EXERCICES – CHAPITRE 4

NOMBRES COMPLEXES ET TRIGONOMÉTRIE

⋆ *application directe* ⋆⋆ *mise en œuvre* ⋆⋆⋆ *problème* ⋆⋆⋆⋆ *problème long, en autonomie*

Trigonométrie

EXERCICE 1 ⋆

1. Calculer les valeurs exactes de $\cos\dfrac{538\pi}{3}$, $\sin\dfrac{123\pi}{6}$ et $\tan\Big(-\dfrac{77\pi}{4}\Big)$.
2. Soit x un réel tel que $\cos x = -\dfrac{4}{5}$. Calculer $\cos(x-\pi)$, $\cos(-\pi-x)$ et $\sin\Big(x+\dfrac{\pi}{2}\Big)$. Peut-on calculer $\sin x$? Le calculer lorsque $\pi \leqslant x < 2\pi$, puis en déduire $\tan x$.

EXERCICE 2 ⋆

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes, en s'aidant du cercle trigonométrique, puis représenter sur le cercle les points associés aux solutions.

(a) $\sin x = \dfrac{1}{2}$

(b) $\tan x = \sqrt{3}$

(c) $\sin(3x) = 1$

(d) $\cos(4x) = -2$

(e) $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(f) $\cos^2 x = \dfrac{3}{4}$

EXERCICE 3 ⋆⋆

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes. On donnera les solutions appartenant à $[0\,,2\pi[$ pour les deux dernières.

(a) $\sin(5x) = \sin\Big(\dfrac{2\pi}{3}+x\Big)$

(b) $\cos\Big(x+\dfrac{\pi}{4}\Big) = \cos(2x)$

(c) $\cos(3x) = \sin x$

(d) $\tan x = 2\sin x$

(e) $\cos(2x) + \cos x = 0$

(f) $\cos x - \cos(2x) = \sin(3x)$

EXERCICE 4 ⋆

Démontrer les égalités suivantes, en précisant pour quels réels x elles ont un sens.

1. $\dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \tan\dfrac{x}{2}$.
2. $\sin\Big(x-\dfrac{2\pi}{3}\Big) + \sin x + \sin\Big(x+\dfrac{2\pi}{3}\Big) = 0$.
3. $\dfrac{1}{\tan x} - \tan x = \dfrac{2}{\tan(2x)}$.

EXERCICE 5 ⋆⋆

1. Calculer $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$ en écrivant $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$.
2. Calculer à nouveau $\cos\dfrac{\pi}{12}$ en écrivant $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{6}$ et en utilisant une formule de duplication. Les deux résultats n'ont pas la même forme : montrer directement qu'ils sont égaux. Quelle méthode préférer, et pourquoi ?
3. Calculer $\tan\dfrac{\pi}{8}$, en choisissant une formule qui évite les racines carrées emboîtées.

EXERCICE 6 ⋆⋆

Résoudre les inéquations suivantes sur l'intervalle indiqué.

(a) $\sin x \geqslant \dfrac{1}{2}$, sur $[0\,,2\pi]$, puis sur $[-\pi\,,\pi]$, puis sur $\mathbb{R}$.

(b) $2\sin^2 x \leqslant 1$, sur $\mathbb{R}$.

(c) $\cos^2 x \geqslant \cos(2x)$, sur $\mathbb{R}$.

(d) $2\cos^2 x - 9\cos x + 4 \geqslant 0$, sur $\mathbb{R}$.

(e) $\tan x \geqslant 2\sin x$, sur $]-\pi\,,\pi]$.

EXERCICE 7 ⋆⋆

1. Pour quelles valeurs du réel m l'équation $\sqrt{3}\cos x - \sin x = m$ admet-elle des solutions réelles ? Les déterminer lorsque $m=\sqrt{2}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = \sqrt{3}\sin x + 1$.

EXERCICE 8 ⋆⋆

Déterminer les couples $(x,y)\in[-\pi\,,\pi]^2$ tels que

$$\begin{cases} 2\cos x + 3\sin y = \sqrt{2}-\dfrac{3}{2} \\ 4\cos x + \sin y = 2\sqrt{2}-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

On pourra commencer par résoudre un système linéaire, comme au chapitre 3.

EXERCICE 9 ⋆⋆

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$.

1. Déterminer son ensemble de définition. Calculer $f(x+2\pi)$ et $f(-x)$, et en déduire qu'il suffit d'étudier f sur $[0\,,\pi]$.
2. Montrer que $f'(x)=\dfrac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}$, puis dresser le tableau de variations de f sur $[0\,,\pi]$.
3. Déterminer le maximum de f sur $\mathbb{R}$ et les réels où il est atteint, puis tracer l'allure de la courbe de f sur $[-2\pi\,,2\pi]$.

EXERCICE 10 ⋆⋆⋆

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel x, $|\sin(nx)| \leqslant n\,|\sin x|$.
2. Soit $a \in]0\,,\pi[$. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\sin\dfrac{a}{2^n} \neq 0$ et

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{a}{2^k} = \frac{\sin a}{2^n \sin\dfrac{a}{2^n}}.$$

   On pourra reconnaître un produit télescopique, comme au chapitre 3.

3. Par une méthode analogue, calculer $\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}$.

EXERCICE 11 ⋆⋆⋆

On se propose de déterminer les réels t tels que $\cos t = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

1. Exprimer $\cos(4t)$ en fonction de $c = \cos t$.
2. On pose $c = \cos\dfrac{\pi}{5}$. Justifier que $\cos\dfrac{4\pi}{5} = -c$, et en déduire que c est racine de $8c^4 - 8c^2 + c + 1$. Factoriser cette expression par $(c+1)(2c-1)$.
3. En déduire que $\cos\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$, en justifiant soigneusement l'élimination des autres valeurs.
4. Résoudre l'équation proposée.

Le corps des nombres complexes

EXERCICE 12 ⋆

Écrire chacun des nombres complexes suivants sous forme algébrique, et calculer son module.

(a) $\dfrac{1}{\mathrm{i}}$ (b) $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ (c) $\dfrac{(2+3\mathrm{i})^2}{4-2\mathrm{i}}$ (d) $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}}$ (e) $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}\right)^2$ (f) $\dfrac{2+5\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} + \dfrac{2-5\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ (g) $\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$ (h) $\dfrac{2}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}$ (i) $\dfrac{(5-\mathrm{i})^6}{(3+2\mathrm{i})^5}$

Pour le dernier, on cherchera à éviter le développement des puissances.

EXERCICE 13 ⋆

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes, d'inconnue z.

(a) $2z + \mathrm{i} = \overline{z} + 1$ (b) $2z + 6\overline{z} = 3 + 2\mathrm{i}$ (c) $2z + 2\overline{z} = 2 + 3\mathrm{i}$ (d) $(3+2\mathrm{i})(z-1) = \mathrm{i}$

EXERCICE 14 ⋆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les nombres suivants, en distinguant des cas selon le reste de la division de n par un entier que l'on choisira avec soin :

$$\mathrm{i}^n, \qquad \sum_{k=0}^{n} \mathrm{i}^k \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=1}^{n} \mathrm{i}^k.$$

EXERCICE 15 ⋆⋆

Chacun des raisonnements suivants contient une erreur. La localiser, l'expliquer, et corriger la conclusion lorsque c'est possible.

(a) « On a $\mathrm{i} > 0$, donc, en multipliant par $\mathrm{i} > 0$, $\mathrm{i}^2 > 0$, c'est-à-dire $-1 > 0$. »

(b) « Pour tout complexe z, $|z|^2 = z^2$, donc l'équation $|z|^2 = -1$ a les solutions i et $-\mathrm{i}$. »

(c) « Pour a et b réels non nuls, $\dfrac{1}{a+\mathrm{i}b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{\mathrm{i}b} = \dfrac{1}{a} - \dfrac{\mathrm{i}}{b}$. »

(d) « Pour tout complexe z, $|z+\mathrm{i}| = |z| + 1$, donc le cercle $|z+\mathrm{i}| = 2$ est le cercle de centre 0 et de rayon 1. »

EXERCICE 16 ⋆⋆

Soit z et z' deux nombres complexes.

1. Démontrer l'*identité du parallélogramme* $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\big(|z|^2 + |z'|^2\big)$, et en donner une interprétation géométrique.
2. Montrer que $|z| + |z'| \leqslant |z+z'| + |z-z'|$, et étudier le cas d'égalité.
3. Montrer que $\dfrac{|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|}{\sqrt{2}} \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$, et préciser les cas d'égalité.

EXERCICE 17 ⋆⋆

Soit $n \geqslant 2$ et $z_1, \dots, z_n$ des complexes non nuls. Démontrer que

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} z_k\Big| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

si et seulement s'il existe des réels $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ strictement positifs tels que $z_k = \lambda_k z_1$ pour tout $k \in [\![2\,;n]\!]$. Interpréter géométriquement.

EXERCICE 18 ⋆⋆⋆

Soit a un complexe tel que $|a| < 1$.

1. Montrer que $1 - \overline{a}z \neq 0$ pour tout complexe z tel que $|z| \leqslant 1$.
2. Établir, pour tout complexe z tel que $\overline{a}z \neq 1$, l'identité

$$1 - \Big|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\Big|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2}.$$

3. En déduire que, si $|z| < 1$, alors $\Big|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\Big| < 1$, et que, si $|z| = 1$, ce module vaut 1.

EXERCICE 19 ⋆⋆

On note $S = \{n^2 + m^2 \mid (n,m) \in \mathbb{Z}^2\}$ l'ensemble des entiers sommes de deux carrés.

1. Montrer que $3 \notin S$.
2. En interprétant $n^2 + m^2$ comme le carré du module d'un nombre complexe, montrer que le produit de deux éléments de S appartient à S. Écrire ainsi $13 \times 17 = 221$ comme somme de deux carrés.
3. On note $S' = \{n^2 + m^2 + p^2 \mid (n,m,p) \in \mathbb{Z}^3\}$. Montrer que 3 et 5 appartiennent à S', mais pas 15. Pourquoi la méthode de la question 2 ne s'applique-t-elle pas ?

Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

EXERCICE 20 ⋆

Linéariser les expressions suivantes, c'est-à-dire les écrire comme des sommes de termes $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$ avec k entier.

(a) $\cos^4 x$ (b) $\sin^5 x$ (c) $\cos^2 x \sin^3 x$ (d) $\cos^3 x \sin(3x)$

EXERCICE 21 ⋆⋆

1. Exprimer $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
2. Montrer que $\cos(5x) = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$ pour tout réel x.
3. En appliquant la question 2 à $x = \dfrac{\pi}{10}$, calculer $\cos\dfrac{\pi}{10}$. Quelle propriété du cosinus permet de choisir la bonne valeur parmi celles que donne le calcul ?

EXERCICE 22 ⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et x un réel. Calculer les sommes suivantes, en précisant les valeurs de x à écarter.

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$.

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx)$.

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \cos(kx)}{2^k}$.

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^k x \cos(kx)$.

EXERCICE 23 ⋆⋆

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{\cos\dfrac{\pi}{2n}}{\sin\dfrac{\pi}{2n}}.$$

Vérifier la formule pour $n = 2$ et $n = 3$.

EXERCICE 24 ⋆⋆

1. Soit u, v et w trois éléments de $\mathbb{U}$. Montrer que $|u+v+w| = |uv+vw+wu|$.
2. Soit x, y et z trois réels tels que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = 0$. Montrer que $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}y} + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} = 0$, puis que
$$\cos(2x) + \cos(2y) + \cos(2z) = 0 \qquad \text{et} \qquad \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = \frac{3}{2}.$$

EXERCICE 25 ⋆⋆

1. Soit z et z' deux éléments de $\mathbb{U}$ tels que $zz' \neq -1$. Montrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est réel.
2. Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Montrer que $\mathrm{i}\dfrac{1+z}{1-z}$ est réel.
3. Réciproquement, soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}$. Montrer qu'il existe un unique réel a tel que $z = \dfrac{1+\mathrm{i}a}{1-\mathrm{i}a}$, et l'exprimer à l'aide d'un argument de z. Relier ce résultat aux formules en $t = \tan\frac{\theta}{2}$ du cours.

EXERCICE 26 ⋆⋆

Montrer que l'ensemble des complexes non nuls z tels que $z + \dfrac{1}{z}$ est réel est la réunion $\mathbb{U} \cup \mathbb{R}^*$.

Forme trigonométrique

EXERCICE 27 ⋆

Écrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique (x est un réel).

(a) $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

(b) -3

(c) $9\mathrm{i}$

(d) $\dfrac{-\mathrm{i}\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}$

(e) $\dfrac{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^3}{(1-\mathrm{i})^5}$

(f) $\sin x + \mathrm{i}\cos x$

EXERCICE 28 ⋆

1. Écrire sous forme algébrique $(1+\mathrm{i})^{18}$, $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}}\right)^{20}$ et $\dfrac{(1-\mathrm{i})^{10}(\sqrt{3}+\mathrm{i})^5}{(-1-\mathrm{i}\sqrt{3})^{10}}$.
2. Déterminer les entiers naturels n tels que $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^n$ soit un réel positif, puis ceux tels que $(\sqrt{3}+\mathrm{i})^n$ soit imaginaire pur.

EXERCICE 29 ⋆⋆

Soit a et b deux réels de l'intervalle $]0\,,\pi[$ et θ un réel tel que $\theta \not\equiv \pi\ [2\pi]$.

1. Écrire sous forme trigonométrique $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}$, $1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$ et $\dfrac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}}$, en vérifiant le signe des facteurs réels obtenus.
2. Simplifier $\dfrac{1+\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta}{1+\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta}$.

EXERCICE 30 ⋆⋆

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^n + (1-\mathrm{i}\sqrt{3})^n$, et en déduire que ce nombre est un entier relatif divisible par 2^n.
2. Montrer, sans développer, que $(2+\mathrm{i}\sqrt{5})^7 + (2-\mathrm{i}\sqrt{5})^7$ est réel.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\dfrac{19+7\mathrm{i}}{9-\mathrm{i}}\right)^n + \left(\dfrac{20+5\mathrm{i}}{7+6\mathrm{i}}\right)^n$ est réel.

Équations algébriques

EXERCICE 31 ⋆

Déterminer, sous forme algébrique, les racines carrées des nombres complexes suivants.

(a) i (b) $3-4\mathrm{i}$ (c) $8-6\mathrm{i}$ (d) $24-10\mathrm{i}$ (e) $1+2\mathrm{i}$

Calculer de même les racines carrées de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})$, en déduire $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8}$, et comparer avec l'exercice 5.

EXERCICE 32 ⋆

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes, d'inconnue z.

(a) $z^2+z+1=0$

(b) $z^2-2\mathrm{i}z+2-4\mathrm{i}=0$

(c) $4z^2-16z+11-12\mathrm{i}=0$

(d) $\mathrm{i}z^2+(4\mathrm{i}-3)z+\mathrm{i}-5=0$

(e) $z^4-(5-14\mathrm{i})z^2-2(5\mathrm{i}+12)=0$

(f) $z^2-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z+2\mathrm{i}\sin\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=0,\ \ \theta\in\mathbb{R}$

EXERCICE 33 ⋆

Déterminer les couples (x,y) de nombres complexes tels que

(a) $\begin{cases} x+y=3+4\mathrm{i} \\ xy=5+15\mathrm{i} \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x+y=3\mathrm{i} \\ xy=-1-3\mathrm{i} \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=2 \end{cases}$

EXERCICE 34 ⋆⋆

1. Montrer que l'équation $z^3+(1+\mathrm{i})z^2+(\mathrm{i}-1)z-\mathrm{i}=0$ admet une solution imaginaire pure, puis la résoudre complètement.
2. Résoudre l'équation $4\mathrm{i}z^3+2(1+3\mathrm{i})z^2-(5+4\mathrm{i})z+3(1-7\mathrm{i})=0$, sachant qu'elle admet une solution réelle.

EXERCICE 35 ⋆⋆

Déterminer les réels m tels que l'équation $z^3+(3+\mathrm{i})z^2-3z-(m+\mathrm{i})=0$ admette au moins une solution réelle, et préciser alors cette solution.

EXERCICE 36 ⋆⋆

1. Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Trouver deux réels p et q tels que $z^2+pz+q=0$. Sont-ils uniques ?
2. Soit p et q deux complexes, avec $q\neq 0$, et z_1, z_2 les solutions, éventuellement confondues, de l'équation $z^2-pz+q^2=0$. On suppose que $|z_1|=|z_2|$. Exprimer $\dfrac{p^2}{q^2}$ en fonction de $\dfrac{z_1}{z_2}$, et en déduire que $\dfrac{p}{q}$ est réel.

EXERCICE 37 ⋆⋆

L'introduction du cours rapporte le calcul de Bombelli, $(2+\mathrm{i})^3=2+11\mathrm{i}$.

1. Vérifier ce calcul, puis factoriser $z^3-(2+11\mathrm{i})$ par $z-(2+\mathrm{i})$, et résoudre l'équation $z^3=2+11\mathrm{i}$.
2. Vérifier que les trois solutions s'obtiennent en multipliant $2+\mathrm{i}$ par les trois racines cubiques de l'unité, ce que la partie suivante expliquera.

Racines n-ièmes

EXERCICE 38 ⋆

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes, et représenter les solutions des deux premières dans le plan complexe.

(a) $z^3 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$

(b) $z^6 = \dfrac{-4}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}$

(c) $z^8 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$

(d) $z^4 = -7 + 24\mathrm{i}$, sous forme algébrique

EXERCICE 39 ⋆⋆

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes, où $n \geqslant 2$ est un entier.

(a) $(z-1)^5 = (z+1)^5$ (b) $(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n$ (c) $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$

Pour la deuxième, montrer que toutes les solutions sont réelles, et les exprimer à l'aide de la fonction tangente.

EXERCICE 40 ⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $1 + 2z + 2z^2 + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0$.

EXERCICE 41 ⋆⋆

On pose $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/5}$.

1. Montrer que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$, et en déduire que $1 + 2\cos\dfrac{2\pi}{5} + 2\cos\dfrac{4\pi}{5} = 0$.
2. En déduire une équation du second degré dont $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ est solution, puis la valeur de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$.
3. Retrouver ainsi la valeur de $\cos\dfrac{\pi}{5}$ obtenue à l'exercice 11.

EXERCICE 42 ⋆⋆

Soit $n \geqslant 1$ un entier.

1. Calculer le produit des éléments de $\mathbb{U}_n$.
2. On note $Q = \{\omega^2 \mid \omega \in \mathbb{U}_n\}$. Montrer que $Q \subset \mathbb{U}_n$, puis que $Q = \mathbb{U}_n$ si et seulement si n est impair. Lorsque n est pair, décrire Q.

EXERCICE 43 ⋆⋆⋆

On pose $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/7}$, $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

1. Calculer $A + B$ et AB.
2. Montrer que $\operatorname{Im} A > 0$. *On pourra écrire* $\operatorname{Im} A$ *à l'aide de sinus d'angles de* $]0\,,\pi[$.
3. En déduire A et B, puis la valeur de $\sin\dfrac{2\pi}{7} + \sin\dfrac{4\pi}{7} - \sin\dfrac{6\pi}{7}$.

EXERCICE 44 ⋆⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $j = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$. On pose

$$S_0 = \sum_{0\leqslant 3p\leqslant n} \binom{n}{3p}, \qquad S_1 = \sum_{0\leqslant 3p+1\leqslant n} \binom{n}{3p+1}, \qquad S_2 = \sum_{0\leqslant 3p+2\leqslant n} \binom{n}{3p+2}.$$

1. Calculer $S_0 + S_1 + S_2$, $S_0 + jS_1 + j^2S_2$ et $S_0 + j^2S_1 + jS_2$ à l'aide de la formule du binôme.
2. Mettre $1 + j$ et $1 + j^2$ sous forme trigonométrique, puis en déduire S_0, S_1 et S_2.
3. Vérifier le résultat pour $n = 4$ en calculant directement les trois sommes.

EXERCICE 45 ⋆⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A un nombre complexe. On considère l'équation, d'inconnue $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}\}$,

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}\right)^n = A.$$

1. Montrer que l'application $z \mapsto \dfrac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}$ est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$, et donner sa réciproque.
2. Montrer que, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}\}$, le complexe z est réel si et seulement si $\left|\dfrac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}\right| = 1$.
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur A pour que l'équation ait des solutions et qu'elles soient toutes réelles.
4. Résoudre l'équation lorsque $A = 1$ et $n = 4$.

Exponentielle complexe

EXERCICE 46 ⋆

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes, d'inconnue z.

(a) $\mathrm{e}^z = 3\sqrt{3} - 3\mathrm{i}$
(b) $\mathrm{e}^z = \mathrm{i}$
(c) $\mathrm{e}^z = 0$
(d) $\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z} = 1$
(e) $\mathrm{e}^{2z} + (\mathrm{i} - 2)\mathrm{e}^z = 2\mathrm{i}$
(f) $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\overline{z}}$

Soit ensuite $\theta \in \mathbb{R}$. Donner le module et un argument du complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{i\theta}}$.

EXERCICE 47 ⋆⋆

1. Montrer que $|\mathrm{e}^z| \leqslant \mathrm{e}^{|z|}$ pour tout complexe z, et déterminer les cas d'égalité.
2. Déterminer l'image par l'exponentielle complexe de la droite d'équation $\mathrm{Re}\, z = a$, puis de la droite d'équation $\mathrm{Im}\, z = b$, où a et b sont deux réels.
3. Déterminer l'image par l'exponentielle de la bande $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leqslant \mathrm{Im}\, z < 2\pi\}$. L'exponentielle est-elle injective sur cette bande ?

Interprétation géométrique

EXERCICE 48 ⋆

Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant chacune des conditions suivantes.

(a) $|z - \mathrm{i}| = |z + \mathrm{i}|$
(b) $|(1 + \mathrm{i})z - 2\mathrm{i}| = 2$
(c) $\arg(z - 2) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$
(d) $\arg\left(\dfrac{z - 2\mathrm{i}}{z - 1 + \mathrm{i}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$
(e) $(z - 2)(\overline{z} + \mathrm{i}) \in \mathbb{R}$
(f) $z + \overline{z} = |z|$

EXERCICE 49 ⋆

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations dont l'écriture complexe suit.

   (a) $z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}z + 1$

   (b) $z \mapsto z + 4 - 2\mathrm{i}$

   (c) $z \mapsto 3z + \mathrm{i}$

   (d) $z \mapsto (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - \mathrm{i})$

2. Donner l'écriture complexe de la rotation de centre $2 - \mathrm{i}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$, et celle de l'homothétie de centre $3 + 2\mathrm{i}$ et de rapport -2.

3. Soit r la rotation de centre 1 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, et s la symétrie de centre $3 + \mathrm{i}$. Déterminer l'écriture complexe de $r \circ s$, puis sa nature et ses éléments caractéristiques.

EXERCICE 50 ⋆⋆

Déterminer les complexes z tels que les points d'affixes z, z^2 et z^3 soient deux à deux distincts et forment un triangle rectangle. Représenter l'ensemble obtenu, en distinguant selon le sommet de l'angle droit.

EXERCICE 51 ⋆⋆

Soit a, b et c trois éléments de $\mathbb{U}$ tels que $a + b + c = 0$.

1. Montrer que $\dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a} = -1$, puis que $\dfrac{b}{a}$ et $\dfrac{c}{a}$ sont les solutions d'une équation du second degré que l'on déterminera.

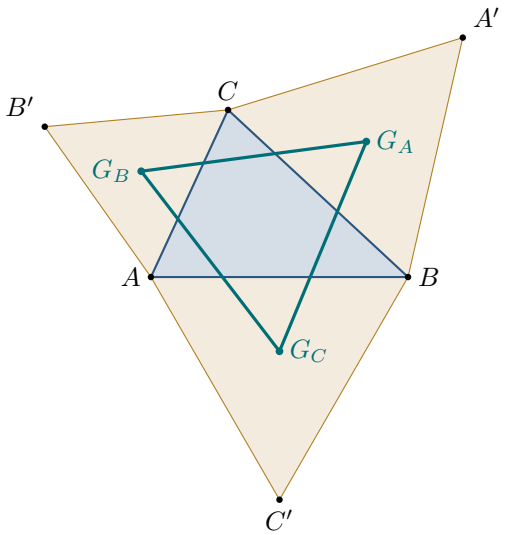
2. En déduire que le triangle de sommets a, b et c est équilatéral.

EXERCICE 52 ⋆⋆⋆

On note $j = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$. Un triangle ABC est dit *équilatéral direct* si $AB = AC$ et si $\frac{\pi}{3}$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

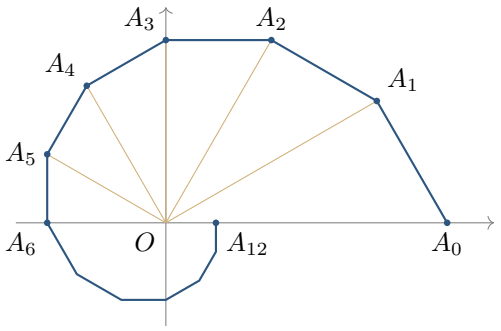
1. Soit A, B, C trois points distincts d'affixes a, b, c. Montrer que ABC est équilatéral direct si et seulement si $c - a = -j^2(b - a)$, puis si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$.

2. *Théorème de Napoléon.* On construit extérieurement au triangle direct ABC trois triangles équilatéraux ABC', BCA' et CAB', de centres respectifs G_C, G_A et G_B, comme sur la figure. Exprimer c', a' et b' en fonction de a, b, c et j, puis montrer que le triangle $G_AG_BG_C$ est équilatéral.



EXERCICE 53 ⋆⋆⋆

Dans le plan complexe, on note A_0 le point d'affixe 6 et S la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$. On définit les points A_n par la relation $A_{n+1} = S(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.



1. Déterminer l'affixe a_n du point A_n, et vérifier que A_{12} appartient à la demi-droite des réels positifs.
2. Montrer que, pour tout n, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.
3. Calculer la longueur A_nA_{n+1}, puis la longueur de la ligne brisée $A_0A_1 \dots A_{12}$.

Exercices de synthèse

EXERCICE 54 ⋆⋆

Vrai ou faux. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

1. Pour tout complexe z, $|z|^2 = z^2$.
2. Pour tout réel x, $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$.
3. Le nombre $(1+\mathrm{i})^{2026}$ est imaginaire pur.
4. Pour tous complexes z et z', $\mathrm{Re}(zz') = \mathrm{Re}\, z \times \mathrm{Re}\, z'$.
5. Les racines carrées de $-2\mathrm{i}$ sont $1-\mathrm{i}$ et $-1+\mathrm{i}$.
6. Pour tout complexe z, $\mathrm{e}^{\overline{z}} = \overline{\mathrm{e}^{z}}$.
7. Si le discriminant d'une équation du second degré à coefficients complexes est un réel strictement négatif, ses deux solutions sont conjuguées.
8. Pour tous réels a et b, $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}b}| = 2\left|\sin\dfrac{a-b}{2}\right|$.
9. L'application $z \mapsto \mathrm{i}\overline{z}$ est une similitude directe.
10. Les points d'affixes 1, i et -1 forment un triangle rectangle.

EXERCICE 55 ⋆⋆

On note $j = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$ et $E = \{a^2 - ab + b^2 \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1. Montrer que, pour tous entiers a et b, $a^2 - ab + b^2 = |a + bj^2|^2$.
2. Montrer que, pour tous entiers a, b, c, d, il existe deux entiers e et f tels que

$$(a+bj^2)(c+dj^2) = e + fj^2.$$

On pourra utiliser la relation $1 + j + j^2 = 0$.

3. En déduire que E est stable par produit, et comparer avec l'exercice 19.

EXERCICE 56 ⋆⋆

On considère l'application $f : \mathbb{C} \setminus \{2\mathrm{i}\} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{z^2}{z - 2\mathrm{i}}$.

1. Déterminer les racines carrées de $8 - 6\mathrm{i}$, puis les antécédents de $1 + \mathrm{i}$ par f.
2. L'application f est-elle injective ? Montrer qu'elle est surjective, au sens du chapitre 2.
3. Déterminer les complexes w qui ont un unique antécédent par f.

EXERCICE 57 ⋆⋆

On note $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] = \{a + b\mathrm{i} \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ l'ensemble des affixes des nœuds d'un quadrillage, et $\mathbb{Z}[j] = \{a + bj \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$, où $j = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$, l'ensemble des affixes des nœuds du réseau triangulaire déjà rencontré à l'exercice 55.

1. Montrer que $\sqrt{3}$ n'est pas rationnel, en adaptant la démonstration donnée au chapitre 1 pour $\sqrt{2}$. *On pourra examiner le reste de la division par* 3 *du carré d'un entier.*
2. Montrer qu'aucun triangle équilatéral n'a ses trois sommets d'affixes dans $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$: on ne peut pas dessiner un triangle équilatéral sur une feuille quadrillée en plaçant ses sommets sur des nœuds.
3. Vérifier qu'en revanche les points d'affixes 0, 1 et $1 + j$, qui appartiennent à $\mathbb{Z}[j]$, forment un triangle équilatéral.
4. Soit x et y deux entiers et $w = x + yj$. Montrer que si $\mathrm{i}w$ appartient à $\mathbb{Z}[j]$, alors $w = 0$. En déduire que quatre points distincts dont les affixes appartiennent à $\mathbb{Z}[j]$ ne sont jamais les sommets d'un carré.

EXERCICE 58 ⋆⋆

Soit $n \geqslant 3$ un entier. On appelle *triangle de* $\mathbb{U}_n$ toute partie de $\mathbb{U}_n$ à trois éléments, que l'on identifie au triangle dont les sommets ont pour affixes ces trois éléments.

1. Combien y a-t-il de triangles de $\mathbb{U}_n$?
2. Soit $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, $b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$ et $c = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}$ trois éléments distincts de $\mathbb{U}$. Montrer que
$$\frac{a - c}{b - c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\beta)/2}.$$
En déduire que les points d'affixes a, b, c ne sont pas alignés, et que le triangle qu'ils forment est rectangle en c si et seulement si $b = -a$.
3. Déterminer le nombre de triangles rectangles de $\mathbb{U}_n$, en distinguant selon la parité de n.
4. Lorsque n est pair, quelle proportion des triangles de $\mathbb{U}_n$ sont rectangles ? Le vérifier sur un dessin pour $n = 4$ et $n = 6$.

EXERCICE 59 ⋆⋆

Soit z un élément de $\mathbb{U}$ différent de 1. On se propose de montrer qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $|z^n - 1| \geqslant \sqrt{3}$: les points d'affixes z, z^2, z^3, … ne peuvent pas rester tous proches du point d'affixe 1.

1. Soit $\varphi \in [0\,, 2\pi]$. Montrer que $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - 1| \geqslant \sqrt{3}$ si et seulement si $\varphi \in [\frac{2\pi}{3}\,, \frac{4\pi}{3}]$, et représenter l'arc correspondant du cercle trigonométrique.
2. On écrit $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \in]0\,, 2\pi[$. Conclure lorsque $\theta \in [\frac{2\pi}{3}\,, \frac{4\pi}{3}]$.
3. On suppose que $\theta \in]0\,, \frac{2\pi}{3}[$. Justifier l'existence d'un plus petit entier $n \geqslant 1$ tel que $n\theta \geqslant \frac{2\pi}{3}$, montrer que $n\theta < \frac{4\pi}{3}$, et conclure.

4. Traiter le cas où $\theta \in]\frac{4\pi}{3}, 2\pi[$, en considérant $\overline{z}$.

5. Montrer que l'on ne peut pas remplacer $\sqrt{3}$ par un réel strictement plus grand.

EXERCICE 60 ⋆⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $z_1, \dots, z_{2n+1}$ des nombres complexes de module 1, de parties réelles positives ou nulles. On veut montrer que

$$\Big|\sum_{k=1}^{2n+1} z_k\Big| \geqslant 1.$$

1. Justifier qu'on peut écrire $z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}$ avec $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \cdots \leqslant \theta_{2n+1} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

2. Montrer que $z_1 + z_{2n+1} = 2\cos\dfrac{\theta_{2n+1} - \theta_1}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, avec $\varphi = \dfrac{\theta_1 + \theta_{2n+1}}{2}$.

3. Soit $S' = z_2 + \cdots + z_{2n}$. Montrer que $\mathrm{Re}\,(S'\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}) \geqslant 0$, puis que $|S' + z_1 + z_{2n+1}| \geqslant |S'|$.

4. Conclure par récurrence sur n. L'hypothèse sur le nombre de termes est-elle indispensable ?

EXERCICE 61 ⋆⋆⋆

Soit $z_1, \dots, z_n$ des nombres complexes. On veut montrer qu'il existe une partie I de $[\![1\,;n]\!]$ telle que

$$\Big|\sum_{k\in I} z_k\Big| \geqslant \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

1. On note P_+ la somme des parties réelles strictement positives des z_k, P_- la somme des opposés des parties réelles strictement négatives, et l'on définit de même Q_+ et Q_- avec les parties imaginaires. Montrer que $P_+ + P_- + Q_+ + Q_- \geqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

2. On suppose par exemple que P_+ est le plus grand des quatre nombres. Montrer que la partie $I = \{k \mid \mathrm{Re}\, z_k > 0\}$ convient, et conclure.

3. Donner un exemple qui montre que l'on ne peut pas remplacer $\frac{1}{4}$ par 1.

EXERCICE 62 ⋆⋆⋆

Soit $n \geqslant 1$ un entier, M un réel positif et $z_1, \dots, z_n$ des nombres complexes de modules au plus M. On veut montrer qu'il existe des signes $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ tels que

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k z_k\Big| \leqslant \sqrt{2}\,M.$$

Cet exercice est le pendant de l'exercice 61 : on y cherche à rendre une somme petite, et non grande, et la majoration obtenue ne dépend pas du nombre de termes.

1. Soit a et b deux complexes de modules au plus M. À l'aide de l'identité du parallélogramme de l'exercice 16, montrer que l'un des deux réels $|a+b|$ et $|a-b|$ est au plus égal à $\sqrt{2}\,M$. Traiter ainsi les cas $n = 1$ et $n = 2$.

2. On suppose de plus que $\mathrm{Re}(a\overline{b}) \geqslant \frac{1}{2}|a|\,|b|$. Montrer que $|a-b| \leqslant M$, et interpréter géométriquement cette hypothèse.

3. Soit a_1, a_2, a_3 trois complexes non nuls. Montrer qu'il existe deux indices distincts k et ℓ et un signe $\eta \in \{-1, 1\}$ tels que $\eta\,\mathrm{Re}\,(a_k\overline{a_\ell}) \geqslant \frac{1}{2}|a_k|\,|a_\ell|$. *On pourra écrire chaque a_m sous la forme $\pm|a_m|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_m}$ avec $\theta_m \in [0\,,\pi[$, puis ranger les θ_m par ordre croissant.*

4. Démontrer le résultat annoncé par récurrence sur n, et en déduire un procédé effectif de choix des signes.

5. À l'aide de $z_1 = 1$ et $z_2 = \mathrm{i}$, montrer que l'on ne peut pas remplacer $\sqrt{2}$ par une constante plus petite.

EXERCICE 63 ⋆⋆⋆⋆

On note G l'ensemble des nombres complexes de module 1 dont la partie réelle et la partie imaginaire sont rationnelles.

1. À l'aide des formules du cours exprimant $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de $t = \tan\frac{\theta}{2}$, montrer que G est infini. Donner quatre éléments de G qui ne sont ni réels ni imaginaires purs.
2. Montrer que le produit de deux éléments de G appartient à G, et que $\{z^2 \mid z \in G\}$ est infini.
3. Soit $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ et $v = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$ deux éléments de G. Montrer que $|u^2 - v^2| = 2|\sin(\alpha - \beta)|$ est rationnel.
4. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 3$, il existe n points du plan, non tous alignés, dont les distances mutuelles sont toutes des entiers.

EXERCICE 64 ⋆⋆⋆⋆

Cet exercice prolonge l'exercice 61 : on montre que la meilleure constante possible est $\frac{1}{\pi}$. On fixe un entier pair $N = 2p \geqslant 2$, on pose $\theta_m = \dfrac{2m\pi}{N}$ pour $m \in \mathbb{Z}$, et, pour un réel x, $x^+ = \max(x, 0)$.

1. Soit α un réel.
   (a) Justifier l'existence d'un entier r tel que $\theta_r \in \left[\alpha - \dfrac{\pi}{2}, \alpha - \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{p}\right[$, puis déterminer le signe de $\cos(\alpha - \theta_{r+k})$ selon que $k \in [\![0\,;p-1]\!]$ ou $k \in [\![p\,;2p-1]\!]$.
   (b) En déduire, à l'aide de la proposition 15 du cours, que
   $$\sum_{m=0}^{N-1} \cos^+(\alpha - \theta_m) = \frac{\sin\psi}{\sin(\pi/N)}, \qquad \text{où} \qquad \psi = \alpha - \theta_r + \frac{\pi}{N},$$
   puis l'encadrement
   $$\frac{\cos(\pi/N)}{\sin(\pi/N)} \leqslant \sum_{m=0}^{N-1} \cos^+(\alpha - \theta_m) \leqslant \frac{1}{\sin(\pi/N)}.$$
2. Soit $z_1, \ldots, z_n$ des complexes, que l'on écrit $z_k = |z_k|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_k}$, et $S = \sum |z_k|$. Pour $m \in [\![0\,;N-1]\!]$, on note $I_m = \{k \mid \mathrm{Re}(z_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_m}) > 0\}$.
   (a) Montrer qu'il existe un entier m tel que $\left|\sum_{k\in I_m} z_k\right| \geqslant c_N\, S$, avec $c_N = \dfrac{\cos(\pi/N)}{N\sin(\pi/N)}$.
   (b) Déterminer la limite de c_N lorsque N tend vers $+\infty$. En remarquant que $[\![1\,;n]\!]$ n'a qu'un nombre fini de parties, en déduire qu'il existe une partie I telle que $\left|\sum_{k\in I} z_k\right| \geqslant \dfrac{S}{\pi}$.
3. On prend pour $z_1, \ldots, z_N$ les éléments de $\mathbb{U}_N$.
   (a) Montrer que le module de toute somme partielle est au plus $\dfrac{1}{\sin(\pi/N)}$. *On pourra multiplier une somme partielle non nulle par* $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$, *où* α *est l'un de ses arguments.*
   (b) En déduire qu'aucune constante strictement supérieure à $\frac{1}{\pi}$ ne convient dans l'exercice 61.
   (c) Pour $N = 6$, déterminer la plus grande somme partielle des éléments de $\mathbb{U}_6$, et la comparer aux bornes obtenues.