mathrm{i}\pi/4}=2^9\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2},\qquad\Big(\frac{2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}}\Big)^{20}=2^{10}\,\mathrm{e}^{35\mathrm{i}\pi/3}=2^{10}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3},$$

$$\frac{2^5\,\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}\pi/2}\times 2^5\,\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/6}}{2^{10}\,\mathrm{e}^{-20\mathrm{i}\pi/3}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-5\pi/2+5\pi/6+20\pi/3)}=\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi}.$$

$$\boxed{(1+\mathrm{i})^{18}=512\,\mathrm{i}\qquad\Big(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}}\Big)^{20}=512-512\sqrt{3}\,\mathrm{i}\qquad\frac{(1-\mathrm{i})^{10}(\sqrt{3}+\mathrm{i})^5}{(-1-\mathrm{i}\sqrt{3})^{10}}=-1}$$

2. On a $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^n=2^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/3}$, réel positif si et seulement si $\frac{n\pi}{3}\equiv 0\ [2\pi]$; et $(\sqrt{3}+\mathrm{i})^n=2^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/6}$, imaginaire pur si et seulement si $\frac{n\pi}{6}\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

$$\boxed{n\equiv 0\ [6]\qquad\text{et}\qquad n\equiv 3\ [6]}$$

EXERCICE 29 ⋆⋆

1. On factorise par l'exponentielle de l'angle moyen. Comme $\frac{a}{2},\ \frac{b}{2}\in\,]0,\frac{\pi}{2}[$ et $\frac{a-b}{2}\in\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, les cosinus et sinus qui apparaissent sont strictement positifs, et les écritures suivantes sont bien des formes trigonométriques.

$$\boxed{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}=2\cos\frac{a}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}a/2}\qquad 1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}=2\sin\frac{a}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a-\pi)/2}\qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}=2\cos\frac{a-b}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)/2}}$$

$$\boxed{\frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}}=\frac{\cos(a/2)}{\cos(b/2)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a-b)/2}}$$

Pour la deuxième, on a écrit $-\mathrm{i}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}$.

2. Le numérateur est $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et le dénominateur son conjugué ; comme $\cos\frac{\theta}{2}\neq 0$,

$$\frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}=\frac{2\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}}{2\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}}=\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}.$$

EXERCICE 30 ⋆⋆

1. Les deux termes sont conjugués : $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^n + (1-\mathrm{i}\sqrt{3})^n = 2\,\mathrm{Re}\left(2^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/3}\right)$.

$$\boxed{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^n + (1-\mathrm{i}\sqrt{3})^n = 2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{3} = 2^n \times 2\cos\frac{n\pi}{3}}$$

Le nombre $2\cos\frac{n\pi}{3}$ ne prend que les valeurs 2, 1, -1, -2 : c'est un entier, et le résultat est un multiple entier de 2^n.

2. Le conjugué de $(2+\mathrm{i}\sqrt{5})^7$ est $(2-\mathrm{i}\sqrt{5})^7$, et $z+\overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$ est réel. Le développement donne d'ailleurs 4036.

3. On calcule $\frac{19+7\mathrm{i}}{9-\mathrm{i}} = \frac{(19+7\mathrm{i})(9+\mathrm{i})}{82} = 2+\mathrm{i}$ et $\frac{20+5\mathrm{i}}{7+6\mathrm{i}} = \frac{(20+5\mathrm{i})(7-6\mathrm{i})}{85} = 2-\mathrm{i}$, qui sont conjugués. La somme vaut donc $2\,\mathrm{Re}\left((2+\mathrm{i})^n\right)$: $\boxed{\text{elle est réelle}}$

À retenir : pour montrer qu'un nombre est réel, on cherche à l'écrire $z+\overline{z}$, ou à vérifier qu'il est égal à son conjugué ; le calcul est presque toujours plus court que le développement.

Équations algébriques

EXERCICE 31 ⋆

On résout le système de la proposition 20 du cours, $x^2-y^2=a$, $x^2+y^2=|w|$, $2xy=b$.

- **(a)** $x^2=y^2=\frac{1}{2}$ et $xy>0$: $\boxed{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})}$
- **(b)** $|w|=5$, $x^2=4$, $y^2=1$, $xy<0$: $\boxed{\pm(2-\mathrm{i})}$ **(c)** $|w|=10$, $x^2=9$, $y^2=1$, $xy<0$: $\boxed{\pm(3-\mathrm{i})}$
- **(d)** $|w|=26$, $x^2=25$, $y^2=1$, $xy<0$: $\boxed{\pm(5-\mathrm{i})}$
- **(e)** $|w|=\sqrt{5}$, $x^2=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $y^2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $xy>0$: $\boxed{\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}+\mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)}$

Pour $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$, on a $|w|=1$ et $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$, d'où $x^2=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$, $y^2=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ et $xy>0$. Or les racines carrées de w sont aussi $\pm\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/8}$, et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/8}$ est celle dont la partie réelle est positive.

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$$

Le quotient vaut $\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{2}} = \sqrt{2}-1$, ce qui est la valeur de $\tan\frac{\pi}{8}$ obtenue à l'exercice 5 ✓.

EXERCICE 32 ⋆

On calcule le discriminant, l'une de ses racines carrées, puis l'on applique le théorème 4 du cours.

- **(a)** $\Delta=-3=(\mathrm{i}\sqrt{3})^2$: $\boxed{z=\frac{-1\pm\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}}$, c'est-à-dire j et j^2.
- **(b)** $\Delta=-4-4(2-4\mathrm{i})=-12+16\mathrm{i}=\big(2(1+2\mathrm{i})\big)^2$: $\boxed{z=1+3\mathrm{i} \;\text{ ou }\; z=-1-\mathrm{i}}$
- **(c)** Avec le discriminant réduit, $\Delta'=64-4(11-12\mathrm{i})=20+48\mathrm{i}=(6+4\mathrm{i})^2$: $z=\frac{8\pm(6+4\mathrm{i})}{4}$, d'où $\boxed{z=\frac{7}{2}+\mathrm{i} \;\text{ ou }\; z=\frac{1}{2}-\mathrm{i}}$
- **(d)** $\Delta=(4\mathrm{i}-3)^2-4\mathrm{i}(\mathrm{i}-5)=-3-4\mathrm{i}=(1-2\mathrm{i})^2$, puis $z=\frac{3-4\mathrm{i}\pm(1-2\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}$:

$$\boxed{z=-3-2\mathrm{i} \;\text{ ou }\; z=-1-\mathrm{i}}$$

- **(e)** On pose $Z = z^2$. Le discriminant de $Z^2-(5-14\mathrm{i})Z-2(5\mathrm{i}+12)$ vaut $-75-100\mathrm{i} = \big(5(1-2\mathrm{i})\big)^2$, d'où $Z = 5-12\mathrm{i}$ ou $Z = -2\mathrm{i}$. Les racines carrées de ces nombres sont $\pm(3-2\mathrm{i})$ et $\pm(1-\mathrm{i})$.

$$\boxed{z \in \{3-2\mathrm{i},\ -3+2\mathrm{i},\ 1-\mathrm{i},\ -1+\mathrm{i}\}}$$

- **(f)** Le discriminant réduit vaut $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} - 2\mathrm{i}\sin\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta) = 1$:

$$\boxed{z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+1 \quad \text{ou} \quad z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1}$$

On contrôle par la somme et le produit : en (b), $(1+3\mathrm{i})+(-1-\mathrm{i}) = 2\mathrm{i}$ et $(1+3\mathrm{i})(-1-\mathrm{i}) = 2-4\mathrm{i}$ ✓.

EXERCICE 33 ⋆

D'après le cours, x et y sont les solutions de $z^2 - sz + p = 0$, où s est la somme et p le produit ; chaque système a donc pour solutions les deux couples obtenus en échangeant ces solutions.

- **(a)** $\Delta = (3+4\mathrm{i})^2 - 4(5+15\mathrm{i}) = -27-36\mathrm{i} = (3-6\mathrm{i})^2$: $\boxed{\{x,y\} = \{5\mathrm{i},\ 3-\mathrm{i}\}}$
- **(b)** $\Delta = -9+4(1+3\mathrm{i}) = -5+12\mathrm{i} = (2+3\mathrm{i})^2$: $\boxed{\{x,y\} = \{1+3\mathrm{i},\ -1\}}$
- **(c)** $\Delta = -4 = (2\mathrm{i})^2$: $\boxed{\{x,y\} = \{1+\mathrm{i},\ 1-\mathrm{i}\}}$

EXERCICE 34 ⋆⋆

1. On cherche $z = \mathrm{i}y$ avec y réel. En développant, $(\mathrm{i}y)^3 + (1+\mathrm{i})(\mathrm{i}y)^2 + (\mathrm{i}-1)\mathrm{i}y - \mathrm{i} = 0$ s'écrit

$$(-y^2-y) + \mathrm{i}(-y^3-y^2-y-1) = 0,$$

soit $y(y+1) = 0$ et $(y+1)(y^2+1) = 0$, d'où $y = -1$: $z = -\mathrm{i}$ est solution. La factorisation par $z+\mathrm{i}$ (proposition 19 du cours) donne

$$z^3 + (1+\mathrm{i})z^2 + (\mathrm{i}-1)z - \mathrm{i} = (z+\mathrm{i})(z^2+z-1).$$

$$\boxed{z \in \Big\{-\mathrm{i},\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\Big\}}$$

2. Une solution réelle x annule la partie réelle, $2x^2-5x+3 = (x-1)(2x-3)$, et la partie imaginaire, $4x^3+6x^2-4x-21$. Seul $x = \frac{3}{2}$ convient : $4\times\frac{27}{8} + 6\times\frac{9}{4} - 6 - 21 = 0$. On factorise :

$$4\mathrm{i}z^3 + 2(1+3\mathrm{i})z^2 - (5+4\mathrm{i})z + 3(1-7\mathrm{i}) = (2z-3)\big(2\mathrm{i}z^2 + (1+6\mathrm{i})z - 1 + 7\mathrm{i}\big),$$

et le trinôme a pour discriminant $(1+6\mathrm{i})^2 - 8\mathrm{i}(-1+7\mathrm{i}) = 21+20\mathrm{i} = (5+2\mathrm{i})^2$.

$$\boxed{z \in \Big\{\frac{3}{2},\ -1-\mathrm{i},\ -2+\frac{3}{2}\mathrm{i}\Big\}}$$

À retenir : pour trouver une racine réelle d'une équation à coefficients complexes, on annule séparément partie réelle et partie imaginaire ; les deux conditions réelles se contrôlent l'une l'autre.

EXERCICE 35 ⋆⋆

Pour x réel, $x^3+(3+\mathrm{i})x^2-3x-(m+\mathrm{i})=(x^3+3x^2-3x-m)+\mathrm{i}(x^2-1)$. Une solution réelle vérifie donc $x^2=1$, puis $m=x^3+3x^2-3x$: pour $x=1$, $m=1$; pour $x=-1$, $m=5$.

$$\boxed{m=1,\ \text{solution réelle } x=1 \qquad \text{ou} \qquad m=5,\ \text{solution réelle } x=-1}$$

EXERCICE 36 ⋆⋆

1. Le nombre z est racine de $(X-z)(X-\overline{z})=X^2-2\operatorname{Re}(z)X+|z|^2$: $\boxed{p=-2\operatorname{Re}z,\ q=|z|^2}$. Ils sont uniques : si $z^2+p'z+q'=0$ avec p', q' réels, la différence donne $(p-p')z=q'-q$, et comme z n'est pas réel, $p=p'$, puis $q=q'$.

2. On a $z_1+z_2=p$ et $z_1z_2=q^2\neq 0$. Posons $u=\frac{z_1}{z_2}$, qui appartient à $\mathbb{U}$ puisque $|z_1|=|z_2|$; alors $\frac{z_2}{z_1}=\overline{u}$, et

$$\frac{p^2}{q^2}=\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2}=\frac{z_1}{z_2}+2+\frac{z_2}{z_1}=\boxed{2+u+\overline{u}=2+2\operatorname{Re}u}.$$

Ce nombre est un réel positif, puisque $\operatorname{Re}u\geqslant -1$. Un complexe dont le carré est un réel positif r est l'une des deux racines carrées de r, $\pm\sqrt{r}$, donc il est réel : $\boxed{\frac{p}{q}\in\mathbb{R}}$

EXERCICE 37 ⋆⋆

1. $(2+\mathrm{i})^3=8+12\mathrm{i}-6-\mathrm{i}=2+11\mathrm{i}$ ✓. La factorisation de a^3-b^3 donne, avec $(2+\mathrm{i})^2=3+4\mathrm{i}$,

$$z^3-(2+11\mathrm{i})=(z-(2+\mathrm{i}))(z^2+(2+\mathrm{i})z+3+4\mathrm{i}).$$

Le discriminant du trinôme vaut $(2+\mathrm{i})^2-4(2+\mathrm{i})^2=-3(2+\mathrm{i})^2=\big(\mathrm{i}\sqrt{3}(2+\mathrm{i})\big)^2$, d'où $z=(2+\mathrm{i})\frac{-1\pm\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

$$\boxed{z\in\left\{2+\mathrm{i},\ \ -1-\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\Big(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\Big),\ \ -1+\frac{\sqrt{3}}{2}-\mathrm{i}\Big(\sqrt{3}+\frac{1}{2}\Big)\right\}}$$

2. Le calcul précédent montre directement que les deux autres solutions sont $(2+\mathrm{i})j$ et $(2+\mathrm{i})j^2$, où $j=\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$: c'est la proposition 22 du cours, puisque les racines cubiques de 1 sont 1, j, j^2. Bombelli, qui ne connaissait que la solution $2+\mathrm{i}$, n'en voyait qu'une sur trois.

Racines n-ièmes

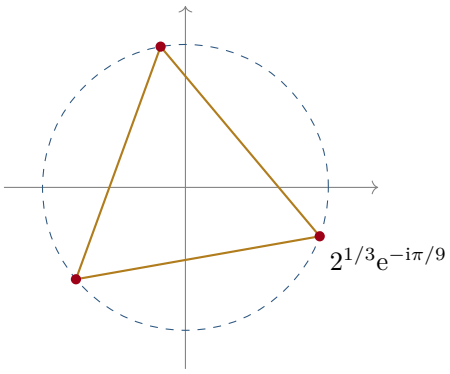
EXERCICE 38 ⋆

On met le second membre sous forme trigonométrique $r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, puis l'on applique la proposition 22 du cours : les solutions sont les $r^{1/n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2k\pi)/n}$, $k\in[\![0\,;n-1]\!]$.

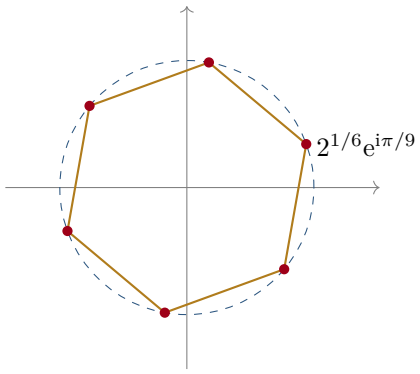
- **(a)** $1-\mathrm{i}\sqrt{3}=2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$: $\boxed{z=2^{1/3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\pi/9+2k\pi/3)},\ k\in\{0,1,2\}}$
- **(b)** $\dfrac{-4}{2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}}=-2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}=2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$: $\boxed{z=2^{1/6}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/9+k\pi/3)},\ k\in[\![0\,;5]\!]}$
- **(c)** $\dfrac{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}}{2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}}=2^{-1/2}\,\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/12}$: $\boxed{z=2^{-1/16}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(5\pi/96+k\pi/4)},\ k\in[\![0\,;7]\!]}$
- **(d)** On cherche d'abord $Z=z^2$ tel que $Z^2=-7+24\mathrm{i}$: $Z=\pm(3+4\mathrm{i})$. Les racines carrées de $3+4\mathrm{i}$ sont $\pm(2+\mathrm{i})$, celles de $-3-4\mathrm{i}$ sont $\pm(1-2\mathrm{i})$.

  $$\boxed{z\in\{2+\mathrm{i},\ -2-\mathrm{i},\ 1-2\mathrm{i},\ -1+2\mathrm{i}\}}$$

  On constate que $1-2\mathrm{i}=-\mathrm{i}(2+\mathrm{i})$: les quatre solutions sont les produits de $2+\mathrm{i}$ par les éléments de $\mathbb{U}_4$.



(a) $z^3 = 1 - i\sqrt{3}$



(b) $z^6 = 2\,e^{2i\pi/3}$

Les solutions de (a) forment un triangle équilatéral, celles de (b) un hexagone régulier, inscrits dans les cercles de rayons $2^{1/3} \approx 1{,}26$ et $2^{1/6} \approx 1{,}12$; on passe d'une solution à la suivante par une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$.

EXERCICE 39 ⋆⋆

(a) Le réel $z = 1$ n'est pas solution. Pour $z \neq 1$, l'équation s'écrit $w^5 = 1$ avec $w = \frac{z+1}{z-1}$, et $w \neq 1$. Donc $w = e^{2ik\pi/5}$ avec $k \in [\![1\,;4]\!]$, et $z = \frac{w+1}{w-1}$; l'angle moitié donne $\frac{w+1}{w-1} = \frac{2\cos(k\pi/5)}{2i\sin(k\pi/5)}$.

$$\boxed{z = -i\,\frac{\cos(k\pi/5)}{\sin(k\pi/5)},\ k \in [\![1\,;4]\!]}$$

Ce sont quatre imaginaires purs : l'équation est de degré 4, puisque les termes en z^5 se simplifient.

(b) De même, $z = i$ n'est pas solution, et $w = \frac{z+i}{z-i}$ vérifie $w^n = 1$, $w \neq 1$, d'où $z = i\,\frac{w+1}{w-1}$. Avec $w = e^{2ik\pi/n}$, on obtient

$$\boxed{z = \frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)} = \tan\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{n}\Big),\ k \in [\![1\,;n-1]\!]}$$

Toutes les solutions sont réelles, et elles sont distinctes, car la tangente est injective sur $]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}[$.

(c) On a $\big(\frac{z+1}{z-1}\big)^6 = -27 = 27\,e^{i\pi}$, donc $w = \frac{z+1}{z-1} = \sqrt{3}\,e^{i\varphi}$ avec $\varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, $k \in [\![0\,;5]\!]$. Alors

$$z = \frac{w+1}{w-1} = \frac{(w+1)(\overline{w}-1)}{|w-1|^2} = \frac{|w|^2 - 1 - 2i\,\mathrm{Im}\,w}{|w|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,w + 1} = \frac{1 - i\sqrt{3}\sin\varphi}{2 - \sqrt{3}\cos\varphi},$$

et les six valeurs de φ donnent

$$\boxed{z \in \Big\{2 \pm i\sqrt{3},\ \ \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2},\ \ \frac{2 \pm i\sqrt{3}}{7}\Big\}}$$

À retenir : une équation de la forme $A^n = B^n$, ou $A^n = cB^n$, se ramène aux racines n-ièmes par le quotient $\frac{A}{B}$, après avoir écarté les valeurs qui annulent B.

EXERCICE 40 ⋆⋆

En regroupant les termes, $1 + 2z + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k + \sum_{k=1}^{n} z^k = (1+z)\sum_{k=0}^{n-1} z^k$. Pour $z \neq 1$, la somme géométrique vaut $\frac{1-z^n}{1-z}$, nulle si et seulement si $z \in \mathbb{U}_n$; pour $z = 1$, elle vaut $n \neq 0$.

$$\boxed{\text{les solutions sont } -1 \text{ et les éléments de } \mathbb{U}_n \setminus \{1\}}$$

Lorsque n est pair, -1 appartient à $\mathbb{U}_n$: c'est une racine double, et l'équation a $n-1$ solutions distinctes ; lorsque n est impair, elle en a n.

EXERCICE 41 ⋆⋆

1. La somme des éléments de $\mathbb{U}_5$ est nulle (proposition 21 du cours). On prend la partie réelle, et l'on utilise $\cos\frac{8\pi}{5}=\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{6\pi}{5}=\cos\frac{4\pi}{5}$, qui résultent de la parité et de la périodicité :

$$\boxed{1+2\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{4\pi}{5}=0}$$

2. Avec $c=\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}=2c^2-1$, il vient $4c^2+2c-1=0$, dont les solutions sont $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$. Comme $0<\frac{2\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$, on a $c>0$.

$$\boxed{\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

3. $\cos\frac{\pi}{5}=-\cos\frac{4\pi}{5}=1-2c^2=1-\frac{3-\sqrt{5}}{4}=\boxed{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}$, ce qui est la valeur de l'exercice 11 ✓.

Les deux méthodes reposent sur la même idée : $\frac{\pi}{5}$ est un diviseur de π, et l'on exploite une relation algébrique entre ses multiples.

EXERCICE 42 ⋆⋆

1. Le produit des $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n}$ pour $k\in[\![0\,;n-1]\!]$ est l'exponentielle de la somme des arguments, $\frac{2\pi}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=(n-1)\pi$.

$$\boxed{\prod_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)\pi}=(-1)^{n-1}}$$

2. Si $\omega^n=1$, alors $(\omega^2)^n=(\omega^n)^2=1$: $Q\subset\mathbb{U}_n$. Considérons l'application $\omega\mapsto\omega^2$ de $\mathbb{U}_n$ dans $\mathbb{U}_n$, d'image Q. Si $\omega^2=\omega'^2$, alors $\omega'=\pm\omega$.

- Si n est impair, $-\omega\notin\mathbb{U}_n$, puisque $(-\omega)^n=-1$; l'application est donc injective, et, $\mathbb{U}_n$ étant fini, elle est bijective d'après le chapitre 2 : $Q=\mathbb{U}_n$.
- Si n est pair, ω et $-\omega$ appartiennent à $\mathbb{U}_n$ et ont le même carré ; l'application n'est pas injective, donc pas surjective, et $Q\neq\mathbb{U}_n$. Plus précisément, $Q=\{\mathrm{e}^{4\mathrm{i}k\pi/n}\}=\mathbb{U}_{n/2}$.

$$\boxed{Q=\mathbb{U}_n\iff n\text{ impair}\qquad\text{et}\qquad Q=\mathbb{U}_{n/2}\text{ si }n\text{ est pair}}$$

EXERCICE 43 ⋆⋆⋆

1. La somme $A+B$ est celle des éléments de $\mathbb{U}_7$ différents de 1 : $A+B=-1$. En développant le produit et en réduisant les exposants modulo 7 grâce à $\omega^7=1$,

$$AB=\omega^4+\omega^6+\omega^7+\omega^5+\omega^7+\omega^8+\omega^7+\omega^9+\omega^{10}=3+(\omega+\omega^2+\cdots+\omega^6)=2.$$

$$\boxed{A+B=-1\qquad\text{et}\qquad AB=2}$$

2. On a $\operatorname{Im}A=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}$, en utilisant $\sin(\pi-x)=\sin x$ et $\sin(\pi+x)=-\sin x$. Le sinus étant strictement croissant sur $[0\,,\frac{\pi}{2}]$, $\sin\frac{3\pi}{7}>\sin\frac{\pi}{7}$, et $\sin\frac{2\pi}{7}>0$: $\boxed{\operatorname{Im}A>0}$

3. Les nombres A et B sont les solutions de $z^2+z+2=0$, de discriminant -7, et A est celle de partie imaginaire positive.

$$\boxed{A=\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}\qquad B=\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}\qquad\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{6\pi}{7}=\operatorname{Im}A=\frac{\sqrt{7}}{2}}$$

On a utilisé $\sin\frac{8\pi}{7} = -\sin\frac{\pi}{7} = -\sin\frac{6\pi}{7}$. Ce calcul est un cas particulier des *sommes de Gauss*, qui relient les racines de l'unité à l'arithmétique.

EXERCICE 44 ⋆⋆⋆

1. La formule du binôme donne $(1+1)^n = \sum \binom{n}{k}$, et $(1+j)^n = \sum \binom{n}{k} j^k$, où j^k vaut 1, j, j^2 selon que $k \equiv 0$, 1, 2 modulo 3 ; de même pour $(1+j^2)^n$, avec j^{2k} qui vaut 1, j^2, j.

$$\boxed{S_0 + S_1 + S_2 = 2^n \qquad S_0 + jS_1 + j^2S_2 = (1+j)^n \qquad S_0 + j^2S_1 + jS_2 = (1+j^2)^n}$$

2. On a $1 + j = -j^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ et $1 + j^2 = -j = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$. En ajoutant les trois relations, et grâce à $1 + j + j^2 = 0$, il reste $3S_0$. En les ajoutant après avoir multiplié la deuxième par j^2 et la troisième par j, il reste $3S_1$; avec j et j^2, il reste $3S_2$.

$$3S_0 = 2^n + \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/3} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi/3}, \quad 3S_1 = 2^n + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-2)\pi/3} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-2)\pi/3}, \quad 3S_2 = 2^n + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+2)\pi/3} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+2)\pi/3}.$$

$$\boxed{S_0 = \frac{2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}}{3} \qquad S_1 = \frac{2^n + 2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}}{3} \qquad S_2 = \frac{2^n + 2\cos\frac{(n+2)\pi}{3}}{3}}$$

3. Pour $n = 4$: $S_0 = \binom{4}{0} + \binom{4}{3} = 5$, $S_1 = \binom{4}{1} + \binom{4}{4} = 5$, $S_2 = \binom{4}{2} = 6$. Les formules donnent $\frac{16-1}{3} = 5$, $\frac{16-1}{3} = 5$ et $\frac{16+2}{3} = 6$ ✓.
À retenir : les racines cubiques de l'unité « filtrent » les termes d'une somme selon le reste de l'indice modulo 3 ; c'est l'idée de la transformée de Fourier discrète.

EXERCICE 45 ⋆⋆⋆

1. Notons $\varphi(z) = \frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}$, définie pour $z \neq -\mathrm{i}$. Pour $w \in \mathbb{C}$, l'équation $\varphi(z) = w$ équivaut à $1 + \mathrm{i}z = w - \mathrm{i}wz$, soit $\mathrm{i}z(1+w) = w - 1$. Si $w = -1$, elle s'écrit $0 = -2$ et n'a pas de solution. Sinon, elle a l'unique solution $z = -\mathrm{i}\frac{w-1}{w+1}$, qui est différente de $-\mathrm{i}$ puisque $w - 1 \neq w + 1$.

$$\boxed{\varphi \text{ est une bijection de } \mathbb{C}\setminus\{-\mathrm{i}\} \text{ sur } \mathbb{C}\setminus\{-1\}, \quad \varphi^{-1}(w) = -\mathrm{i}\,\frac{w-1}{w+1}}$$

2. On a $1 + \mathrm{i}z = \mathrm{i}(z - \mathrm{i})$ et $1 - \mathrm{i}z = -\mathrm{i}(z + \mathrm{i})$, donc $|\varphi(z)| = 1 \iff |z - \mathrm{i}| = |z + \mathrm{i}|$, ce qui signifie que $M(z)$ est sur la médiatrice du segment joignant i et $-\mathrm{i}$, c'est-à-dire sur l'axe réel.
$\boxed{z \in \mathbb{R} \iff |\varphi(z)| = 1}$

3. L'équation équivaut à $\varphi(z) \in R_A$, où R_A désigne l'ensemble des racines n-ièmes de A ; ses solutions sont les $\varphi^{-1}(w)$ pour $w \in R_A \setminus \{-1\}$. Si $A = 0$, la seule solution est $\varphi^{-1}(0) = \mathrm{i}$, qui n'est pas réelle. Si $A \neq 0$, les éléments de R_A ont tous pour module $|A|^{1/n}$, et, d'après la question 2, les solutions sont toutes réelles si et seulement si $|A| = 1$. Il faut enfin qu'il y ait une solution : c'est automatique pour $n \geqslant 2$, où R_A a au moins deux éléments, et cela exige $A \neq -1$ pour $n = 1$.

$$\boxed{|A| = 1, \quad \text{avec de plus } A \neq -1 \text{ si } n = 1}$$

4. Pour $A = 1$ et $n = 4$, $w \in \{1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$, la valeur -1 étant exclue, et $\varphi^{-1}(1) = 0$, $\varphi^{-1}(\mathrm{i}) = 1$, $\varphi^{-1}(-\mathrm{i}) = -1$.

$$\boxed{z \in \{-1, 0, 1\}}$$

Ce sont les nombres $\tan\frac{k\pi}{4}$ pour $k \in \{-1, 0, 1\}$: comme à l'exercice 25, $\varphi(\tan\alpha) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$, et l'équation se lit $\mathrm{e}^{8\mathrm{i}\alpha} = 1$.

Exponentielle complexe

EXERCICE 46 ⋆

On applique la proposition 24 du cours : si $a = |a|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \neq 0$, les solutions de $\mathrm{e}^z = a$ sont les $\ln|a| + \mathrm{i}(\alpha + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

- **(a)** $3\sqrt{3} - 3\mathrm{i} = 6\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$: $\boxed{z = \ln 6 + \mathrm{i}\Big(-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\Big),\ k \in \mathbb{Z}}$
- **(b)** $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$: $\boxed{z = \mathrm{i}\Big(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\Big),\ k \in \mathbb{Z}}$ **(c)** L'exponentielle ne s'annule pas : $\boxed{\text{aucune solution}}$
- **(d)** On pose $w = \mathrm{e}^z \neq 0$; l'équation devient $w^2 - w + 1 = 0$, de solutions $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi/3}$.

$$\boxed{z = \pm\mathrm{i}\frac{\pi}{3} + 2\mathrm{i}k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$$

- **(e)** Avec $w = \mathrm{e}^z$, $w^2 + (\mathrm{i} - 2)w - 2\mathrm{i} = (w - 2)(w + \mathrm{i}) = 0$.

$$\boxed{z = \ln 2 + 2\mathrm{i}k\pi \ \text{ ou } \ z = -\mathrm{i}\frac{\pi}{2} + 2\mathrm{i}k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$$

- **(f)** D'après le cours, $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\overline{z}} \iff z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,z \in 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}$: $\boxed{\text{l'ensemble des } z \text{ tels que } \mathrm{Im}\,z \in \pi\mathbb{Z}}$, réunion de droites horizontales.

Enfin, $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta} = \mathrm{e}^{\cos\theta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sin\theta}$: $\boxed{\text{module } \mathrm{e}^{\cos\theta},\ \text{argument } \sin\theta}$

Piège : en (d), les solutions w sont de module 1, donc $\mathrm{Re}\,z = \ln 1 = 0$; on ne doit pas oublier la famille entière $2\mathrm{i}k\pi$.

EXERCICE 47 ⋆⋆

1. On a $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,z}$ et $\mathrm{Re}\,z \leqslant |\mathrm{Re}\,z| \leqslant |z|$; l'exponentielle réelle étant croissante, $\boxed{|\mathrm{e}^z| \leqslant \mathrm{e}^{|z|}}$. Par stricte croissance, il y a égalité si et seulement si $\mathrm{Re}\,z = |z|$, c'est-à-dire si z est un réel positif.

2. Les points de la droite $\mathrm{Re}\,z = a$ s'écrivent $a + \mathrm{i}y$, d'image $\mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$; lorsque y décrit $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ décrit tout $\mathbb{U}$. Les points de la droite $\mathrm{Im}\,z = b$ s'écrivent $x + \mathrm{i}b$, d'image $\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$, et e^x décrit $]0\,,+\infty[$.

$$\boxed{\text{la droite } \mathrm{Re}\,z = a \text{ a pour image le cercle } |w| = \mathrm{e}^a}$$

$$\boxed{\text{la droite } \mathrm{Im}\,z = b \text{ a pour image la demi-droite ouverte } \{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}b} \mid r > 0\}}$$

3. Tout complexe non nul w s'écrit $|w|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ avec un unique $\alpha \in [0\,,2\pi[$, et $w = \mathrm{e}^{\ln|w| + \mathrm{i}\alpha}$: l'image est $\boxed{\mathbb{C}^*}$. Si $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'}$ avec z, z' dans la bande, alors $z - z' = 2\mathrm{i}k\pi$; mais $|\mathrm{Im}\,z - \mathrm{Im}\,z'| < 2\pi$, donc $k = 0$: $\boxed{\text{l'exponentielle est injective sur la bande}}$, qui en est un « domaine fondamental ».

Interprétation géométrique

EXERCICE 48 ⋆

- **(a)** M est équidistant des points d'affixes i et $-\mathrm{i}$: $\boxed{\text{l'axe des réels}}$
- **(b)** $|(1 + \mathrm{i})z - 2\mathrm{i}| = |1 + \mathrm{i}|\,|z - (1 + \mathrm{i})| = \sqrt{2}\,|z - (1 + \mathrm{i})|$, puisque $\frac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = 1 + \mathrm{i}$:

$$\boxed{\text{le cercle de centre } 1 + \mathrm{i} \text{ et de rayon } \sqrt{2}}$$

Ce cercle passe par l'origine.

- **(c)** $z-2$ est un imaginaire pur de partie imaginaire strictement positive :

$$\boxed{\text{la demi-droite ouverte } \{2+\mathrm{i}y \mid y>0\}}$$

- **(d)** Avec $A(2\mathrm{i})$ et $B(1-\mathrm{i})$, la condition dit que $M \neq A, B$ et que $(MA) \perp (MB)$:

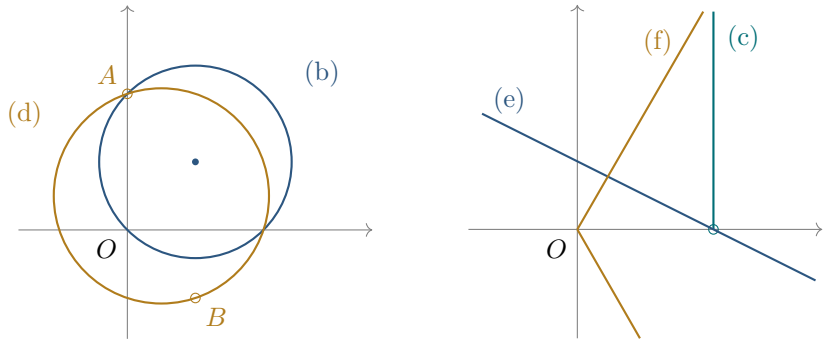
$$\boxed{\text{le cercle de diamètre } [AB] \text{ privé de } A \text{ et } B}$$

Son centre a pour affixe $\frac{1+\mathrm{i}}{2}$, et son rayon vaut $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

- **(e)** Avec $z=x+\mathrm{i}y$, le produit s'écrit $(x-2+\mathrm{i}y)(x+\mathrm{i}(1-y))$, dont la partie imaginaire vaut $(x-2)(1-y)+xy$, soit $x+2y-2$:

$$\boxed{\text{la droite d'équation } x+2y=2}$$

- **(f)** $2x=\sqrt{x^2+y^2}$ équivaut à $x \geqslant 0$ et $y^2=3x^2$: $\boxed{\text{les deux demi-droites } y=\pm\sqrt{3}\,x,\ x\geqslant 0}$



À gauche, les deux cercles (b) et (d), le second privé des points A et B, marqués d'un rond vide. À droite, la demi-droite ouverte (c), la droite (e), qui passe par 2 et par i, et les deux demi-droites (f), qui font un angle de $\frac{\pi}{3}$ avec l'axe des réels ; l'ensemble (a) est l'axe des réels lui-même.

EXERCICE 49 ⋆

1. On applique le théorème 5 du cours : pour $a \neq 1$, le centre a pour affixe $\frac{b}{1-a}$.

- **(a)** $a=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$, de module 1, et $1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$:

$$\boxed{\text{rotation d'angle } \frac{\pi}{3} \text{ et de centre } \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}=\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

- **(b)** $\boxed{\text{translation de vecteur d'affixe } 4-2\mathrm{i}}$ **(c)** $\boxed{\text{homothétie de rapport } 3 \text{ et de centre } -\frac{\mathrm{i}}{2}}$

- **(d)** $a=1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$, et $\frac{\sqrt{3}(1-\mathrm{i})}{-\mathrm{i}\sqrt{3}}=1+\mathrm{i}$:

$$\boxed{\text{similitude de centre } 1+\mathrm{i},\ \text{de rapport } 2 \text{ et d'angle } \frac{\pi}{3}}$$

2. D'après les définitions du cours :

$$\boxed{z \mapsto 2-\mathrm{i}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}(z-2+\mathrm{i}) \qquad \text{et} \qquad z \mapsto 3+2\mathrm{i}-2(z-3-2\mathrm{i})=-2z+9+6\mathrm{i}}$$

3. La symétrie de centre $3+\mathrm{i}$ est l'homothétie de rapport -1 : $s(z)=6+2\mathrm{i}-z$, et $r(z)=1+\mathrm{i}(z-1)$. Alors

$$r(s(z))=1+\mathrm{i}(5+2\mathrm{i}-z)=\boxed{-\mathrm{i}z-1+5\mathrm{i}},$$

une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$, puisque $-\mathrm{i} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}$, de centre $\frac{-1+5\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \boxed{2+3\mathrm{i}}$. Plus directement, s est la rotation d'angle π ; la composée de deux rotations d'angles π et $\frac{\pi}{2}$ est une rotation d'angle $\frac{3\pi}{2} \equiv -\frac{\pi}{2}$, puisque les coefficients se multiplient ; seul le centre demande un calcul.

EXERCICE 50 ⋆⋆

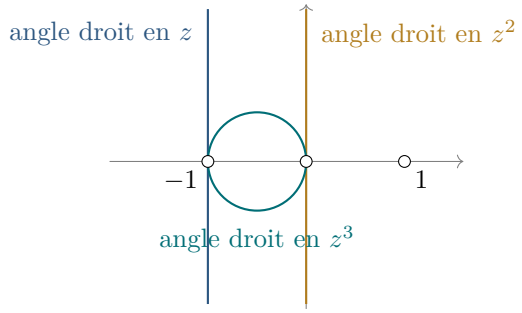
Les points sont distincts si et seulement si $z \notin \{-1, 0, 1\}$. Pour un tel z, on examine l'angle droit en chacun des trois sommets, grâce à la proposition 25 du cours.

- *En z :* $\dfrac{z^3 - z}{z^2 - z} = z + 1$ est imaginaire pur si et seulement si $\operatorname{Re} z = -1$.
- *En z^2 :* $\dfrac{z^3 - z^2}{z - z^2} = -z$ est imaginaire pur si et seulement si $\operatorname{Re} z = 0$.
- *En z^3 :* $\dfrac{z - z^3}{z^2 - z^3} = \dfrac{1+z}{z} = 1 + \dfrac{1}{z}$ est imaginaire pur si et seulement si $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} = -1$, soit $x^2 + y^2 + x = 0$.

Dans chaque cas le quotient est non nul, donc le triangle n'est pas aplati.

$$\boxed{(\{\operatorname{Re} z = -1\} \setminus \{-1\}) \ \cup \ (\mathrm{i}\mathbb{R} \setminus \{0\}) \ \cup \ (\mathcal{C} \setminus \{0, -1\})}$$

où $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $-\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.



Les trois ensembles sont représentés avec la couleur du sommet de l'angle droit ; les points -1, 0 et 1, où deux des trois points sont confondus, sont exclus.

EXERCICE 51 ⋆⋆

1. On divise $a+b+c=0$ par $a \neq 0$: $\frac{b}{a} + \frac{c}{a} = -1$. Les nombres $u = \frac{b}{a}$ et $v = \frac{c}{a}$ sont de module 1 ; en conjuguant, $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = -1$, soit $\frac{u+v}{uv} = -1$, d'où $uv = 1$. Ils sont donc solutions de

$$\boxed{z^2 + z + 1 = 0}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \{u, v\} = \{j, j^2\}.$$

2. Ainsi $\{b, c\} = \{aj, aj^2\}$: le triangle est l'image du triangle de sommets 1, j, j^2 par la rotation $z \mapsto az$. Ce dernier est équilatéral, puisque ses sommets sont ceux d'un polygone régulier, et une rotation conserve les distances.

$$\boxed{\text{le triangle de sommets } a, b, c \text{ est équilatéral}}$$

Géométriquement : le centre du cercle circonscrit, O, est aussi le centre de gravité $\frac{a+b+c}{3}$, ce qui n'arrive que pour un triangle équilatéral.

EXERCICE 52 ⋆⋆⋆

1. D'après la proposition 25 du cours, ABC est équilatéral direct si et seulement si $\frac{c-a}{b-a}$ a pour module 1 et pour argument $\frac{\pi}{3}$, c'est-à-dire $c - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}(b-a)$. Or $-j^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/3} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$. Ensuite, avec $1 + j^2 = -j$,

$$c = a(1+j^2) - j^2 b = -ja - j^2 b \iff j^2 c = -a - jb \iff \boxed{a + jb + j^2 c = 0},$$

la multiplication par j^2 étant inversible.

2. Le triangle $AC'B$ est équilatéral direct, puisque C' est du côté opposé à C : la question 1 donne $a+jc'+j^2b=0$, d'où, en multipliant par j^2, $c'=-j^2a-jb$. De même, avec les triangles directs $BA'C$ et $CB'A$:

$$\boxed{c'=-j^2a-jb \qquad a'=-j^2b-jc \qquad b'=-j^2c-ja}$$

Les centres sont les isobarycentres, par exemple $3g_C=a+b+c'=(1-j^2)a+(1-j)b$, et de même $3g_A=(1-j^2)b+(1-j)c$, $3g_B=(1-j^2)c+(1-j)a$. On calcule $3(g_A+jg_B+j^2g_C)$ coefficient par coefficient :

$$a:\ j(1-j)+j^2(1-j^2)=j-j^4=0, \qquad b:\ (1-j^2)+j^2(1-j)=1-j^3=0,$$

$$c:\ (1-j)+j(1-j^2)=1-j^3=0.$$

Donc $g_A+jg_B+j^2g_C=0$, et la question 1 conclut : $\boxed{\text{le triangle } G_AG_BG_C \text{ est équilatéral direct}}$ Sur la figure de l'énoncé, construite avec $A(0)$, $B(4)$ et $C(1{,}2+2{,}6\,\mathrm{i})$, les trois côtés du triangle bleu pétrole mesurent tous 3,531 à 10^{-3} près ✓.

EXERCICE 53 ⋆⋆⋆

1. La similitude S a pour écriture complexe $z\mapsto qz$ avec $q=\frac{\sqrt3}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}=\frac34+\mathrm{i}\frac{\sqrt3}{4}$, donc

$$\boxed{a_n=6q^n=6\Big(\frac{\sqrt3}{2}\Big)^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/6}}, \qquad a_{12}=6\Big(\frac34\Big)^6\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi}=\frac{2187}{2048}>0.$$

2. On calcule le quotient de la proposition 25, au sommet A_{n+1} :

$$\frac{a_n-a_{n+1}}{0-a_{n+1}}=\frac{1-q}{-q}=1-\frac1q=1-\frac{2}{\sqrt3}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}=1-\Big(1-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt3}\Big)=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt3},$$

qui est imaginaire pur : $\boxed{(A_{n+1}A_n)\perp(A_{n+1}O)}$

3. On a $|1-q|=\big|\frac14-\mathrm{i}\frac{\sqrt3}{4}\big|=\frac12$, donc $A_nA_{n+1}=|a_n|\,|q-1|=\boxed{3\Big(\frac{\sqrt3}{2}\Big)^n}$. La longueur de la ligne brisée est une somme géométrique :

$$L=\sum_{n=0}^{11}3\Big(\frac{\sqrt3}{2}\Big)^n=3\,\frac{1-(3/4)^6}{1-\sqrt3/2}=\frac{6\times3367/4096}{2-\sqrt3}=\boxed{\frac{10101\,(2+\sqrt3)}{2048}\approx18{,}41}$$

À retenir : une similitude de centre O transforme une suite de points en suite géométrique d'affixes ; les longueurs forment alors une suite géométrique de raison le rapport.

Exercices de synthèse

EXERCICE 54 ⋆⋆

1. **Fausse**. Pour $z=\mathrm{i}$, $|z|^2=1$ et $z^2=-1$. La bonne formule est $|z|^2=z\overline{z}$.
2. **Vraie**. C'est la méthode de Moivre, appliquée dans le cours, section 4.4.
3. **Vraie**. $(1+\mathrm{i})^2=2\mathrm{i}$, donc $(1+\mathrm{i})^{2026}=(2\mathrm{i})^{1013}=2^{1013}\,\mathrm{i}^{1013}=2^{1013}\,\mathrm{i}$, puisque $1013\equiv1\ [4]$.
4. **Fausse**. Pour $z=z'=\mathrm{i}$, $\mathrm{Re}(zz')=-1$, alors que $\mathrm{Re}\,z\times\mathrm{Re}\,z'=0$. En général,
$$\mathrm{Re}(zz')=\mathrm{Re}\,z\ \mathrm{Re}\,z'-\mathrm{Im}\,z\ \mathrm{Im}\,z'.$$
5. **Vraie**. $(1-\mathrm{i})^2=1-2\mathrm{i}-1=-2\mathrm{i}$, et les deux racines carrées sont opposées.

6. **Vraie**. C'est la proposition 23 du cours : $\mathrm{e}^{\overline{z}} = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\, z}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\, z} = \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{Re}\, z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\, z}}$.
7. **Fausse**. L'équation $z^2 + 2\mathrm{i}z = 0$ a pour discriminant -4, et pour solutions 0 et $-2\mathrm{i}$, qui ne sont pas conjuguées. La propriété n'est vraie que pour des coefficients réels.
8. **Vraie**. L'angle moitié donne $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = 2\mathrm{i}\sin\frac{a-b}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)/2}$, dont on prend le module.
9. **Fausse**. Si l'on avait $\mathrm{i}\overline{z} = \alpha z + \beta$ pour tout z, la valeur en 0 donnerait $\beta = 0$, la valeur en 1 donnerait $\alpha = \mathrm{i}$, et la valeur en i donnerait $1 = -1$. Cette application change les angles orientés en leurs opposés.
10. **Vraie**. Au sommet i, $\frac{-1-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$ est imaginaire pur : le triangle est rectangle en i, et même isocèle.

Bilan : six affirmations vraies (2, 3, 5, 6, 8, 10) et quatre fausses (1, 4, 7, 9).

EXERCICE 55 ⋆⋆

1. Comme $\overline{j^2} = j$ et $j + j^2 = -1$, $j^3 = 1$,

$$|a + bj^2|^2 = (a + bj^2)(a + bj) = a^2 + ab(j + j^2) + b^2 j^3 = \boxed{a^2 - ab + b^2}.$$

2. On développe, puis l'on remplace $j^4 = j$ par $-1 - j^2$:

$$(a + bj^2)(c + dj^2) = ac + (ad + bc)j^2 + bd\,j = \boxed{(ac - bd) + (ad + bc - bd)\,j^2}.$$

3. Si $s = |a+bj^2|^2$ et $s' = |c+dj^2|^2$ sont deux éléments de E, alors $ss' = |e+fj^2|^2 = e^2 - ef + f^2$ avec e, f entiers : $\boxed{E \text{ est stable par produit}}$. C'est le même argument qu'à l'exercice 19, où l'on remplace i par j^2, et l'ensemble $\{a + bi\}$ des entiers de Gauss par celui des entiers d'Eisenstein. Par exemple, $3 = 1 + 1 + 1 = 2^2 - 2 + 1$ appartient à E, alors qu'il n'appartient pas à S.

EXERCICE 56 ⋆⋆

1. Les racines carrées de $8 - 6\mathrm{i}$ sont $\pm(3 - \mathrm{i})$ (exercice 31). L'équation $f(z) = 1 + \mathrm{i}$ équivaut, pour $z \neq 2\mathrm{i}$, à $z^2 - (1 + \mathrm{i})z + 2\mathrm{i}(1 + \mathrm{i}) = 0$, de discriminant $(1 + \mathrm{i})^2 - 8\mathrm{i}(1 + \mathrm{i}) = 8 - 6\mathrm{i}$.

$$z = \frac{1 + \mathrm{i} \pm (3 - \mathrm{i})}{2}, \qquad \boxed{\text{les antécédents de } 1 + \mathrm{i} \text{ sont } 2 \text{ et } -1 + \mathrm{i}}$$

On vérifie : $f(2) = \frac{4}{2-2\mathrm{i}} = 1 + \mathrm{i}$ ✓.

2. Le nombre $1 + \mathrm{i}$ a deux antécédents :

$$\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$$

Soit $w \in \mathbb{C}$; l'équation $z^2 - wz + 2\mathrm{i}w = 0$ a au moins une solution d'après le théorème 4 du cours, et cette solution n'est pas 2i, puisque $(2\mathrm{i})^2 - 2\mathrm{i}w + 2\mathrm{i}w = -4 \neq 0$. C'est donc un antécédent de w :

$$\boxed{f \text{ est surjective}}$$

3. Le nombre w a un unique antécédent si et seulement si le discriminant $w^2 - 8\mathrm{i}w = w(w - 8\mathrm{i})$ est nul.

$$\boxed{w = 0,\ \text{d'antécédent } 0, \qquad \text{et} \qquad w = 8\mathrm{i},\ \text{d'antécédent } 4\mathrm{i}}$$

On vérifie que $f(4\mathrm{i}) = \frac{-16}{2\mathrm{i}} = 8\mathrm{i}$ ✓. Cet exercice reprend le corrigé de l'exercice 7 du chapitre 2, où l'existence d'une racine carrée complexe avait été admise.

EXERCICE 57 ⋆⋆

1. On raisonne par l'absurde, comme pour le théorème 1 du chapitre 1. Supposons que $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, fraction irréductible avec p et q entiers naturels non nuls ; alors $p^2 = 3q^2$. Le carré d'un entier n'est jamais de la forme $3k+2$: si $p = 3k$, $p^2 = 3 \times 3k^2$, et si $p = 3k \pm 1$, $p^2 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1$. Ainsi, p^2 n'est divisible par 3 que si p l'est. Ici 3 divise p^2, donc $p = 3p'$, puis $9p'^2 = 3q^2$, soit $q^2 = 3p'^2$: par le même argument, 3 divise q, ce qui contredit l'irréductibilité de la fraction. $\boxed{\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}}$

2. Supposons que les points A, B, C, d'affixes a, b, c dans $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, forment un triangle équilatéral, et posons $q = \frac{c-a}{b-a}$. On a $|q| = \frac{AC}{AB} = 1$ et $|q-1| = \frac{|c-b|}{|b-a|} = \frac{BC}{AB} = 1$. En écrivant $q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, la proposition 14 du cours donne $|q-1| = 2|\sin\frac{\theta}{2}|$, d'où $\sin\frac{\theta}{2} = \pm\frac{1}{2}$, puis $\theta \equiv \pm\frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$:

$$q = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi/3} = \frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Or $q = \frac{(c-a)\overline{(b-a)}}{|b-a|^2}$, où le numérateur appartient à $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, qui est stable par différence, produit et conjugaison, et où le dénominateur est un entier strictement positif : les parties réelle et imaginaire de q sont rationnelles. On aurait donc $\frac{\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{Q}$, ce qui contredit la question 1.

$$\boxed{\text{aucun triangle équilatéral n'a ses sommets dans } \mathbb{Z}[\mathrm{i}]}$$

3. On a $1 + j = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$, et les trois côtés mesurent $|1-0| = 1$, $|1+j| = 1$ et $|(1+j)-1| = |j| = 1$.

$$\boxed{\text{le triangle de sommets } 0,\ 1,\ 1+j \text{ est équilatéral}}$$

4. Avec $j = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$, on a

$$w = \Big(x - \frac{y}{2}\Big) + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,y \qquad \text{et} \qquad \mathrm{i}w = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,y + \mathrm{i}\Big(x - \frac{y}{2}\Big).$$

Supposons que $\mathrm{i}w = u + vj = (u - \frac{v}{2}) + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,v$ avec u et v entiers. L'identification des parties réelles et imaginaires donne

$$v - 2u = \sqrt{3}\,y \qquad \text{et} \qquad \sqrt{3}\,v = 2x - y.$$

Si $y \neq 0$, la première égalité donne $\sqrt{3} = \frac{v-2u}{y} \in \mathbb{Q}$, ce qui est impossible ; donc $y = 0$. Alors $\sqrt{3}\,v = 2x$; si v était non nul, on aurait $\sqrt{3} = \frac{2x}{v} \in \mathbb{Q}$, donc $v = 0$, puis $x = 0$. $\boxed{\mathrm{i}w \in \mathbb{Z}[j] \Rightarrow w = 0}$

Supposons maintenant que quatre points distincts d'affixes dans $\mathbb{Z}[j]$ forment un carré, et notons A l'un d'eux, B et D ses deux voisins sur le carré. On a $AB = AD$ et $(AB) \perp (AD)$; d'après la proposition 25 du cours, le quotient $\frac{d-a}{b-a}$ est de module 1 et imaginaire pur, donc égal à i ou à $-\mathrm{i}$. Dans le premier cas, on pose $w = b - a$, et dans le second $w = a - b$: dans les deux cas, w est un élément non nul de $\mathbb{Z}[j]$, qui est stable par différence, et $\mathrm{i}w = d - a$ appartient à $\mathbb{Z}[j]$. Cela contredit ce qui précède.

$$\boxed{\text{quatre points distincts de } \mathbb{Z}[j] \text{ ne forment jamais un carré}}$$

À retenir : le réseau triangulaire contient des triangles équilatéraux mais aucun carré, et le quadrillage contient des carrés mais aucun triangle équilatéral. Dans les deux cas, l'obstacle est l'irrationalité de $\sqrt{3}$, qui empêche la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ de conserver $\mathbb{Z}[j]$, et la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ de conserver $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$. On en déduit aussi qu'aucun hexagone régulier n'a ses sommets dans $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, puisque trois sommets d'un hexagone régulier pris de deux en deux forment un triangle équilatéral.

EXERCICE 58 ⋆⋆

1. D'après la proposition 21 du cours, $\mathbb{U}_n$ a n éléments, et le théorème 1 du chapitre 3 donne le nombre de ses parties à trois éléments.

$$\boxed{\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \text{ triangles}}$$

2. La proposition 14 du cours, $e^{ip} - e^{iq} = 2i \sin \frac{p-q}{2} e^{i(p+q)/2}$, appliquée au numérateur et au dénominateur, donne

$$\frac{a-c}{b-c} = \frac{2i \sin \frac{\alpha-\gamma}{2} e^{i(\alpha+\gamma)/2}}{2i \sin \frac{\beta-\gamma}{2} e^{i(\beta+\gamma)/2}} = \boxed{\frac{\sin \frac{\alpha-\gamma}{2}}{\sin \frac{\beta-\gamma}{2}} e^{i(\alpha-\beta)/2}}.$$

Le dénominateur est non nul : comme $b \neq c$, on a $\beta - \gamma \not\equiv 0\ [2\pi]$, donc $\frac{\beta-\gamma}{2} \not\equiv 0\ [\pi]$. De même, le numérateur est non nul puisque $a \neq c$. Le quotient s'écrit donc $\rho e^{i(\alpha-\beta)/2}$ avec ρ réel non nul, et la proposition 25 du cours permet de conclure.

- Le quotient est réel si et seulement si $e^{i(\alpha-\beta)/2} = \pm 1$, c'est-à-dire $\alpha \equiv \beta\ [2\pi]$, soit $a = b$, ce qui est exclu : $\boxed{\text{les trois points ne sont pas alignés}}$
- Le quotient est imaginaire pur si et seulement si $\frac{\alpha-\beta}{2} \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, c'est-à-dire $\alpha \equiv \beta + \pi\ [2\pi]$, soit $a = e^{i\pi} b = -b$:

$$\boxed{\text{le triangle est rectangle en } c \iff b = -a}$$

On retrouve un théorème de géométrie classique : un triangle inscrit dans un cercle est rectangle si et seulement si l'un de ses côtés est un diamètre, et l'angle droit est alors au sommet opposé à ce diamètre.

3. Si n est impair, $-a \notin \mathbb{U}_n$ pour tout $a \in \mathbb{U}_n$, puisque $(-a)^n = -a^n = -1$: d'après la question 2, $\boxed{\mathbb{U}_n \text{ n'a aucun triangle rectangle si } n \text{ est impair}}$

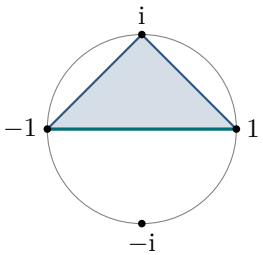
Si n est pair, $-a$ appartient à $\mathbb{U}_n$ dès que a y appartient, et $-a \neq a$; les éléments de $\mathbb{U}_n$ se répartissent donc en $\frac{n}{2}$ paires $\{a, -a\}$, les diamètres. Un triangle rectangle n'a qu'un angle droit : s'il était rectangle en c et en a, on aurait $b = -a$ et $b = -c$, donc $a = c$. On peut donc associer à chaque triangle rectangle son hypoténuse, qui est un diamètre. Pour un diamètre $\{a, -a\}$ fixé, les triangles rectangles d'hypoténuse $\{a, -a\}$ sont, d'après la question 2, les $\{a, -a, c\}$ avec $c \in \mathbb{U}_n \setminus \{a, -a\}$: il y en a $n - 2$. Le lemme des bergers (lemme 5 du chapitre 2) conclut.

$$\boxed{\mathbb{U}_n \text{ a } \frac{n}{2}(n-2) = \frac{n(n-2)}{2} \text{ triangles rectangles si } n \text{ est pair}}$$

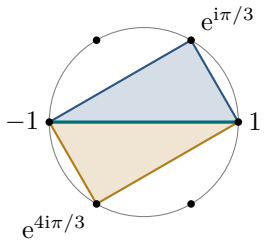
4. La proportion cherchée vaut

$$\frac{n(n-2)/2}{n(n-1)(n-2)/6} = \boxed{\frac{3}{n-1}}.$$

Pour $n = 4$, elle vaut 1 : les quatre triangles du carré sont rectangles, chacun étant la moitié du carré coupé par une diagonale. Pour $n = 6$, elle vaut $\frac{3}{5}$: 12 triangles rectangles sur 20. Les 8 autres sont les 2 triangles équilatéraux et les 6 triangles formés de trois sommets consécutifs ✓.



$n = 4$



$n = 6$

Sur chaque figure, le diamètre en bleu pétrole est l'hypoténuse des triangles rectangles représentés ; dans l'hexagone, chacun des trois diamètres porte quatre triangles rectangles, ce qui redonne $3 \times 4 = 12$. *À retenir :* la proportion $\frac{3}{n-1}$ tend vers 0 lorsque n grandit : parmi les triangles inscrits dans un polygone régulier à beaucoup de côtés, les triangles rectangles sont rares. Le chapitre 21 donnera à une telle proportion le sens d'une probabilité.

EXERCICE 59 ⋆⋆

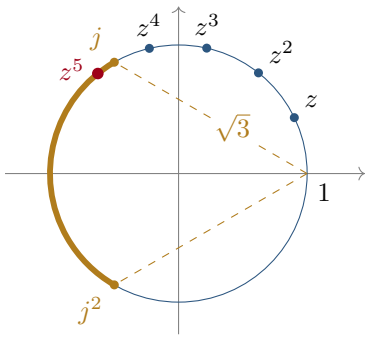
1. La proposition 14 du cours donne $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - 1 = 2\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2}$, et, comme $\frac{\varphi}{2} \in [0\,,\pi]$, le sinus est positif :

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - 1| = 2\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Sur le demi-cercle supérieur, les points d'ordonnée au moins $\frac{\sqrt{3}}{2}$ forment l'arc allant de $M(\frac{\pi}{3})$ à $M(\frac{2\pi}{3})$; ainsi $\sin\frac{\varphi}{2} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ équivaut à $\frac{\varphi}{2} \in [\frac{\pi}{3}\,,\frac{2\pi}{3}]$.

$$\boxed{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - 1| \geqslant \sqrt{3} \iff \varphi \in \left[\frac{2\pi}{3}\,,\frac{4\pi}{3}\right]}$$

Cet arc, tracé en ocre sur la figure ci-dessous, est celui qui joint j à j^2 en passant par -1 ; sa longueur est $\frac{2\pi}{3}$.



La figure représente, pour $\theta = 0{,}45$, les points z, z^2, …, z^5 : ils avancent sur le cercle par pas d'angle θ, et le premier qui atteint l'arc ocre est z^5, puisque $4\theta = 1{,}8 < \frac{2\pi}{3} \leqslant 5\theta = 2{,}25$. Les cordes en pointillé, de longueur $\sqrt{3}$, joignent 1 aux extrémités j et j^2 de l'arc.

2. Si $\theta \in [\frac{2\pi}{3}\,,\frac{4\pi}{3}]$, la question 1 donne directement $|z-1| \geqslant \sqrt{3}$: $\boxed{n = 1 \text{ convient}}$

3. L'ensemble A des entiers $n \geqslant 1$ tels que $n\theta \geqslant \frac{2\pi}{3}$ n'est pas vide, d'après la propriété d'Archimède admise au chapitre 1 : il suffit de prendre $n \geqslant \frac{2\pi}{3\theta}$. Il possède donc un plus petit élément n (proposition 4 du chapitre 1). Comme $\theta < \frac{2\pi}{3}$, l'entier 1 n'appartient pas à A, donc $n \geqslant 2$, et $n-1$, qui est un entier naturel non nul strictement plus petit que n, n'appartient pas à A : $(n-1)\theta < \frac{2\pi}{3}$. Par suite,

$$\frac{2\pi}{3} \leqslant n\theta = (n-1)\theta + \theta < \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

Comme $z^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ avec $n\theta \in [\frac{2\pi}{3}\,,\frac{4\pi}{3}[$, la question 1 donne $\boxed{|z^n - 1| \geqslant \sqrt{3}}$

Piège : il ne suffit pas de dire que les multiples de θ « finissent par dépasser » $\frac{2\pi}{3}$; il faut s'assurer qu'ils ne sautent pas par-dessus l'arc, ce que garantit le choix du *plus petit* entier n, puisque le pas θ est plus court que l'arc.

4. On a $\overline{z} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi-\theta)}$, avec $2\pi - \theta \in]0\,,\frac{2\pi}{3}[$. La question 3 fournit un entier $n \geqslant 1$ tel que $|\overline{z}^n - 1| \geqslant \sqrt{3}$. Or $\overline{z}^n - 1$ est le conjugué de $z^n - 1$, qui a donc le même module : $\boxed{|z^n - 1| \geqslant \sqrt{3}}$

Les intervalles $]0\,,\frac{2\pi}{3}[$, $[\frac{2\pi}{3}\,,\frac{4\pi}{3}]$ et $]\frac{4\pi}{3}\,,2\pi[$ recouvrent $]0\,,2\pi[$:

$$\boxed{\text{pour tout } z \in \mathbb{U}\setminus\{1\},\ \text{il existe } n \geqslant 1 \text{ tel que } |z^n - 1| \geqslant \sqrt{3}}$$

5. Pour $z = j$, les puissances j^n valent 1, j ou j^2, et la question 1 donne $|j-1| = |j^2-1| = \sqrt{3}$. Ainsi $|j^n - 1|$ ne prend que les valeurs 0 et $\sqrt{3}$: pour tout réel $c > \sqrt{3}$, aucun entier n ne vérifie $|j^n - 1| \geqslant c$. $\boxed{\text{la constante } \sqrt{3} \text{ est optimale}}$

Les puissances de j parcourent les sommets d'un triangle équilatéral, et c'est ce cas extrémal qui fixe la constante.

À retenir : l'argument de la question 3 est une version discrète du théorème des valeurs intermédiaires du chapitre 8 : une suite qui croît par pas plus courts qu'un intervalle ne peut pas franchir cet intervalle sans y entrer.

EXERCICE 60 ⋆⋆⋆

1. Un complexe de module 1 s'écrit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \in]-\pi\,,\pi]$, et sa partie réelle $\cos\theta$ est positive si et seulement si $\theta \in [-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}]$. On numérote ensuite les z_k par arguments croissants.

2. C'est la proposition 14 du cours : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}q} = 2\cos\frac{p-q}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)/2}$, avec $p=\theta_{2n+1}$, $q=\theta_1$. Notons que $\frac{\theta_{2n+1}-\theta_1}{2} \in [0\,,\frac{\pi}{2}]$, donc ce cosinus est positif.

3. Pour $k \in [\![2\,;2n]\!]$, $\theta_1 \leqslant \theta_k \leqslant \theta_{2n+1}$, donc $|\theta_k-\varphi| \leqslant \frac{\theta_{2n+1}-\theta_1}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$, et $\mathrm{Re}(z_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}) = \cos(\theta_k-\varphi) \geqslant 0$. En sommant, $\mathrm{Re}(S'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}) \geqslant 0$. Alors, avec $s = z_1+z_{2n+1} = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $\rho \geqslant 0$,

$$|S'+s|^2 = |S'|^2+|s|^2+2\rho\ \mathrm{Re}\,(S'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}) \geqslant |S'|^2, \qquad \text{donc} \qquad \boxed{|S'+z_1+z_{2n+1}| \geqslant |S'|}.$$

4. Pour $n=0$, $|z_1|=1$. Si le résultat est vrai pour $2n-1$ termes, il s'applique à S', qui en compte $2n-1 = 2(n-1)+1$, de parties réelles positives : $|S'| \geqslant 1$, puis $|\sum z_k| \geqslant |S'| \geqslant 1$. $\boxed{\Big|\sum_{k=1}^{2n+1} z_k\Big| \geqslant 1}$

L'hypothèse sur la parité est indispensable : avec deux termes, $\mathrm{i}+(-\mathrm{i})=0$.

EXERCICE 61 ⋆⋆⋆

1. L'exercice 16 donne $|z_k| \leqslant |\mathrm{Re}\,z_k|+|\mathrm{Im}\,z_k|$. On somme, en remarquant que $\sum|\mathrm{Re}\,z_k| = P_+ + P_-$ et que $\sum|\mathrm{Im}\,z_k| = Q_+ + Q_-$:

$$\boxed{P_+ + P_- + Q_+ + Q_- \geqslant \sum |z_k|}$$

2. Le plus grand des quatre nombres est au moins le quart de leur somme. Si c'est P_+, alors, avec $I = \{k \mid \mathrm{Re}\,z_k > 0\}$,

$$\Big|\sum_{k\in I} z_k\Big| \geqslant \mathrm{Re}\Big(\sum_{k\in I} z_k\Big) = P_+ \geqslant \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}|z_k|.$$

Dans les trois autres cas, on prend de même les indices de partie réelle négative, ou de partie imaginaire positive, ou négative, en minorant le module par $-\mathrm{Re}$, Im ou $-\mathrm{Im}$. une telle partie I existe

3. Avec $z_1=1$ et $z_2=-1$, les sommes partielles valent 0, 1 ou -1, de module au plus 1, alors que $\sum|z_k|=2$: la constante 1 est impossible, et même toute constante supérieure à $\frac{1}{2}$.

L'exercice 64 montre que la meilleure constante possible est $\frac{1}{\pi} \approx 0{,}318$; la constante $\frac{1}{4}$ obtenue ici n'en est pas loin, pour un raisonnement beaucoup plus simple.

EXERCICE 62 ⋆⋆⋆

1. L'identité du parallélogramme (exercice 16) donne

$$|a+b|^2+|a-b|^2 = 2(|a|^2+|b|^2) \leqslant 4M^2.$$

Si les deux réels $|a+b|$ et $|a-b|$ étaient strictement supérieurs à $\sqrt{2}\,M$, la somme de leurs carrés serait strictement supérieure à $4M^2$. $\boxed{\min\left(|a+b|,|a-b|\right) \leqslant \sqrt{2}\,M}$

Pour $n=1$, on prend $\varepsilon_1=1$, puisque $|z_1| \leqslant M \leqslant \sqrt{2}\,M$. Pour $n=2$, on prend $\varepsilon_1=1$ et l'on choisit ε_2 de sorte que $|z_1+\varepsilon_2 z_2|$ soit le plus petit des deux modules.

2. On développe le carré du module comme dans la démonstration du théorème 3 du cours :

$$|a-b|^2 = |a|^2+|b|^2-2\,\mathrm{Re}(a\bar{b}) \leqslant |a|^2+|b|^2-|a|\,|b|.$$

Notons x le plus grand des deux réels $|a|$ et $|b|$, et y le plus petit. Comme $y \geqslant 0$ et $x-y \geqslant 0$,

$$x^2+y^2-xy = x^2-y(x-y) \leqslant x^2 \leqslant M^2, \qquad \text{donc} \qquad \boxed{|a-b| \leqslant M}.$$

Si a et b sont non nuls, on écrit $a = |a|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ et $b = |b|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$; alors $\mathrm{Re}(a\overline{b}) = |a|\,|b|\cos(\alpha-\beta)$, et l'hypothèse s'écrit $\cos(\alpha-\beta) \geqslant \frac{1}{2}$: les vecteurs d'affixes a et b font un angle géométrique d'au plus $\frac{\pi}{3}$. Dans le triangle de sommets 0, a et b, le côté opposé à cet angle est alors au plus égal au plus long des deux autres.

3. Pour chaque m, on choisit un argument φ de a_m dans $[0\,,2\pi[$. Si $\varphi < \pi$, on pose $\sigma_m = 1$ et $\theta_m = \varphi$; sinon, on pose $\sigma_m = -1$ et $\theta_m = \varphi - \pi$, de sorte que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_m}$. Dans les deux cas,

$$a_m = \sigma_m\,|a_m|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_m}, \qquad \sigma_m \in \{-1,1\}, \qquad \theta_m \in [0\,,\pi[.$$

Quitte à renuméroter, on suppose $\theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \theta_3$. Les trois réels $d_1 = \theta_2 - \theta_1$, $d_2 = \theta_3 - \theta_2$ et $d_3 = \pi - (\theta_3 - \theta_1)$ sont positifs, car $\theta_3 - \theta_1 < \pi$, et leur somme vaut π : l'un d'eux est au plus égal à $\frac{\pi}{3}$. On utilise ensuite $\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}}\right) = \cos(\theta-\theta')$ et la décroissance du cosinus sur $[0\,,\pi]$, qui donne $\cos d \geqslant \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ pour $d \in [0\,,\frac{\pi}{3}]$.

- Si $d_1 \leqslant \frac{\pi}{3}$, on prend $k=1$, $\ell=2$ et $\eta = \sigma_1\sigma_2$: $\eta\ \mathrm{Re}(a_1\overline{a_2}) = \sigma_1^2\sigma_2^2\,|a_1|\,|a_2|\cos d_1 \geqslant \frac{1}{2}|a_1|\,|a_2|$.
- Si $d_2 \leqslant \frac{\pi}{3}$, on procède de même avec $k=2$, $\ell=3$ et $\eta = \sigma_2\sigma_3$.
- Si $d_3 \leqslant \frac{\pi}{3}$, on prend $k=1$, $\ell=3$ et $\eta = -\sigma_1\sigma_3$:

$$\eta\ \mathrm{Re}(a_1\overline{a_3}) = -|a_1|\,|a_3|\cos(\theta_3-\theta_1) = |a_1|\,|a_3|\cos d_3 \geqslant \frac{1}{2}|a_1|\,|a_3|.$$

$$\boxed{\text{il existe } k \neq \ell \text{ et } \eta \in \{-1,1\} \text{ tels que } \eta\ \mathrm{Re}\left(a_k\overline{a_\ell}\right) \geqslant \frac{1}{2}|a_k|\,|a_\ell|}$$

Géométriquement, les trois droites portant les vecteurs a_1, a_2, a_3 découpent le demi-tour en trois angles de somme π ; l'un d'eux mesure au plus $\frac{\pi}{3}$, et le signe η choisit le bon sens sur l'une des deux droites.

4. On fixe M et l'on démontre par récurrence sur $n \geqslant 1$ l'assertion $P(n)$: « pour tous complexes $z_1,\dots,z_n$ de modules au plus M, il existe des signes ε_k tels que $\left|\sum \varepsilon_k z_k\right| \leqslant \sqrt{2}\,M$ ». La question 1 établit $P(1)$ et $P(2)$. Soit $n \geqslant 3$ tel que $P(n-1)$ soit vraie, et $z_1,\dots,z_n$ de modules au plus M.

- Si l'un des z_k est nul, par exemple z_n, on applique $P(n-1)$ à $z_1,\dots,z_{n-1}$ et l'on prend $\varepsilon_n = 1$: la somme n'est pas modifiée.
- Sinon, la question 3, appliquée à z_1, z_2, z_3, fournit $k \neq \ell$ et η. Les complexes $a = z_k$ et $b = \eta z_\ell$ sont de modules au plus M et vérifient $\mathrm{Re}(a\overline{b}) = \eta\ \mathrm{Re}(z_k\overline{z_\ell}) \geqslant \frac{1}{2}|a|\,|b|$; d'après la question 2, $w = z_k - \eta z_\ell$ vérifie $|w| \leqslant M$. On applique $P(n-1)$ à la famille obtenue en remplaçant z_k et z_ℓ par le seul complexe w ; si δ est le signe obtenu pour w, on pose $\varepsilon_k = \delta$ et $\varepsilon_\ell = -\delta\eta$, de sorte que $\varepsilon_k z_k + \varepsilon_\ell z_\ell = \delta w$. La somme est la même que pour la famille réduite.

$$\boxed{\text{il existe } \varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n \in \{-1,1\} \text{ tels que } \left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k z_k\right| \leqslant \sqrt{2}\,M}$$

La démonstration est un algorithme : tant qu'il reste au moins trois vecteurs non nuls, on en fusionne deux qui font, au signe près, un angle d'au plus $\frac{\pi}{3}$, en les remplaçant par leur différence, qui reste de module au plus M ; après au plus $n-2$ fusions, il reste deux vecteurs, que l'on combine avec le meilleur signe. Par exemple, pour $z_1 = 1$, $z_2 = \mathrm{i}$, $z_3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ et $M = 1$, on fusionne z_1 et z_3, qui font un angle de $\frac{\pi}{4}$, en $w = 1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$, de module $2\sin\frac{\pi}{8} \approx 0{,}77$; puis $|w+\mathrm{i}| = (1-\frac{\sqrt{2}}{2})|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}-1$ et $|w-\mathrm{i}| = \sqrt{3}$, d'où le choix

$$|z_1+z_2-z_3| = \sqrt{2}-1 \approx 0{,}41 \leqslant \sqrt{2}\ \checkmark.$$

5. Pour $z_1 = 1$, $z_2 = \mathrm{i}$ et $M = 1$, les quatre sommes $\pm 1 \pm \mathrm{i}$ ont toutes pour module $\sqrt{2}$. Une constante $c < \sqrt{2}$ ne convient donc pas. $\boxed{\text{la constante } \sqrt{2} \text{ est optimale}}$

À retenir : la majoration ne dépend pas de n, alors que la somme sans signes peut atteindre nM. À l'inverse, on cherchait aux exercices 61 et 64 une partie dont la somme est grande ; ces deux questions,

rendre une somme petite ou grande par un bon choix de termes, se retrouvent dans de nombreux problèmes d'équilibrage, en dimension quelconque.

EXERCICE 63 ⋆⋆⋆⋆

1. Pour $t \in \mathbb{Q}$, le complexe $\frac{1-t^2}{1+t^2} + \mathrm{i}\,\frac{2t}{1+t^2} = \frac{1+\mathrm{i}t}{1-\mathrm{i}t}$ est de module 1, et ses parties réelle et imaginaire sont rationnelles. D'après l'exercice 45, l'application $t \mapsto \frac{1+\mathrm{i}t}{1-\mathrm{i}t}$ est injective ; comme $\mathbb{Q}$ est infini, $\boxed{G \text{ est infini}}$. Avec $t = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$:

$$\boxed{\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i}, \quad \frac{4}{5} + \frac{3}{5}\mathrm{i}, \quad \frac{15}{17} + \frac{8}{17}\mathrm{i}, \quad \frac{12}{13} + \frac{5}{13}\mathrm{i}}$$

2. Si $z = a+\mathrm{i}b$ et $z' = c+\mathrm{i}d$ sont dans G, alors $zz' = (ac-bd)+\mathrm{i}(ad+bc)$ a des parties rationnelles et un module égal à 1. L'application $z \mapsto z^2$ de G dans G a des fibres d'au plus deux éléments, puisque $z^2 = z'^2$ implique $z' = \pm z$; si son image était finie, de cardinal m, G aurait au plus $2m$ éléments, d'après le lemme des bergers du chapitre 2. $\boxed{\{z^2 \mid z \in G\} \text{ est infini}}$

3. L'angle moitié, comme à l'exercice 54, donne $|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\beta}| = 2|\sin(\alpha-\beta)|$, et

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \in \mathbb{Q},$$

puisque les quatre nombres $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos\beta$, $\sin\beta$ sont rationnels. $\boxed{|u^2 - v^2| \in \mathbb{Q}}$

4. On choisit n éléments distincts $w_1 = u_1^2, \dots, w_n = u_n^2$ de $\{z^2 \mid z \in G\}$, ce qui est possible d'après la question 2. Leurs distances mutuelles $|w_k - w_\ell|$ sont des rationnels, d'après la question 3 ; soit D un dénominateur commun à ces $\frac{n(n-1)}{2}$ rationnels. Les points d'affixes $Dw_1, \dots, Dw_n$ ont alors des distances mutuelles entières. Ils sont situés sur le cercle de centre O et de rayon D, et trois points distincts d'un cercle ne sont jamais alignés, car une droite coupe un cercle en au plus deux points.

$$\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 3, \text{ il existe } n \text{ points non alignés à distances mutuelles entières}}$$

Par exemple, avec $t = \frac{1}{2}$ et $t = \frac{1}{3}$, les carrés $\left(\frac{3+4\mathrm{i}}{5}\right)^2 = \frac{-7+24\mathrm{i}}{25}$ et $\left(\frac{4+3\mathrm{i}}{5}\right)^2 = \frac{7+24\mathrm{i}}{25}$ sont à distance $\frac{14}{25}$; avec $1 = 1^2$, les trois distances valent $\frac{14}{25}$, $\frac{6}{5}$ et $\frac{8}{5}$, et le facteur $D = 25$ donne un triangle de côtés 14, 30 et 40. Un théorème d'Erdős affirme qu'une telle famille ne peut pas être infinie si les points ne sont pas alignés : la construction de l'exercice ne fonctionne que pour un nombre fini de points.

EXERCICE 64 ⋆⋆⋆⋆

1. (a) Les θ_m sont espacés de $\frac{\pi}{p}$, et l'intervalle proposé, de longueur $\frac{\pi}{p}$, contient donc exactement un θ_r. Pour $k \in [\![0\,;2p-1]\!]$, on a $\theta_{r+k} = \theta_r + \frac{k\pi}{p}$.

- Si $k \in [\![0\,;p-1]\!]$, alors $\theta_{r+k} \in [\alpha - \frac{\pi}{2}\,, \alpha + \frac{\pi}{2}[$, donc $\alpha - \theta_{r+k} \in]-\frac{\pi}{2}\,, \frac{\pi}{2}]$ et $\boxed{\cos(\alpha-\theta_{r+k}) \geqslant 0}$
- Si $k \in [\![p\,;2p-1]\!]$, alors $\alpha - \theta_{r+k} \in]-\frac{3\pi}{2}\,, -\frac{\pi}{2}]$ et $\boxed{\cos(\alpha-\theta_{r+k}) \leqslant 0}$

(b) Les indices $r, \dots, r+N-1$ décrivent tous les restes modulo N, et $\theta_{m+N} = \theta_m + 2\pi$: la somme ne change pas si l'on fait varier m de r à $r+N-1$. D'après (a), seuls les p premiers termes sont non nuls, et la somme géométrique, avec $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\pi/p} = -1$, puis l'angle moitié $1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/p} = 2\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{N}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/N}$, donne

$$\sum_{k=0}^{p-1} \cos\left(\alpha - \theta_r - \frac{k\pi}{p}\right) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\theta_r)}\,\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/p}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}}{\mathrm{i}\sin(\pi/N)}\right).$$

$$\boxed{\sum_{m=0}^{N-1} \cos^+(\alpha-\theta_m) = \frac{\sin\psi}{\sin(\pi/N)}}$$

Le choix de r donne $\alpha - \theta_r \in]\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{N}\,, \frac{\pi}{2}]$, donc $\psi \in]\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{N}\,, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{N}]$, et $\cos\frac{\pi}{N} \leqslant \sin\psi \leqslant 1$, d'où l'encadrement annoncé.

2. (a) Comme à la question 2 de l'exercice 61, on minore le module par la partie réelle après rotation :

$$\Big|\sum_{k\in I_m} z_k\Big| \geqslant \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_m}\sum_{k\in I_m} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} |z_k|\cos^+(\alpha_k-\theta_m),$$

les termes d'indice hors de I_m ayant un $\cos^+$ nul. En sommant sur m, en intervertissant les deux sommes, puis en appliquant la question 1 à chaque α_k,

$$\sum_{m=0}^{N-1}\Big|\sum_{k\in I_m} z_k\Big| \geqslant \sum_{k=1}^{n}|z_k|\sum_{m=0}^{N-1}\cos^+(\alpha_k-\theta_m) \geqslant \frac{\cos(\pi/N)}{\sin(\pi/N)}\,S.$$

L'un des N termes de la somme de gauche est au moins égal à leur moyenne :

$$\boxed{\Big|\sum_{k\in I_m} z_k\Big| \geqslant c_N S \ \text{ pour un } m}$$

(b) On écrit $c_N = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi/N}{\sin(\pi/N)}\cdot\cos\frac{\pi}{N}$; la proposition 6 du cours donne $\frac{\sin x}{x}\to 1$ et $\cos x\to 1$ quand $x\to 0$, d'où $\boxed{c_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{\pi}}$

Pour chaque N pair, la question précédente fournit une partie J_N de $[\![1\,;n]\!]$ telle que $\big|\sum_{k\in J_N} z_k\big| \geqslant c_N S$. Ces parties sont en nombre fini, 2^n au plus, alors que les N pairs sont en nombre infini : l'une d'elles, I, est égale à J_N pour une infinité de valeurs de N. Si l'on avait $\big|\sum_{k\in I} z_k\big| < \frac{S}{\pi}$, on aurait aussi $\big|\sum_{k\in I} z_k\big| < c_N S$ pour tout N assez grand, puisque $c_N S$ tend vers $\frac{S}{\pi}$, ce qui contredit le choix de I.

$$\boxed{\text{il existe } I\subset[\![1\,;n]\!] \text{ tel que } \Big|\sum_{k\in I} z_k\Big| \geqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}|z_k|}$$

À retenir : ce raisonnement par finitude permet de passer d'une famille de constantes qui s'approchent de $\frac{1}{\pi}$ à la constante $\frac{1}{\pi}$ elle-même. Le chapitre 7 le formalisera par le passage à la limite dans les inégalités.

3. (a) Ici $z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}$, et $S = N$. Soit I une partie de somme $\sigma\neq 0$, que l'on écrit $\sigma = |\sigma|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$. Chaque terme vérifie $\mathrm{Re}(z_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}) = \cos(\theta_k-\alpha) \leqslant \cos^+(\alpha-\theta_k)$, et la question 1 donne

$$|\sigma| = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\sum_{k\in I} z_k\right) \leqslant \sum_{m=0}^{N-1}\cos^+(\alpha-\theta_m) \leqslant \boxed{\frac{1}{\sin(\pi/N)}}.$$

(b) Le rapport $\frac{|\sigma|}{S}$ est donc au plus $\frac{1}{N\sin(\pi/N)}$, qui tend vers $\frac{1}{\pi}$. Pour une constante $c>\frac{1}{\pi}$, on choisit N pair assez grand pour que $\frac{1}{N\sin(\pi/N)} < c$: la famille $\mathbb{U}_N$ n'a aucune partie de somme au moins égale à cS. $\boxed{\text{la meilleure constante est } \frac{1}{\pi}}$

(c) Les bornes valent $\frac{\cos(\pi/6)}{\sin(\pi/6)} = \sqrt{3}\approx 1{,}73$ et $\frac{1}{\sin(\pi/6)} = 2$. Trois racines consécutives donnent $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3} = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$, de module 2, ce qui atteint la borne supérieure :

$$\boxed{\max_I\Big|\sum_{k\in I} z_k\Big| = 2 = \frac{S}{3}} \qquad \text{avec} \qquad \frac{1}{3} > \frac{1}{\pi}\approx 0{,}318.$$

Plus généralement, la plus grande somme partielle de $\mathbb{U}_N$ est atteinte par $\frac{N}{2}$ racines consécutives et vaut exactement $\frac{1}{\sin(\pi/N)}$; pour $N=12$, le rapport vaut déjà 0,322. Le facteur $\frac{1}{\pi}$ est la valeur moyenne de $\cos^+$ sur une période, que le chapitre 18 écrira $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos t\,\mathrm{d}t$: la démonstration en est une version discrète.