CORRIGÉ – CHAPITRE 5

FONCTIONS USUELLES ET DÉRIVATION PRATIQUE

⋆ *application directe* ⋆⋆ *mise en œuvre* ⋆⋆⋆ *problème* ⋆⋆⋆⋆ *problème long, en autonomie*

Généralités sur les fonctions

EXERCICE 1 ⋆

(a) Le trinôme se factorise : $2x^2 - 12x + 18 = 2(x-3)^2 \geqslant 0$ pour tout réel x.

$$\boxed{D = \mathbb{R}}$$

(b) On a $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$, qui est strictement positif sauf en -2.

$$\boxed{D =]-\infty\,,-2[\cup]-2\,,+\infty[}$$

(c) Il faut $x \neq -7$ et $8 - 16x \geqslant 0$, puisque le dénominateur est un carré strictement positif.

$$\boxed{D =]-\infty\,,-7[\cup \left]-7\,,\frac{1}{2}\right]}$$

(d) Il faut à la fois $x < 3$, $x \geqslant 1$ et $x \neq 2$.

$$\boxed{D = [1\,,2[\cup]2\,,3[}$$

(e) Il faut $x > 0$ pour définir $\ln x$, puis $\ln x > 0$, c'est-à-dire $x > 1$.

$$\boxed{D =]1\,,+\infty[}$$

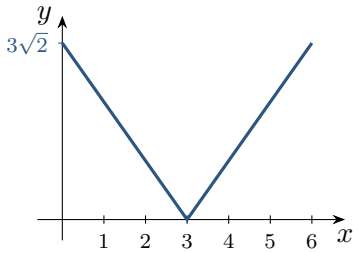
(f) Il faut de plus $\ln(\ln x) > 0$, soit $\ln x > 1$, c'est-à-dire $x > \mathrm{e}$.

$$\boxed{D =]\mathrm{e}\,,+\infty[}$$

La fonction (a) s'écrit, puisque $\sqrt{a^2} = |a|$ pour tout réel a,

$$\boxed{\sqrt{2x^2 - 12x + 18} = \sqrt{2}\,|x-3|}.$$

Sa courbe est formée de deux demi-droites issues du point $(3,0)$, de pentes $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$: c'est la courbe de $x \mapsto \sqrt{2}\,|x|$ translatée de $3\vec{\imath}$.



La figure montre un « V » de sommet $(3,0)$, qui coupe l'axe des ordonnées en $3\sqrt{2}$; la racine carrée d'un carré produit une valeur absolue, et donc un point anguleux.
Piège : en (b), on écrit souvent $\ln\left((x+2)^2\right) = 2\ln(x+2)$, ce qui réduirait l'ensemble de définition à $]-2\,,+\infty[$; la formule correcte est $2\ln|x+2|$.

EXERCICE 2 ⋆

1. Si f et g sont paires, $(f+g)(-x) = f(x)+g(x)$ et $(fg)(-x) = f(x)g(x)$: $f+g$ et fg sont paires. Si elles sont impaires, $(f+g)(-x) = -(f+g)(x)$ et $(fg)(-x) = (-f(x))(-g(x)) = (fg)(x)$. Si f est paire et g impaire, $(fg)(-x) = -f(x)g(x)$.

	$f+g$	fg
paire, paire	paire	paire
impaire, impaire	impaire	paire
paire, impaire	non déterminée	impaire

Pour la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, $x \mapsto x^2 + x$ n'est ni paire ni impaire, puisqu'elle vaut 2 en 1 et 0 en -1, alors que $x^2 + 0$ est paire, la fonction nulle étant impaire.

2. Si f est paire, $g(f(-x)) = g(f(x))$ pour toute fonction g. Si f est impaire, $g(f(-x)) = g(-f(x))$, qui vaut $g(f(x))$ si g est paire et $-g(f(x))$ si g est impaire.

$$\boxed{g \circ f \text{ est paire dès que } f \text{ est paire ou } g \text{ paire; impaire si } f \text{ et } g \text{ sont impaires}}$$

Les quatre cas sont donc déterminés.

3. Le calcul précédent montre que $h \circ f$ est paire pour toute fonction h. En revanche, la parité de $f \circ h$ n'est pas déterminée : avec $f(x) = x^2$, la fonction $h = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ donne $f \circ h = f$, paire, alors que $h : x \mapsto x+1$ donne $x \mapsto (x+1)^2$, qui n'est ni paire ni impaire.

$$\boxed{h \circ f \text{ est paire} \qquad f \circ h : \text{rien en général}}$$

À retenir : c'est la fonction appliquée *en premier* qui transmet sa parité.

EXERCICE 3 ⋆

Les quatre fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$, qui est symétrique. Pour (b) et (c), on multiplie numérateur et dénominateur par une puissance de e^x.

- **(a)** $\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x = -(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$: $\boxed{\text{impaire}}$
- **(b)** $\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}-1}{\mathrm{e}^{-2x}+1} = \dfrac{1-\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}$ en multipliant par e^{2x} : $\boxed{\text{impaire}}$
- **(c)** $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(\mathrm{e}^{-x}+1)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{e}^{2x}}{(1+\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$: $\boxed{\text{paire}}$
- **(d)** $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}+1} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}$, d'où $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}+1} - \dfrac{1}{2} = -\Big(\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1} - \dfrac{1}{2}\Big)$: $\boxed{\text{impaire}}$

La fonction $u : x \mapsto \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}$ s'écrit $u = \frac{1}{2} + v$, avec v impaire. D'après la proposition 1 du cours, sa courbe est la translatée de $\frac{1}{2}\vec{\jmath}$ d'une courbe symétrique par rapport à l'origine.

$$\boxed{\text{la courbe de } u \text{ admet le point } \Big(0, \frac{1}{2}\Big) \text{ pour centre de symétrie}}$$

Les fonctions (a) et (b) sont 2 sh et th, que le cours étudie en section 5.7.

EXERCICE 4 ⋆⋆

(a) L'expression a un sens pour $x < 2$, et vaut $-2\ln(2-x)$. On part de ln, on prend le symétrique par rapport à (Oy), ce qui donne $x \mapsto \ln(-x)$, puis on translate de $2\vec{\imath}$, ce qui donne la fonction $x \mapsto \ln\big(-(x-2)\big) = \ln(2-x)$, et l'on applique enfin l'affinité d'axe (Ox) et de rapport -2.

$$\boxed{D =]-\infty\,,2[\qquad \text{asymptote verticale } x = 2,\ \text{courbe passant par } (1,0)}$$

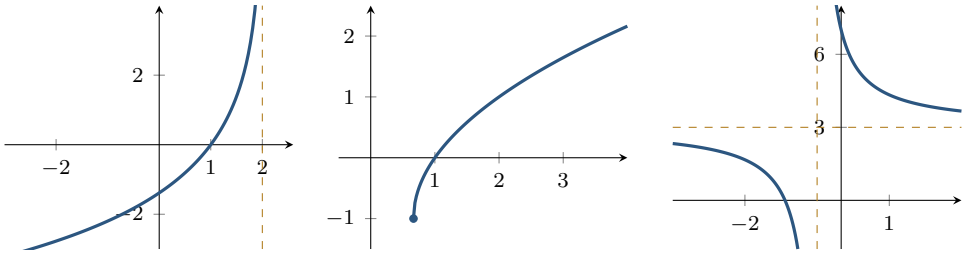
(b) L'expression a un sens pour $x \geqslant \frac{2}{3}$, et $\sqrt{3x-2} - 1 = \sqrt{3(x-\frac{2}{3})} - 1$. On part de $\sqrt{\cdot}$, on applique l'affinité d'axe (Oy) de rapport $\frac{1}{3}$ (proposition 1, (iii)), on translate de $\frac{2}{3}\vec{\imath}$, puis de $-\vec{\jmath}$.

$$\boxed{D = \left[\frac{2}{3}\,,+\infty\right[\qquad \text{origine de la courbe en } \left(\frac{2}{3},-1\right),\ \text{passage par } (1,0)}$$

(c) L'expression a un sens pour $x \neq -\frac{1}{2}$, et $\frac{4}{2x+1} + 3 = \dfrac{2}{x+\frac{1}{2}} + 3$. On part de l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$, on applique l'affinité d'axe (Ox) de rapport 2, puis la translation de vecteur $-\frac{1}{2}\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$.

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} \qquad \text{asymptotes } x = -\frac{1}{2} \text{ et } y = 3,\ \text{centre de symétrie } \left(-\frac{1}{2}, 3\right)}$$

(a) (b) (c)



Les asymptotes sont en pointillés ocre : chaque courbe garde la forme de sa courbe de référence, seuls son emplacement et ses proportions changent.

EXERCICE 5 ⋆⋆

1. Supposons D T-périodique, et soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \in D$, alors $x+T \in D$. Si $x \notin D$, alors $x+T \notin D$, sinon $x = (x+T) - T$ serait dans D. Dans les deux cas $\mathbb{1}_D(x+T) = \mathbb{1}_D(x)$. Réciproquement, si $\mathbb{1}_D$ est T-périodique et $x \in D$, alors $\mathbb{1}_D(x \pm T) = \mathbb{1}_D(x) = 1$, donc $x \pm T \in D$.

$$\boxed{D \text{ est } T\text{-périodique} \iff \mathbb{1}_D \text{ est } T\text{-périodique}}$$

La partie $\mathbb{Z}$ est 1-périodique ; pour $T \in]0\,,1[$, on a $0 \in \mathbb{Z}$ mais $T \notin \mathbb{Z}$, donc $\mathbb{Z}$ n'est pas T-périodique.

2. La fonction $\mathbb{1}_D$ est paire si et seulement si, pour tout x, $x \in D \iff -x \in D$. Elle est impaire si et seulement si $\mathbb{1}_D(-x) = -\mathbb{1}_D(x)$ pour tout x ; les deux membres étant l'un positif, l'autre négatif, ils sont nuls, ce qui impose $D = \varnothing$.

$$\boxed{\mathbb{1}_D \text{ paire} \iff D \text{ symétrique par rapport à } 0 \qquad \mathbb{1}_D \text{ impaire} \iff D = \varnothing}$$

3. Si $\mathbb{1}_D$ est croissante, $x \in D$ et $y \geqslant x$, alors $\mathbb{1}_D(y) \geqslant 1$, donc $y \in D$: avec chaque point, D contient toute la demi-droite à sa droite. Une telle partie, si elle n'est pas vide, est un intervalle, puisque tout réel compris entre deux de ses points est supérieur au premier, et cet intervalle n'est pas majoré. La réciproque est immédiate.

$$\boxed{\mathbb{1}_D \text{ croissante} \iff D = \varnothing \text{ ou } D \text{ est un intervalle non majoré}}$$

Ce sont $\varnothing$, $\mathbb{R}$, et les intervalles $[a\,,+\infty[$ et $]a\,,+\infty[$.

EXERCICE 6 ⋆⋆

Supposons f périodique, de période $T > 0$. Alors $f(T) = f(0) = 2$. Comme un cosinus vaut au plus 1, cela impose $\cos T = 1$ et $\cos(\alpha T) = 1$, donc il existe des entiers k et m tels que $T = 2k\pi$ et $\alpha T = 2m\pi$, avec $k \neq 0$ puisque $T > 0$. On en déduit $\alpha = \frac{m}{k}$.

Réciproquement, si $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$, posons $T = 2\pi q$. Alors $\cos(x+T) = \cos x$ et $\cos(\alpha x + \alpha T) = \cos(\alpha x + 2\pi p) = \cos(\alpha x)$.

$$\boxed{f \text{ est périodique } \iff \alpha \in \mathbb{Q}}$$

Par exemple, $x \mapsto \cos x + \cos(\sqrt{2}\,x)$ n'est pas périodique, bien que ce soit la somme de deux fonctions périodiques.

À retenir : l'argument décisif est que la valeur maximale 2 n'est atteinte que si les deux cosinus valent 1 simultanément ; une fonction périodique reprend nécessairement sa valeur en 0.

EXERCICE 7 ⋆⋆

La fonction $f \circ f \circ f$, strictement monotone, est injective (proposition 2 du cours) ; il en est donc de même de f, car $f(x) = f(y)$ entraînerait $f(f(f(x))) = f(f(f(y)))$.

Soit $x < y$. Supposons par l'absurde $f(x) \leqslant f(y)$; par injectivité, $f(x) < f(y)$. La croissance de $f \circ f$, appliquée aux réels $f(x) < f(y)$, donne l'inégalité $(f \circ f)(f(x)) \leqslant (f \circ f)(f(y))$, autrement dit $(f \circ f \circ f)(x) \leqslant (f \circ f \circ f)(y)$, ce qui contredit la décroissance stricte de $f \circ f \circ f$.

$$\boxed{f \text{ est strictement décroissante}}$$

L'astuce est d'appliquer l'hypothèse sur $f \circ f$ non pas à x et y, mais à leurs images par f.

EXERCICE 8 ⋆⋆

1. Posons $x = a + h$, de sorte que $2a - x = a - h$. La condition $f(2a-x) = 2b - f(x)$ s'écrit $f(a-h) - b = -(f(a+h) - b)$, et la condition sur l'ensemble de définition dit que $h \mapsto f(a+h) - b$ est définie sur un ensemble symétrique.

$$\boxed{\Omega(a,b) \text{ centre de symétrie } \iff h \mapsto f(a+h) - b \text{ impaire}}$$

D'après la proposition 1, la courbe de $h \mapsto f(a+h) - b$ est l'image de celle de f par la translation de vecteur $-a\vec{\imath} - b\vec{\jmath}$, qui envoie Ω sur O : on ramène le centre à l'origine.

2. On écrit $\frac{x+3}{x+5} = 1 - \frac{2}{x+5}$. Avec $a = -5$ et $b = 1$, la fonction $h \mapsto -\frac{2}{h}$ est impaire.

$$\boxed{\Omega(-5,1)}$$

3. Soit $a = -\frac{q}{3p}$, de sorte que $3pa + q = 0$. Le développement de $f(a+h)$ donne

$$f(a+h) - f(a) = ph^3 + (3pa+q)h^2 + (3pa^2 + 2qa + r)h = ph^3 + \Big(r - \frac{q^2}{3p}\Big)h,$$

qui est une fonction impaire de h.

$$\boxed{\text{centre de symétrie } \Big(-\frac{q}{3p}, f\Big(-\frac{q}{3p}\Big)\Big)}$$

4. Avec $a = -\frac{q}{2p}$, on obtient de même $f(a+h) - f(a) = ph^2$, fonction paire de h : $f(a-h) = f(a+h)$.

$$\boxed{\text{axe de symétrie } x = -\frac{q}{2p}}$$

EXERCICE 9 ⋆⋆⋆

1. Si $a_1 = a_2 = a$, alors $f(2a - x) = 2b_1 - f(x) = 2b_2 - f(x)$, donc $b_1 = b_2$, et les deux centres seraient confondus.

$$\boxed{a_1 \neq a_2}$$

2. On applique la relation du second centre au réel $2a_1 - x$, puis celle du premier centre :

$$f(2a_2 - (2a_1 - x)) = 2b_2 - f(2a_1 - x) = 2b_2 - (2b_1 - f(x)).$$

$$\boxed{f(x + 2(a_2 - a_1)) = f(x) + 2(b_2 - b_1)}$$

3. Posons $T = 2(a_2 - a_1) \neq 0$, $\lambda = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$ et $g(x) = f(x) - \lambda x$. Alors

$$g(x + T) = f(x) + 2(b_2 - b_1) - \lambda x - 2\lambda(a_2 - a_1) = g(x).$$

$$\boxed{f = g + (x \mapsto \lambda x), \quad \text{avec } g \text{ périodique de période } |T|}$$

4. La fonction $x \mapsto x + \sin x$ convient : pour tout $k \in \mathbb{Z}$, puisque $\sin(2k\pi - x) = -\sin x$, on a $f(2k\pi - x) = 2k\pi - x - \sin x = 2k\pi - f(x)$, donc chaque point $(k\pi, k\pi)$ est centre de symétrie.

$$\boxed{f(x) = x + \sin x, \quad \text{centres } (k\pi, k\pi),\ k \in \mathbb{Z}}$$

Géométriquement, composer deux symétries centrales donne une translation : c'est la clef de la question 2, et la raison pour laquelle deux centres en engendrent une infinité.

DÉRIVATION

EXERCICE 10 ⋆

On applique chaque fois les règles de la proposition 3, en particulier la dérivation d'une composée. Une racine carrée n'est dérivable, d'après le cours, que là où son argument est strictement positif.

(a) Il faut $1 + 2\cos x > 0$, soit $\cos x > -\frac{1}{2}$. La fonction est dérivable sur son ensemble de définition, et

$$\boxed{D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\,,\,\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right[\qquad f'(x) = \frac{-2\sin x}{1 + 2\cos x}}$$

(b) Il faut $x \geqslant 2$ et $\sqrt{x-2} \geqslant 1$, soit $x \geqslant 3$; les deux racines ont un argument strictement positif pour $x > 3$.

$$\boxed{D = [3\,,+\infty[\qquad f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{x-2}\,\sqrt{\sqrt{x-2} - 1}} \ \text{ sur }]3\,,+\infty[}$$

(c) La fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et la dérivée de $-\frac{1}{x^2}$ est $\frac{2}{x^3}$.

$$\boxed{D = \mathbb{R}^* \qquad f'(x) = \frac{2}{x^3}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)}$$

(d) Il faut $x \geqslant 0$, et alors $x + \sqrt{x} \geqslant 0$; pour $x > 0$, les deux arguments sont strictement positifs.

$$\boxed{D = [0\,,+\infty[\qquad f'(x) = \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x}\,\sqrt{x + \sqrt{x}}} \ \text{ sur }]0\,,+\infty[}$$

(e) Il faut $x^2 \neq 2$, et la formule du quotient donne

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \qquad f'(x) = \frac{-2(x^2 - 2)\sin(2x) - 2x\cos(2x)}{(x^2 - 2)^2}}$$

(f) La fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et la dérivée de $\sin\frac{1}{x}$ est $-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$.

$$\boxed{D=\mathbb{R}^* \qquad f'(x)=\cos x\,\sin\frac{1}{x}-\frac{\sin x}{x^2}\cos\frac{1}{x}}$$

Attention : en (b) et en (d), le cours ne permet pas de conclure à la dérivabilité aux points 3 et 0 ; on verra au chapitre 9 que ces fonctions n'y sont effectivement pas dérivables, leur courbe ayant une tangente verticale.

EXERCICE 11 ⋆⋆

La formule du quotient donne, pour tout réel x,

$$f'_m(x)=\frac{(x^2+1)-2x(x+m)}{(x^2+1)^2}=\frac{1-2mx-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

1. On a $f'_m(0)=1$ pour tout m : toutes les tangentes en 0 ont la même pente.

$$\boxed{T_0 : y=x+m, \quad \text{de pente 1 pour tout } m}$$

2. On a $f_m(1)=\frac{1+m}{2}$ et $f'_m(1)=-\frac{m}{2}$, d'où la tangente

$$y=\frac{1+m}{2}-\frac{m}{2}(x-1)=\frac{1}{2}+\frac{m}{2}(2-x).$$

En $x=2$, on obtient $y=\frac{1}{2}$ quel que soit m.

$$\boxed{\text{toutes les tangentes en 1 passent par le point } \left(2,\frac{1}{2}\right)}$$

La méthode consiste à écrire l'équation de la tangente comme une expression *affine en* m, puis à annuler le coefficient de m.

EXERCICE 12 ⋆⋆

1. La tangente à la courbe de ln au point d'abscisse $a>0$ a pour équation $y=\ln a+\frac{1}{a}(x-a)$. Elle passe par l'origine si et seulement si $\ln a-1=0$.

$$\boxed{a=\mathrm{e}, \quad \text{tangente } y=\frac{x}{\mathrm{e}}}$$

2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $g'(x)=1+2\mathrm{e}^{2x}>0$: elle est strictement croissante. Comme $g(-1)=-1+\mathrm{e}^{-2}<0$ et $g(0)=1>0$, et que $g([-1\,,0])$ est un intervalle d'après le théorème 2, la valeur 0 est atteinte en un point x_0 de $]-1\,,0[$, et en un seul par stricte monotonie.

Le carré de la distance de O au point (x,e^x) est $d(x)=x^2+\mathrm{e}^{2x}$, et $d'(x)=2x+2\mathrm{e}^{2x}=2g(x)$. Ainsi d décroît sur $]-\infty\,,x_0]$ et croît sur $[x_0\,,+\infty[$: elle atteint son minimum en x_0.

$$\boxed{M_0(x_0,\mathrm{e}^{x_0}) \text{ avec } x_0+\mathrm{e}^{2x_0}=0, \quad x_0\approx -0{,}426}$$

3. Un vecteur directeur de la tangente en M_0 est $\vec{u}(1,\mathrm{e}^{x_0})$, et $\overrightarrow{OM_0}$ a pour coordonnées (x_0,e^{x_0}). Leur produit scalaire vaut $x_0+\mathrm{e}^{2x_0}=g(x_0)=0$.

$$\boxed{\text{la tangente en } M_0 \text{ est perpendiculaire à } (OM_0)}$$

Le cercle de centre O passant par M_0 est donc tangent à la courbe en M_0 : la courbe reste à l'extérieur de ce cercle, ce qui est une autre façon de dire que M_0 est le point le plus proche.

EXERCICE 13 ⋆⋆

(a) La division euclidienne donne $\frac{2x^2-3x+1}{x+2} = 2x - 7 + \frac{15}{x+2}$. Le dernier terme tend vers 0 en $\pm\infty$ et vers $\pm\infty$ en -2, et il est du signe de $x+2$.

$$\boxed{\text{asymptotes } y = 2x-7 \text{ en } \pm\infty \text{ et } x = -2}$$

La courbe est au-dessus de l'asymptote oblique pour $x > -2$, au-dessous pour $x < -2$.

(b) La fonction est définie sur $\mathbb{R}$, puisque $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$. On multiplie par la quantité conjuguée :

$$\sqrt{x^2+x+1} - \left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{3/4}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}} \qquad \sqrt{x^2+x+1} + \left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{3/4}{\sqrt{x^2+x+1}-x-\frac{1}{2}}.$$

La première quantité tend vers 0 en $+\infty$, la seconde en $-\infty$, et toutes deux sont positives là où on les utilise.

$$\boxed{y = x+\frac{1}{2} \text{ en } +\infty, \qquad y = -x-\frac{1}{2} \text{ en } -\infty, \qquad \text{courbe au-dessus de chacune}}$$

L'erreur annoncée vient de ce que $\sqrt{x^2} = |x|$ et non x : la courbe est symétrique par rapport à la droite $x = -\frac{1}{2}$, et ses deux asymptotes le sont aussi.

(c) On pose $h = \frac{1}{x}$, qui tend vers 0 en $\pm\infty$. Alors $x\,\mathrm{e}^{1/x} - (x+1) = \frac{\mathrm{e}^h-1-h}{h}$, et $\frac{\mathrm{e}^h-1}{h}$ tend vers $\exp'(0) = 1$: la différence tend vers 0. L'inégalité $\mathrm{e}^h \geqslant 1+h$ de la proposition 5 donne son signe, celui de h.

$$\boxed{\text{asymptote } y = x+1 \text{ en } \pm\infty;\ \text{courbe au-dessus en } +\infty,\ \text{au-dessous en } -\infty}$$

(d) On a $\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \to 1$, mais $f(x) - x = \sqrt{x} \to +\infty$.

$$\boxed{\text{branche parabolique de direction } y = x,\ \text{pas d'asymptote}}$$

EXERCICE 14 ⋆⋆⋆

1. Il faut $x \neq -1$ et $\frac{x-1}{x+1} \geqslant 0$; un tableau de signes donne $x < -1$ ou $x \geqslant 1$.

$$\boxed{D =]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[}$$

L'ensemble D n'est pas symétrique par rapport à 0, puisque $1 \in D$ et $-1 \notin D$: la fonction n'est ni paire ni impaire, et il n'y a pas de réduction du domaine d'étude.

2. Notons $r(x) = \frac{x-1}{x+1}$. En $\pm\infty$, $r(x) \to 1$ et $f(x) \sim x$, donc f tend vers $\pm\infty$. En -1^-, $r(x) \to +\infty$ et $x \to -1$, donc $f(x) \to -\infty$: la droite $x = -1$ est asymptote verticale. Pour l'asymptote oblique, on utilise la quantité conjuguée :

$$f(x) - x = x\left(\sqrt{r(x)} - 1\right) = \frac{x\,(r(x)-1)}{\sqrt{r(x)}+1} = \frac{-\frac{2x}{x+1}}{\sqrt{r(x)}+1} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \frac{-2}{2} = -1.$$

$$\boxed{\lim_{\pm\infty} f = \pm\infty, \quad \lim_{-1^-} f = -\infty, \quad \Delta : y = x-1 \text{ asymptote en } \pm\infty}$$

3. Pour $x \in D$,

$$f(x)^2 - (x-1)^2 = \frac{x^2(x-1)}{x+1} - (x-1)^2 = \frac{(x-1)(x^2-(x-1)(x+1))}{x+1} = \boxed{\frac{x-1}{x+1}}.$$

Pour $x \geqslant 1$, les nombres $f(x)$ et $x-1$ sont positifs, et $f(x)^2 \geqslant (x-1)^2$: donc $f(x) \geqslant x-1$, avec égalité seulement en 1. Pour $x < -1$, ils sont négatifs, et $f(x)^2 > (x-1)^2$ donne $|f(x)| > |x-1|$, c'est-à-dire $f(x) < x-1$.

$$\boxed{\text{courbe au-dessus de } \Delta \text{ sur } [1, +\infty[\text{ (contact en } (1,0)),\ \text{au-dessous sur }]-\infty, -1[}$$

4. La fonction r est dérivable sur D, de dérivée $r'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$, et strictement positive sur $D \setminus \{1\}$, où $\sqrt{r}$ est donc dérivable. Alors

$$f'(x) = \sqrt{r(x)} + \frac{x\, r'(x)}{2\sqrt{r(x)}} = \frac{r(x)(x+1)^2 + x}{(x+1)^2\sqrt{r(x)}} = \frac{(x-1)(x+1)+x}{(x+1)^2\sqrt{r(x)}},$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^2+x-1}{(x+1)^2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}.$$

5. Le signe de f' est celui de x^2+x-1, dont les racines sont $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, c'est-à-dire $-\varphi$ et $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$. Seule la racine $-\varphi \approx -1{,}618$ appartient à D ; sur $[1\,, +\infty[$, le trinôme est positif. Pour l'extremum, $\varphi^2 = \varphi + 1$ et $\varphi(\varphi-1) = 1$ donnent

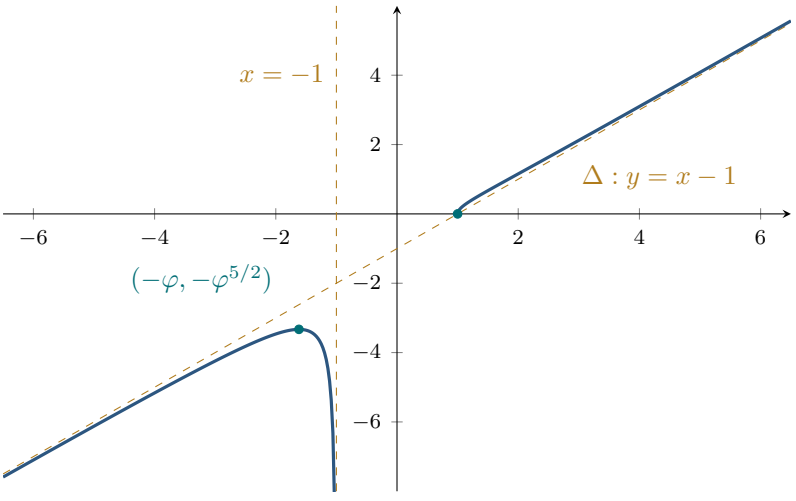
$$r(-\varphi) = \frac{\varphi+1}{\varphi-1} = \varphi^2 \cdot \varphi = \varphi^3, \qquad \boxed{f(-\varphi) = -\varphi \cdot \varphi^{3/2} = -\varphi^{5/2} \approx -3{,}330}.$$

x	$-\infty$		$-\varphi$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖		‖	$+$	
f	$-\infty$	↗	$-\varphi^{5/2}$	↘	$-\infty$		0	↗	$+\infty$

6. Pour $x > 1$, le taux d'accroissement en 1 vaut

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x}{x-1}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{x}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} \xrightarrow[x\to 1^+]{} +\infty.$$

$\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 1 : \text{ la courbe y a une tangente verticale}}$



La figure rassemble tous les résultats : les deux branches longent la même asymptote Δ, la branche de gauche par-dessous et celle de droite par-dessus, après avoir touché Δ en $(1, 0)$ avec une tangente verticale ; le maximum local se lit à gauche de l'asymptote verticale.

EXERCICE 15 ⋆⋆

(a) La fonction $u : x \mapsto x - \sin x$ a pour dérivée $1 - \cos x \geqslant 0$: elle est croissante, et $u(0) = 0$, donc $\sin x \leqslant x$ pour $x \geqslant 0$. Pour majorer $|\sin x|$, il faut aussi $-\sin x \leqslant x$: c'est clair si $x \geqslant 1$, puisque $|\sin x| \leqslant 1$, et si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $x \in [0\,,\pi]$ et $\sin x \geqslant 0$. La parité conclut pour $x < 0$.

$$\boxed{|\sin x| \leqslant |x| \quad \text{pour tout réel } x}$$

(b) La fonction $v : x \mapsto \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ a pour dérivée $x - \sin x$, positive sur $[0\,,+\infty[$ d'après (a) : v y est croissante, et $v(0) = 0$. Comme v est paire, $v \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1}$$

(c) La fonction $w : x \mapsto \tan x - x$ a pour dérivée $\tan^2 x \geqslant 0$ sur $[0\,,\frac{\pi}{2}[$, et $w(0) = 0$.

$$\boxed{\tan x \geqslant x \quad \text{sur } \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[}$$

(d) Posons $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ sur $]0\,,\frac{\pi}{2}]$; alors $g'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ avec $h(x) = x\cos x - \sin x$. Or $h'(x) = -x\sin x \leqslant 0$ et $h(0) = 0$, donc $h \leqslant 0$: g est décroissante, et $g(x) \geqslant g(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$. L'inégalité est aussi vraie en 0.

$$\boxed{\sin x \geqslant \frac{2}{\pi}\,x \quad \text{sur } \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]}$$

Graphiquement, sur $[0\,,\frac{\pi}{2}]$, la courbe du sinus est au-dessus de sa corde joignant $(0,0)$ à $(\frac{\pi}{2},1)$; le chapitre 9 y reconnaîtra la concavité du sinus.

EXERCICE 16 ⋆⋆

Posons $g(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$ sur $[0\,,\frac{\pi}{2}[$; l'inégalité demandée s'écrit $g \geqslant 0$. En notant $c = \cos x$, qui appartient à $]0\,,1]$, on obtient

$$g'(x) = 2c + \frac{1}{c^2} - 3 = \frac{2c^3 - 3c^2 + 1}{c^2} = \frac{(c-1)^2(2c+1)}{c^2} \geqslant 0,$$

la factorisation s'obtenant en divisant par $c - 1$, puis en remarquant que $2c^2 - c - 1$ s'annule encore en 1. Donc g est croissante, et $g(0) = 0$.

$$\boxed{\frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{3}\tan x \geqslant x \quad \text{sur } \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[}$$

Christiaan Huygens s'en servait pour approcher π : appliquée à $x = \frac{\pi}{n}$, l'inégalité encadre l'arc par une moyenne pondérée des côtés des polygones inscrit et circonscrit.

EXERCICE 17 ⋆⋆

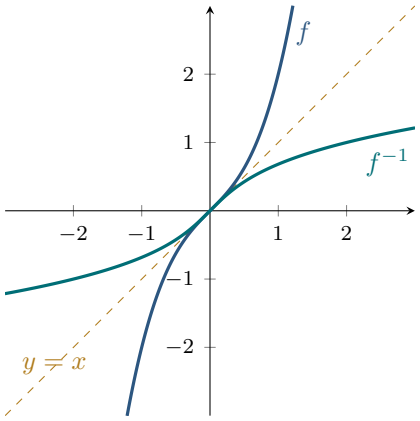
1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$: elle est strictement croissante, et tend vers $\pm\infty$ en $\pm\infty$. D'après le théorème 2, $f(\mathbb{R})$ est un intervalle, non majoré et non minoré, donc égal à $\mathbb{R}$, et f^{-1} est dérivable puisque f' ne s'annule pas.

$$\boxed{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ bijective}, \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{3f^{-1}(y)^2 + 1}}$$

2. On a $f(0) = 0$, $f(1) = 2$ et $f(2) = 10$, d'où, avec la formule du théorème 2 :

$$\boxed{f^{-1}(0) = 0,\ f^{-1}(2) = 1,\ f^{-1}(10) = 2 \qquad (f^{-1})'(0) = 1,\ (f^{-1})'(2) = \frac{1}{4},\ (f^{-1})'(10) = \frac{1}{13}}$$

3. Les deux courbes sont symétriques par rapport à la première bissectrice (proposition 4), et toutes deux sont tangentes à l'origine à la droite $y = x$, puisque $f'(0) = (f^{-1})'(0) = 1$.



La courbe de f, en ardoise, se replie sur celle de f^{-1}, en bleu pétrole, par pliage le long de la bissectrice ; les deux courbes se croisent à l'origine, où elles ont la même tangente.

4. Le théorème 2 exige aussi que f' ne s'annule pas. Or $g'(0) = 0$: la tangente à la courbe de g en 0 est horizontale, sa symétrique est verticale, et le taux d'accroissement de g^{-1} en 0, égal à $\frac{g^{-1}(y)}{y} = \frac{1}{g^{-1}(y)^2}$, tend vers $+\infty$.

$$\boxed{g^{-1} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^* \text{ mais pas en } 0}$$

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. D'après la proposition 4, $s(\Gamma_f) = \Gamma_{f^{-1}}$. Donc $s(\Gamma_f) = \Gamma_f$ équivaut à $\Gamma_{f^{-1}} = \Gamma_f$, c'est-à-dire à $f^{-1} = f$, puisqu'une fonction est déterminée par sa courbe ; et $f^{-1} = f$ équivaut à $f \circ f = \mathrm{id}_I$.

$$\boxed{s(\Gamma_f) = \Gamma_f \iff f \circ f = \mathrm{id}_I}$$

2. On écrit $f(x) = 1 + \frac{3}{x-1}$, qui ne vaut jamais 1 : f envoie I dans I. Pour $x \in I$,

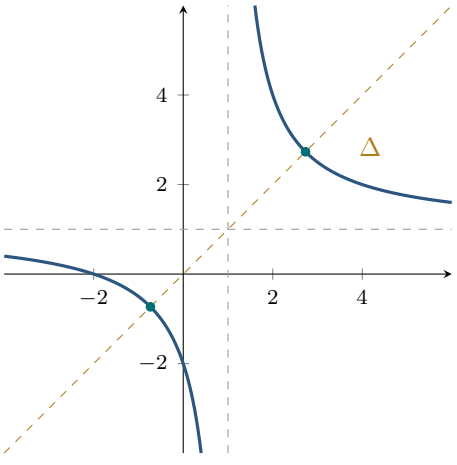
$$f(f(x)) = \frac{\frac{x+2}{x-1} + 2}{\frac{x+2}{x-1} - 1} = \frac{x + 2 + 2x - 2}{x + 2 - x + 1} = \frac{3x}{3} = x.$$

D'après le théorème 1 du chapitre 2, avec $g = f$, l'application f est bijective et $f^{-1} = f$.

$$\boxed{f \circ f = \mathrm{id}_I, \quad f^{-1} = f}$$

3. L'équation $f(x) = x$ s'écrit $x + 2 = x^2 - x$, soit $x^2 - 2x - 2 = 0$.

$$\boxed{\Gamma_f \cap \Delta = \{(1 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}),\ (1 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})\}}$$



La courbe est une hyperbole d'asymptotes $x = 1$ et $y = 1$, deux droites échangées par la symétrie s ; ses deux branches sont chacune symétriques par rapport à Δ, qu'elles coupent aux deux points calculés.

4. Le cas $a^2 + bc = 0$ est exclu parce que la fonction serait alors constante. On calcule $f(f(x))$ en multipliant numérateur et dénominateur par $cx - a$:

$$f(f(x)) = \frac{a(ax+b) + b(cx-a)}{c(ax+b) - a(cx-a)} = \frac{(a^2+bc)\,x}{a^2+bc} = x.$$

$$\boxed{x \mapsto \frac{ax+b}{cx-a} \text{ est sa propre réciproque sur } \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}}$$

L'exemple de la question 2 correspond à $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$.

EXERCICE 19 ⋆⋆

On utilise deux formules, qui se démontrent par une récurrence immédiate : pour $a \neq 0$ et b réels, $\big(\cos(ax+b)\big)^{(n)} = a^n \cos\big(ax + b + n\frac{\pi}{2}\big)$, de même avec le sinus, puisque dériver revient à ajouter $\frac{\pi}{2}$ à l'argument ; et $\Big(\dfrac{1}{ax+b}\Big)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n\, n!\, a^n}{(ax+b)^{n+1}}$.

(a) $\boxed{\big(\cos(3x)\big)^{(n)} = 3^n \cos\Big(3x + \dfrac{n\pi}{2}\Big)}$

(b) On décompose $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\Big)$.

$$\boxed{\Big(\frac{1}{x^2-1}\Big)^{(n)} = \frac{(-1)^n\, n!}{2}\Big(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\Big)}$$

(c) On factorise $2+5x-3x^2 = (3x+1)(2-x)$, puis on cherche $\frac{1}{(3x+1)(2-x)} = \frac{\alpha}{3x+1} + \frac{\beta}{2-x}$; en multipliant par $2-x$ puis en faisant $x = 2$, on trouve $\beta = \frac{1}{7}$, et de même $\alpha = \frac{3}{7}$.

$$\boxed{\Big(\frac{1}{2+5x-3x^2}\Big)^{(n)} = \frac{(-1)^n\, n!}{7}\Big(\frac{3^{n+1}}{(3x+1)^{n+1}} - \frac{1}{(x-2)^{n+1}}\Big)}$$

(d) La formule $\sin p \cos q = \frac{1}{2}\big(\sin(p+q) + \sin(p-q)\big)$ du chapitre 4 donne

$$\sin(5x-2)\cos(2x+1) = \frac{1}{2}\big(\sin(7x-1) + \sin(3x-3)\big).$$

$$\boxed{\big(\sin(5x-2)\cos(2x+1)\big)^{(n)} = \frac{1}{2}\Big(7^n \sin\Big(7x - 1 + \frac{n\pi}{2}\Big) + 3^n \sin\Big(3x - 3 + \frac{n\pi}{2}\Big)\Big)}$$

À retenir : on ne dérive pas un produit n fois ; on le transforme d'abord en somme, par décomposition ou par linéarisation.

EXERCICE 20 ⋆⋆⋆

1. On trouve $f_1'(x) = -\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{1/x}$, puis $f_2'(x) = \mathrm{e}^{1/x} - \frac{1}{x}\mathrm{e}^{1/x}$, et

$$f_2''(x) = -\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{1/x} + \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{1/x} + \frac{1}{x^3}\mathrm{e}^{1/x} = \frac{1}{x^3}\mathrm{e}^{1/x};$$

un calcul analogue donne $f_3^{(3)}(x) = -\frac{1}{x^4}\mathrm{e}^{1/x}$.

$$\boxed{\text{conjecture : } f_n^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\,\mathrm{e}^{1/x}}$$

2. Pour $n = 0$, c'est la formule du produit : $(xg)' = g + xg'$. Si la formule est vraie au rang n pour toute fonction $n+2$ fois dérivable g, on dérive une fois de plus :

$$(xg)^{(n+2)} = \big(x\,g^{(n+1)} + (n+1)g^{(n)}\big)' = g^{(n+1)} + x\,g^{(n+2)} + (n+1)g^{(n+1)} = x\,g^{(n+2)} + (n+2)g^{(n+1)},$$

ce qui est la formule au rang $n+1$.

$$\boxed{\big(x\,g(x)\big)^{(n+1)} = x\,g^{(n+1)}(x) + (n+1)\,g^{(n)}(x)}$$

3. La formule est vraie pour $n = 1$. Supposons-la vraie au rang n, et notons $E = \mathrm{e}^{1/x}$. En dérivant l'hypothèse, $f_n^{(n+1)}(x) = (-1)^n\big(-\frac{n+1}{x^{n+2}} - \frac{1}{x^{n+3}}\big)E$. La question 2, appliquée à $g = f_n$, donne alors

$$f_{n+1}^{(n+1)}(x) = xf_n^{(n+1)}(x) + (n+1)f_n^{(n)}(x) = (-1)^n\Big(-\frac{n+1}{x^{n+1}} - \frac{1}{x^{n+2}} + \frac{n+1}{x^{n+1}}\Big)E = \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}\,E.$$

$$\boxed{f_n^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\,\mathrm{e}^{1/x} \quad \text{pour tout } n \geqslant 1}$$

La question 2 est un cas particulier de la formule de Leibniz, qui donne la dérivée n-ième d'un produit et que le chapitre 9 démontrera en toute généralité.

EXPONENTIELLE ET LOGARITHME

EXERCICE 21 ⋆

(a) Avec $t = \mathrm{e}^x > 0$, l'équation devient $t^2 - t - 6 = (t-3)(t+2) = 0$, et seule la racine $t = 3$ est positive.

$$\boxed{x = \ln 3}$$

(b) En multipliant par $\mathrm{e}^x \neq 0$, on obtient $3t^2 - 20t - 7 = 0$, de discriminant $484 = 22^2$, de racines 7 et $-\frac{1}{3}$.

$$\boxed{x = \ln 7}$$

(c) L'équation a un sens pour $x^2 > 1$ et $x > \frac{1}{4}$, c'est-à-dire $x > 1$. Elle équivaut alors, par injectivité de ln, à $4(x^2-1) = 4x - 1$, soit $4x^2 - 4x - 3 = 0$, de racines $\frac{3}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.

$$\boxed{x = \frac{3}{2}}$$

(d) L'équation a un sens pour $x > 1$, et s'écrit $\ln\frac{x+2}{x+1} = \ln(x-1)$, soit $x + 2 = (x-1)(x+1)$, c'est-à-dire $x^2 - x - 3 = 0$. Des deux racines $\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$, seule la plus grande est supérieure à 1.

$$\boxed{x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}}$$

(e) On remarque que $4x^2+3x-7=(x-1)(4x+7)$. L'équation a un sens pour $x\notin\{1,-2,-\frac{7}{4}\}$, et s'écrit alors $\ln\left(|x-1|\,|x+2|\right)=\ln\left(|x-1|\,|4x+7|\right)$, soit $|x+2|=|4x+7|$. Les cas $x+2=4x+7$ et $x+2=-(4x+7)$ donnent $x=-\frac{5}{3}$ et $x=-\frac{9}{5}$, qui ne sont pas exclus.

$$\boxed{x\in\left\{-\frac{9}{5},-\frac{5}{3}\right\}}$$

(f) L'équation a un sens pour $x\neq 0$, et $\ln(x^2)=2$ équivaut à $x^2=\mathrm{e}^2$.

$$\boxed{x=\mathrm{e}\quad\text{ou}\quad x=-\mathrm{e}}$$

L'élève a utilisé la formule $\ln(x^n)=n\ln x$, qui n'est valable que pour $x>0$ (proposition 6), et a ainsi perdu la solution $-\mathrm{e}$. La formule valable pour tout $x\neq 0$ est $\ln(x^2)=2\ln|x|$.

EXERCICE 22 ⋆

(a) Avec $t=\mathrm{e}^x>0$, l'inéquation s'écrit $t^2+2t-5\leqslant 0$; les racines du trinôme sont $-1\pm\sqrt{6}$, et le trinôme est négatif entre elles. Pour $t>0$, cela donne $t\leqslant\sqrt{6}-1$.

$$\boxed{x\in\left]-\infty\,,\ln(\sqrt{6}-1)\right]}$$

(b) Pour $x>1$, l'inéquation s'écrit $\ln\frac{x^2-1}{x^2}<-1$, soit $1-\frac{1}{x^2}<\frac{1}{\mathrm{e}}$, c'est-à-dire $x^2<\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$.

$$\boxed{x\in\left]1\,,\sqrt{\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}}\right[\approx]1\,;1{,}258[}$$

(c) L'inéquation a un sens pour $x>-\frac{1}{2}$ et $x^2>2$, soit $x>\sqrt{2}$. Par croissance stricte de ln, elle équivaut à $2x+1\geqslant x^2-2$, soit $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)\leqslant 0$, c'est-à-dire $-1\leqslant x\leqslant 3$.

$$\boxed{x\in\left]\sqrt{2}\,,3\right]}$$

EXERCICE 23 ⋆⋆

(a) En prenant le logarithme, le système devient linéaire : $x+2y=\ln 5$ et $2x-y=-2\ln 5$. La seconde équation donne $y=2x+2\ln 5$, puis la première $5x+4\ln 5=\ln 5$.

$$\boxed{x=-\frac{3}{5}\ln 5,\qquad y=\frac{4}{5}\ln 5}$$

(b) Il faut $x>0$ et $y>0$. La première équation s'écrit $\ln(x^2)=\ln(2y^3)$, soit $x^2=2y^3$, et l'on remplace x par $y+2$: $2y^3-(y+2)^2=2y^3-y^2-4y-4=0$. Cette équation admet la racine $y=2$, et $2y^3-y^2-4y-4=(y-2)(2y^2+3y+2)$, où le second facteur a un discriminant $9-16<0$.

$$\boxed{(x,y)=(4,2)}$$

On vérifie : $2\ln 4-3\ln 2=4\ln 2-3\ln 2=\ln 2$ ✓.

EXERCICE 24 ⋆

1. On a $T(0) = A + 20 = 31$, donc $A = 11$, puis $T(1) = 11\,\mathrm{e}^{-c} + 20 = 29$, donc $\mathrm{e}^{-c} = \frac{9}{11}$.

$$\boxed{A = 11, \qquad c = \ln\frac{11}{9} \approx 0{,}201\ \mathrm{h}^{-1}}$$

2. On cherche t tel que $11\,\mathrm{e}^{-ct} + 20 = 37$, soit $\mathrm{e}^{-ct} = \frac{17}{11}$, c'est-à-dire

$$t = -\frac{\ln(17/11)}{\ln(11/9)} \approx -2{,}169\ \mathrm{h} \approx -2\ \mathrm{h}\ 10\ \mathrm{min}.$$

$$\boxed{\text{décès vers 20 h 50}}$$

Le temps est négatif, ce qui est attendu : le décès précède la découverte. Le modèle suppose la pièce à température constante depuis le décès ; c'est en pratique la principale source d'incertitude.

EXERCICE 25 ⋆⋆

1. Un entier $N \geqslant 1$ s'écrit avec k chiffres si et seulement si $10^{k-1} \leqslant N < 10^k$, et l'on applique la fonction $\log_{10}$, strictement croissante, avec $\log_{10}(10^m) = m$.

$$\boxed{N \text{ a } k \text{ chiffres} \iff k - 1 \leqslant \log_{10} N < k}$$

2. Notons $n = 82\,589\,933$. On a $n \log_{10} 2 \approx 24\,862\,047{,}17$; l'erreur commise sur $\log_{10} 2$ est inférieure à 10^{-11}, et multipliée par n elle reste inférieure à 10^{-3}, ce qui ne change pas la partie avant la virgule. Donc 2^n a 24 862 048 chiffres. Ensuite, 2^n n'est pas une puissance de 10, puisque 5 divise toute puissance 10^m avec $m \geqslant 1$; ainsi $10^{k-1} < 2^n$, et $10^{k-1} \leqslant 2^n - 1 < 10^k$.

$$\boxed{2^{82\,589\,933} - 1 \text{ a } 24\,862\,048 \text{ chiffres}}$$

3. D'après la question 1, l'entier 2^n a 4 413 chiffres si et seulement si $4\,412 \leqslant n \log_{10} 2 < 4\,413$, c'est-à-dire, en arrondissant les quotients,

$$14\,656{,}35 \leqslant n < 14\,659{,}67.$$

$$\boxed{n \in \{14\,657,\ 14\,658,\ 14\,659\}}$$

Il y en a trois, ce qui est cohérent : une puissance de 10 est franchie toutes les trois ou quatre puissances de 2, puisque $\frac{1}{\log_{10} 2} \approx 3{,}32$.

EXERCICE 26 ⋆⋆

1. Supposons $\log_{10} 2 = \frac{p}{q}$ avec p, q entiers, $q \geqslant 1$. Comme $1 < 2 < 10$, on a $0 < \frac{p}{q} < 1$, donc $1 \leqslant p < q$. L'égalité $2 = 10^{p/q}$ donne $2^q = 10^p = 2^p 5^p$, puis $2^{q-p} = 5^p$, où le membre de gauche est pair et celui de droite impair.

$$\boxed{\log_{10} 2 \notin \mathbb{Q}}$$

2. Si $\frac{\ln 3}{\ln 2} = \frac{p}{q}$, avec p, $q \geqslant 1$ puisque ce quotient est positif, alors $q \ln 3 = p \ln 2$, soit $3^q = 2^p$: un nombre impair égal à un nombre pair.

$$\boxed{\frac{\ln 3}{\ln 2} = \log_2 3 \notin \mathbb{Q}}$$

3. On a $\log_{10} 5 = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - \log_{10} 2$; s'il était rationnel, $\log_{10} 2 = 1 - \log_{10} 5$ le serait aussi.

$$\boxed{\log_{10} 5 \notin \mathbb{Q}}$$

L'affirmation de l'élève est fausse : $\log_{10} 2$ et $\log_{10} 5$ ne sont pas rationnels, et leur somme vaut $\log_{10} 10 = 1$.

EXERCICE 27 ⋆⋆

1. La majoration est la proposition 6. Pour la minoration, posons $\varphi(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ sur $[0\,,+\infty[$. Alors $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} \geqslant 0$, et $\varphi(0) = 0$.

$$\boxed{x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x \quad \text{pour } x \geqslant 0}$$

2. Posons $g(x) = (x-2)\mathrm{e}^x + x + 2$. Alors $g'(x) = (x-1)\mathrm{e}^x + 1$ et $g''(x) = x\,\mathrm{e}^x \geqslant 0$ sur $[0\,,+\infty[$. Donc g' y est croissante, et $g'(x) \geqslant g'(0) = 0$; puis g est croissante, et $g(x) \geqslant g(0) = 0$.

$$\boxed{(x-2)\mathrm{e}^x + x + 2 \geqslant 0 \quad \text{pour } x \geqslant 0}$$

On a dû dériver deux fois, car le signe de g' n'était pas lisible directement.

3. L'inégalité $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$ donne $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant 1$, puis, par croissance de l'exponentielle, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}$. De même, $\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \leqslant -\frac{1}{n}$, puisque $-\frac{1}{n} > -1$, donc $-n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \geqslant 1$, et $\mathrm{e} \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$.

$$\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}}$$

Pour $n = 100$, on obtient $1{,}01^{100} \approx 2{,}7048$ et $0{,}99^{-100} \approx 2{,}7320$.

$$\boxed{2{,}704 \leqslant \mathrm{e} \leqslant 2{,}733}$$

L'amplitude, environ 0,027, convient. Elle diminue lentement, comme $\frac{\mathrm{e}}{n}$: les développements limités du chapitre 10 l'expliqueront.

EXERCICE 28 ⋆⋆

1. Sur $]0\,,1]$, $x\ln x \leqslant 0 < 1$: il n'y a pas de solution. Sur $[1\,,+\infty[$, la fonction $\varphi : x \mapsto x\ln x$ est dérivable, de dérivée $\ln x + 1 > 0$: elle est strictement croissante. Comme $\varphi(1) = 0 < 1 < \mathrm{e} = \varphi(\mathrm{e})$, et que $\varphi([1\,,\mathrm{e}])$ est un intervalle d'après le théorème 2, la valeur 1 est atteinte sur $]1\,,\mathrm{e}[$, une seule fois.

$$\boxed{x\ln x = 1 \text{ a une unique solution } \alpha \in]1\,,\mathrm{e}[, \quad \alpha \approx 1{,}763}$$

2. Pour $x \leqslant 0$, $\mathrm{e}^x - 1 \leqslant 0 < \mathrm{e}^{-x^2}$: pas de solution. Sur $[0\,,+\infty[$, la fonction $h : x \mapsto \mathrm{e}^x - 1 - \mathrm{e}^{-x^2}$ a pour dérivée $\mathrm{e}^x + 2x\,\mathrm{e}^{-x^2} > 0$. Comme $h(0) = -1 < 0$ et $h(1) = \mathrm{e} - 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} > 0$, la même méthode conclut.

$$\boxed{\text{unique solution, dans }]0\,,1[, \ \approx 0{,}552}$$

À retenir : l'existence vient du théorème 2, l'unicité de la stricte monotonie. Le chapitre 8 donnera la même conclusion par le théorème des valeurs intermédiaires, sans hypothèse de dérivabilité.

Fonctions puissances et croissances comparées

EXERCICE 29 ⋆

(a) L'équation s'écrit $16\cdot 2^x - 4\cdot 2^x = 9\cdot 3^x - 3^x$, soit $12\cdot 2^x = 8\cdot 3^x$, ou encore $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2}$.

$$\boxed{x = 1}$$

(b) Avec $t = 2^x > 0$, on obtient $t^2 + 2t - 15 = (t-3)(t+5) = 0$, donc $t = 3$.

$$\boxed{x = \frac{\ln 3}{\ln 2}}$$

(c) Il faut $x > 0$. Les deux membres s'écrivent alors $\mathrm{e}^{\sqrt{x}\ln x}$ et $\exp\left(\frac{x}{2}\ln x\right)$, et l'équation équivaut à $\left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right)\ln x = 0$, soit $\ln x = 0$ ou $\sqrt{x} = \frac{x}{2}$, c'est-à-dire $x = 1$ ou $\sqrt{x} = 2$.

$$\boxed{x \in \{1, 4\}}$$

(d) En prenant le logarithme, $3x\ln 2 = y\ln 10$ et $x\ln 2 = y\ln 5$. En retranchant le triple de la seconde de la première, $0 = y(\ln 10 - 3\ln 5) = y\ln\frac{10}{125}$, donc $y = 0$, puis $x = 0$.

$$\boxed{(x, y) = (0, 0)}$$

EXERCICE 30 ⋆⋆

(a) $\dfrac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}} = \left(\dfrac{\ln x}{x^{1/4}}\right)^2$, qui tend vers 0 par croissances comparées. $\boxed{0}$

(b) $x^{1/x} = \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}$, et $\frac{\ln x}{x} \to 0$. $\boxed{1}$

(c) Avec $u = \sqrt{x}$, $\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{x^{10}} = \dfrac{\mathrm{e}^u}{u^{20}}$, qui tend vers $+\infty$. $\boxed{+\infty}$

(d) $x(\ln x)^3 = \left(x^{1/3}\ln x\right)^3$, qui tend vers 0 en 0^+. $\boxed{0}$

(e) On a $(x^x)^x = x^{x^2}$ d'après la proposition 7, de sorte que le quotient vaut $\exp\left((x^2 - x^x)\ln x\right)$. Or $\frac{x^x}{x^2} = \mathrm{e}^{(x-2)\ln x} \to +\infty$, donc $x^2 - x^x = x^2\left(1 - \frac{x^x}{x^2}\right) \to -\infty$, et l'exposant tend vers $-\infty$. $\boxed{0}$

(f) Pour $x > 1$, $x^{1/\ln x} = \mathrm{e}^{\frac{1}{\ln x}\ln x} = \mathrm{e}$: la fonction est constante. $\boxed{\mathrm{e}}$

Les nombres $(x^x)^x = x^{x^2}$ et $x^{(x^x)}$ ne sont pas égaux en général : pour $x = 3$, le premier vaut 3^9 et le second 3^{27}. L'écriture x^{x^x} sans parenthèses se lit toujours $x^{(x^x)}$.

EXERCICE 31 ⋆⋆

1. Par définition des puissances réelles, $\boxed{D =]0, +\infty[\quad \text{et} \quad f(x) = \mathrm{e}^{x\ln x}}$

2. La fonction est dérivable, et $f'(x) = (\ln x + 1)\,x^x$, du signe de $\ln x + 1$: f décroît sur $]0, \frac{1}{\mathrm{e}}]$ et croît sur $[\frac{1}{\mathrm{e}}, +\infty[$. Par croissances comparées, $x\ln x \to 0$ en 0^+, donc $f(x) \to 1$; en $+\infty$, $x\ln x \to +\infty$.

$$\boxed{\min f = f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}} \approx 0{,}692, \qquad \lim_{0^+} f = 1, \qquad \lim_{+\infty} f = +\infty}$$

3. Posons $u = x\ln x$, qui tend vers 0 en 0^+. Alors $\dfrac{f(x) - 1}{x} = \dfrac{\mathrm{e}^u - 1}{u}\cdot \ln x$; le premier facteur tend vers $\exp'(0) = 1$, et le second vers $-\infty$.

$$\boxed{\frac{f(x) - 1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty}$$

Si l'on prolonge f en posant $f(0) = 1$, la courbe part du point $(0, 1)$ avec une tangente verticale.

4. On lit le nombre de solutions sur le tableau de variations, en tenant compte de ce que la valeur 1 n'est pas atteinte en 0.

y	$y < \mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}}$	$y = \mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}}$	$\mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}} < y < 1$	$y \geqslant 1$
nombre de solutions	0	1	2	1

EXERCICE 32 ⋆⋆⋆

1. C'est l'inégalité $\mathrm{e}^x \geqslant 1+x$ de la proposition 5. $\boxed{a = \mathrm{e} \text{ convient}}$

2. La fonction $x \mapsto a^x = \mathrm{e}^{x\ln a}$ est dérivable, de dérivée $x \mapsto \ln(a)\, a^x$, qui vaut $\ln a$ en 0. Le quotient est son taux d'accroissement en 0.

$$\boxed{\frac{a^x - 1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \ln a}$$

3. Pour $x > 0$, l'inégalité $a^x - 1 \geqslant x$ donne $\frac{a^x-1}{x} \geqslant 1$, et, en passant à la limite en 0^+, $\ln a \geqslant 1$. Pour $x < 0$, la division par x renverse l'inégalité : $\frac{a^x-1}{x} \leqslant 1$, et la limite en 0^- donne $\ln a \leqslant 1$.

$$\boxed{\ln a = 1, \quad \text{donc } a = \mathrm{e} \text{ est l'unique solution}}$$

4. La tangente en 0 à la courbe $y = a^x$ est la droite $y = 1 + x\ln a$. La droite $y = 1 + x$ passe par le point $(0,1)$ de toutes ces courbes ; si elle n'en est pas la tangente, elle la traverse, et l'inégalité est fausse d'un côté de 0. La base e est la seule dont la courbe exponentielle a une pente égale à 1 en 0.

EXERCICE 33 ⋆⋆⋆

1. La fonction g est dérivable, et $g'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$: g croît sur $]0\,,\mathrm{e}]$ et décroît sur $[\mathrm{e}\,,+\infty[$. En 0^+, $\ln x \to -\infty$ et $\frac{1}{x} \to +\infty$, donc $g \to -\infty$; en $+\infty$, $g \to 0$ par croissances comparées. Enfin $g(4) = \frac{2\ln 2}{4} = g(2)$.

$$\boxed{\max g = g(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}}, \qquad \lim_{0^+} g = -\infty, \qquad \lim_{+\infty} g = 0, \qquad g(2) = g(4) = \frac{\ln 2}{2}}$$

2. Pour $n \geqslant 1$, $2^n \geqslant n^2$ équivaut à $n\ln 2 \geqslant 2\ln n$, soit $g(n) \leqslant g(2)$. Pour $n \geqslant 4$, la décroissance de g sur $[\mathrm{e}\,,+\infty[$ donne $g(n) \leqslant g(4) = g(2)$. Pour $n = 3$, $g(3) > g(4)$, et en effet $8 < 9$. Les cas $n = 0$, 1, 2 se vérifient directement : $1 \geqslant 0$, $2 \geqslant 1$, $4 \geqslant 4$.

$$\boxed{2^n \geqslant n^2 \iff n \neq 3}$$

3. Comme $\mathrm{e} < \pi$ et que g décroît sur $[\mathrm{e}\,,+\infty[$, $g(\pi) < g(\mathrm{e})$, soit $\frac{\ln\pi}{\pi} < \frac{1}{\mathrm{e}}$, c'est-à-dire $\mathrm{e}\ln\pi < \pi = \pi\ln\mathrm{e}$.

$$\boxed{\pi^{\mathrm{e}} < \mathrm{e}^{\pi}}$$

Numériquement, $\pi^{\mathrm{e}} \approx 22{,}46$ et $\mathrm{e}^{\pi} \approx 23{,}14$.

4. L'égalité $p^q = q^p$ équivaut à $g(p) = g(q)$. Comme g est strictement monotone sur $]0\,,\mathrm{e}]$ et sur $[\mathrm{e}\,,+\infty[$, les entiers $p < q$ ne peuvent être tous deux $\leqslant 2$, ni tous deux $\geqslant 3$: donc $p \in \{1,2\}$ et $q \geqslant 3$. Pour $p = 1$, $g(1) = 0 < g(q)$. Pour $p = 2$, il faut $g(q) = g(2) = g(4)$, avec q et 4 dans $[\mathrm{e}\,,+\infty[$, d'où $q = 4$.

$$\boxed{(p,q) = (2,4)}$$

C'est la figure de l'énoncé qui guide le raisonnement : une droite horizontale coupe la courbe en au plus deux points, l'un avant le sommet, l'autre après.

EXERCICE 34 ⋆

Pour calculer $\operatorname{Arcsin} y$, on cherche l'unique angle de $[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}]$ dont le sinus vaut y ; de même avec $[0\,,\pi]$ pour l'arc cosinus et $]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}[$ pour l'arc tangente. Lorsque l'argument est déjà un cosinus ou un sinus, on ramène l'angle dans le bon intervalle.

- **(a), (b), (c)** $\boxed{\operatorname{Arcsin}\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)=-\dfrac{\pi}{6} \qquad \operatorname{Arccos}\Big(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big)=\dfrac{3\pi}{4} \qquad \operatorname{Arctan}\sqrt{3}=\dfrac{\pi}{3}}$
- **(d)** $\cos\frac{4\pi}{3}=\cos\left(2\pi-\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}$, et $\frac{2\pi}{3}\in[0\,,\pi]$: $\boxed{\dfrac{2\pi}{3}}$
- **(e)** $\sin 3=\sin(\pi-3)$, et $\pi-3\approx 0{,}14\in[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}]$: $\boxed{\pi-3}$
- **(f)** La tangente est π-périodique, et $\frac{87\pi}{5}-17\pi=\frac{2\pi}{5}\in]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}[$: $\boxed{\dfrac{2\pi}{5}}$
- **(g)** $\sin\frac{7\pi}{15}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{15}\right)=\cos\frac{\pi}{30}$: $\boxed{\dfrac{\pi}{30}}$
- **(h)** $\sin\frac{17\pi}{5}=\sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right)=-\cos\frac{\pi}{10}=\cos\frac{9\pi}{10}$: $\boxed{\dfrac{9\pi}{10}}$
- **(i)** $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}$: $\boxed{\dfrac{2\pi}{3}}$

Piège : on n'a pas $\operatorname{Arccos}(\cos x)=x$ en général ; c'est vrai seulement pour $x\in[0\,,\pi]$, et (d), (i) en donnent deux contre-exemples. L'exercice 36 étudie ces fonctions en détail.

EXERCICE 35 ⋆

On pose chaque fois θ égal à l'arc, et l'on exprime la ligne trigonométrique cherchée à l'aide de celle que l'on connaît, en contrôlant le signe grâce à l'intervalle où se trouve θ.

- **(a)** Sur $\mathbb{R}$, avec $\theta=\operatorname{Arctan} x$, on a $\cos\theta>0$ et $\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta$: $\boxed{\cos(\operatorname{Arctan} x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$
- **(b)** Sur $\mathbb{R}$, $\sin\theta=\tan\theta\cos\theta$: $\boxed{\sin(\operatorname{Arctan} x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$
- **(c)** Sur $]-1\,,1[$, puisque $\cos(\operatorname{Arcsin} x)=\sqrt{1-x^2}$ ne s'annule pas : $\boxed{\tan(\operatorname{Arcsin} x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$
- **(d)** Sur $[-1\,,1]$, avec $\cos(2\theta)=2\cos^2\theta-1$: $\boxed{\cos(2\operatorname{Arccos} x)=2x^2-1}$
- **(e)** Sur $[-1\,,1]$, avec $\sin(2\theta)=2\sin\theta\cos\theta$: $\boxed{\sin(2\operatorname{Arccos} x)=2x\sqrt{1-x^2}}$
- **(f)** Sur $\mathbb{R}$, avec $\cos(2\theta)=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$: $\boxed{\cos(2\operatorname{Arctan} x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$

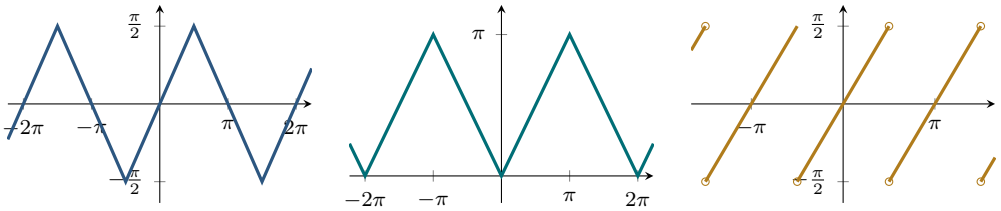
EXERCICE 36 ⋆⋆

1. La fonction $u : x \mapsto \text{Arcsin}(\sin x)$ est définie sur $\mathbb{R}$, impaire et 2π-périodique, comme le sinus. Sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $u(x) = x$. Sur $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, le réel $\pi - x$ est dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$, donc $u(x) = \pi - x$.

$$\boxed{u(x) = x \text{ sur } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \qquad u(x) = \pi - x \text{ sur } \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]}$$

2. De même, $v : x \mapsto \text{Arccos}(\cos x)$ est paire et 2π-périodique, avec $v(x) = |x|$ sur $[-\pi, \pi]$. La fonction $w : x \mapsto \text{Arctan}(\tan x)$ est définie hors des points $\frac{\pi}{2} + k\pi$, π-périodique, et $w(x) = x - k\pi$ sur $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$.

Arcsin(sin x) Arccos(cos x) Arctan(tan x)



Les deux premières courbes sont des lignes brisées en dents de scie triangulaires, qui ne coïncident avec la droite $y = x$ que sur l'intervalle où l'arc inverse vraiment la fonction ; la troisième est une suite de segments de pente 1, interrompus aux points où la tangente n'est pas définie (cercles vides).

3. D'après la proposition 8, $\text{Arccos}(-x) = \pi - \text{Arccos}\, x$, soit $\text{Arccos}(-x) - \frac{\pi}{2} = -(\text{Arccos}\, x - \frac{\pi}{2})$: la fonction $h \mapsto \text{Arccos}(h) - \frac{\pi}{2}$ est impaire, et l'exercice 8 conclut.

$$\boxed{\text{centre de symétrie } \left(0, \frac{\pi}{2}\right)}$$

EXERCICE 37 ⋆⋆

Première méthode. Posons $\delta(x) = \text{Arccos}\frac{1-x}{1+x} - 2\,\text{Arctan}\sqrt{x}$. Pour $x > 0$, $u(x) = \frac{1-x}{1+x}$ appartient à $]-1, 1[$, et $u'(x) = -\frac{2}{(1+x)^2}$; comme $1 - u(x)^2 = \frac{4x}{(1+x)^2}$,

$$\Big(\text{Arccos}\, u\Big)'(x) = \frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}} = \frac{2}{(1+x)^2} \cdot \frac{1+x}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} = \big(2\,\text{Arctan}\sqrt{x}\big)'.$$

Ainsi $\delta' = 0$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$: δ y est constante, égale à $\delta(1) = \text{Arccos}\,0 - 2\,\text{Arctan}\,1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$. Le point 0, où les fonctions ne sont pas dérivables, se traite à part : $\delta(0) = \text{Arccos}\,1 - 0 = 0$.

Seconde méthode. Soit $\theta = \text{Arctan}\sqrt{x} \in [0, \frac{\pi}{2}[$, de sorte que $\tan^2\theta = x$. La formule de l'exercice 35 (f) donne $\cos(2\theta) = \frac{1-x}{1+x}$, et $2\theta \in [0, \pi[$; donc 2θ est l'arc cosinus de $\frac{1-x}{1+x}$.

$$\boxed{\text{Arccos}\,\frac{1-x}{1+x} = 2\,\text{Arctan}\sqrt{x} \quad \text{pour tout } x \geqslant 0}$$

La seconde méthode est préférable : elle est plus courte, traite $x = 0$ sans cas particulier, et ne demande que de vérifier que l'angle est dans $[0, \pi]$. La première reste la méthode de secours quand on ne devine pas l'identité trigonométrique.

EXERCICE 38 ⋆⋆

1. Posons $\alpha = \operatorname{Arctan} a$, $\beta = \operatorname{Arctan} b$, et $s = \alpha + \beta \in]-\pi\,,\pi[$. Alors

$$\cos s = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos\alpha\cos\beta\,(1-ab),$$

qui est non nul, du signe de $1-ab$, puisque $\cos\alpha$ et $\cos\beta$ sont strictement positifs. On peut donc calculer $\tan s = \frac{a+b}{1-ab}$, et s diffère de $\operatorname{Arctan}\frac{a+b}{1-ab}$ d'un multiple de π. Cette différence est dans $]-\frac{3\pi}{2}\,,\frac{3\pi}{2}[$, donc vaut $k\pi$ avec $k \in \{-1,0,1\}$. Si $ab<1$, $\cos s>0$, donc $s \in]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}[$, et $k=0$.

$$\boxed{\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b = \operatorname{Arctan}\frac{a+b}{1-ab} + k\pi, \quad k=0 \text{ si } ab<1}$$

On montre de même que $k=1$ si $ab>1$ et $a>0$, et $k=-1$ si $ab>1$ et $a<0$.

2. Avec $a=b=\frac{1}{3}$, $ab<1$: $2\operatorname{Arctan}\frac{1}{3} = \operatorname{Arctan}\frac{2/3}{8/9} = \operatorname{Arctan}\frac{3}{4}$. Puis, avec $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{7}<1$:

$$\operatorname{Arctan}\frac{3}{4} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{7} = \operatorname{Arctan}\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{28}} = \operatorname{Arctan}\frac{25/28}{25/28} = \operatorname{Arctan} 1.$$

$$\boxed{2\operatorname{Arctan}\frac{1}{3} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}}$$

3. Pour $a=2$, $b=5$, on a $ab>1$ et $a>0$, donc $\operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} 5 = \pi + \operatorname{Arctan}\frac{7}{-9} = \pi - \operatorname{Arctan}\frac{7}{9}$. Ensuite, $\operatorname{Arctan} 8 - \operatorname{Arctan}\frac{7}{9}$ relève du cas $ab = -\frac{56}{9} < 1$:

$$\operatorname{Arctan} 8 + \operatorname{Arctan}\Big(-\frac{7}{9}\Big) = \operatorname{Arctan}\frac{8-\frac{7}{9}}{1+\frac{56}{9}} = \operatorname{Arctan}\frac{65/9}{65/9} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\boxed{\operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} 5 + \operatorname{Arctan} 8 = \frac{5\pi}{4}}$$

4. La question 3 montre que $x=5$ est solution. Le membre de gauche est une somme de trois fonctions strictement croissantes, donc il est strictement croissant, et injectif.

$$\boxed{x=5}$$

Attention : l'oubli du terme $k\pi$ est l'erreur la plus répandue ; en question 3, il aurait donné $\frac{\pi}{4}$ au lieu de $\frac{5\pi}{4}$, résultat absurde puisque chacun des trois arcs dépasse $\frac{\pi}{4}$.

EXERCICE 39 ⋆⋆

(a) L'équation a un sens pour $|x| \leqslant \frac{1}{2}$. Une solution est une valeur commune à $[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}]$ et $[0\,,\pi]$, donc dans $[0\,,\frac{\pi}{2}]$, ce qui impose $x \geqslant 0$. Sur cet intervalle, le sinus est injectif, et l'équation équivaut à $2x = \sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1-x^2}$, soit $5x^2=1$ avec $x \geqslant 0$.

$$\boxed{x = \frac{1}{\sqrt{5}}}$$

(b) Le membre de gauche est strictement croissant et nul en 0 : une solution est strictement positive. Pour $0<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$, l'exercice 38 donne $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}(2x) = \operatorname{Arctan}\frac{3x}{1-2x^2}$, et l'équation équivaut à $3x = 1-2x^2$. La racine positive, $\frac{\sqrt{17}-3}{4} \approx 0{,}28$, convient ; elle est unique par stricte croissance.

$$\boxed{x = \frac{\sqrt{17}-3}{4}}$$

(c) Pour tout réel x, $\frac{2x}{1+x^2} \in [-1\,,1]$, car $1+x^2-2|x| = (1-|x|)^2 \geqslant 0$. Comme $\frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}]$, l'équation équivaut à $\frac{2x}{1+x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, soit $\sqrt{3}\,x^2 - 4x + \sqrt{3} = 0$, de discriminant 4.

$$\boxed{x \in \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right\}}$$

(d) D'après l'exercice 38, $\operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} 3 = \pi + \operatorname{Arctan} \frac{5}{-5} = \frac{3\pi}{4}$, qui n'appartient pas à $[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}]$.

$$\boxed{\text{aucune solution}}$$

Prendre le sinus des deux membres aurait conduit à $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, qui n'est pas solution : c'est le piège que signale l'énoncé.

EXERCICE 40 ⋆⋆⋆

1. Pour $x \in [-1\,,1]$, on verra en question 3 que $4x^3 - 3x = \cos(3\operatorname{Arccos} x) \in [-1\,,1]$. Pour $x > 1$, $4x^3 - 3x - 1 = (x-1)(2x+1)^2 > 0$, et le cas $x < -1$ s'en déduit par imparité.

$$\boxed{D = [-1\,,1]}$$

2. C'est la formule obtenue au chapitre 4 par la formule de Moivre : $\boxed{\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta}$

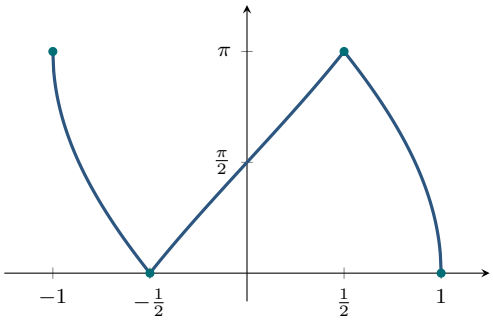
3. Soit $\theta = \operatorname{Arccos} x \in [0\,,\pi]$; alors $f(x) = \operatorname{Arccos}(\cos 3\theta)$, avec $3\theta \in [0\,,3\pi]$. Il faut ramener 3θ dans $[0\,,\pi]$ par un angle de même cosinus.

- Si $\theta \in [0\,,\frac{\pi}{3}]$, c'est-à-dire $x \in [\frac{1}{2}\,,1]$, alors $3\theta \in [0\,,\pi]$ et $f(x) = 3\theta$.
- Si $\theta \in [\frac{\pi}{3}\,,\frac{2\pi}{3}]$, c'est-à-dire $x \in [-\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}]$, alors $2\pi - 3\theta \in [0\,,\pi]$ a le même cosinus, et $f(x) = 2\pi - 3\theta$.
- Si $\theta \in [\frac{2\pi}{3}\,,\pi]$, c'est-à-dire $x \in [-1\,,-\frac{1}{2}]$, alors $3\theta - 2\pi \in [0\,,\pi]$, et $f(x) = 3\theta - 2\pi$.

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} 3\operatorname{Arccos} x - 2\pi & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{2} \\ 2\pi - 3\operatorname{Arccos} x & \text{si } -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ 3\operatorname{Arccos} x & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}}$$

Les expressions coïncident aux points de raccord : $f(-\frac{1}{2}) = 0$ et $f(\frac{1}{2}) = \pi$.

4. On trace les trois arcs obtenus à la question 3, chacun étant l'image d'un morceau de la courbe de l'arc cosinus par une affinité et une translation.



La courbe présente des points anguleux en $\pm\frac{1}{2}$, où les pentes à gauche et à droite valent $\pm 2\sqrt{3}$; aux bords ± 1, la tangente est verticale, comme pour l'arc cosinus. Ce sont les points où f n'est pas dérivable, ce que le chapitre 9 confirmera.

EXERCICE 41 ⋆⋆

1. On applique l'exercice 38 avec $a = x+1$ et $b = -x$: $1 - ab = 1 + x + x^2 > 0$, donc $ab < 1$ et $k = 0$.

$$\operatorname{Arctan}(x+1) + \operatorname{Arctan}(-x) = \operatorname{Arctan}\frac{(x+1)-x}{1+x(x+1)},$$

$$\boxed{\operatorname{Arctan}(x+1) - \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arctan}\frac{1}{x^2+x+1}}$$

2. La somme est télescopique, comme au chapitre 3 :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan} k\right) = \operatorname{Arctan}(n+1) - \operatorname{Arctan} 0, \qquad \boxed{S_n = \operatorname{Arctan}(n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}}$$

Fonctions hyperboliques

EXERCICE 42 ⋆

On revient chaque fois à $t = \mathrm{e}^x > 0$, ce qui donne une équation du second degré.

(a) $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} = 4$ donne $t^2 - 4t + 1 = 0$, de racines $2 \pm \sqrt{3}$, toutes deux positives ; comme $2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$, on obtient deux solutions opposées, ce qu'imposait la parité de ch.

$$\boxed{x = \pm\ln(2+\sqrt{3})}$$

(b) $5\operatorname{ch} x - 3\operatorname{sh} x = \mathrm{e}^x + 4\mathrm{e}^{-x}$, et l'équation devient $t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2 = 0$. $\boxed{x = \ln 2}$

(c) $3\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x = \mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{-x}$, et l'équation devient $t^2 - t - 2 = (t-2)(t+1) = 0$. $\boxed{x = \ln 2}$

Pour l'équation générale, on écrit $a\operatorname{ch} x + b\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\left((a+b)\mathrm{e}^x + (a-b)\mathrm{e}^{-x}\right)$; l'équation équivaut donc à $(a+b)\mathrm{e}^{2x} = b - a$.

- Si $a = b = 0$, tout réel est solution.
- Si $a + b = 0$ et $a \neq 0$, alors $b - a = -2a \neq 0$: aucune solution.
- Si $a + b \neq 0$, il faut $\frac{b-a}{a+b} > 0$, c'est-à-dire $(b-a)(b+a) > 0$, soit $|b| > |a|$.

$$\boxed{\text{si } |b| > |a| : \text{ unique solution } x = \frac{1}{2}\ln\frac{b-a}{b+a} \ ; \quad \text{si } |b| \leqslant |a| \text{ et } (a,b) \neq (0,0) : \text{ aucune}}$$

Ce résultat se lit sur le cours : l'équation s'écrit $\operatorname{th} x = -\frac{a}{b}$, qui a une solution si et seulement si $-\frac{a}{b} \in]-1\,,1[$.

EXERCICE 43 ⋆⋆

1. On développe le second membre :

$$\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \frac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}) + (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y})}{4} = \frac{2\mathrm{e}^{x+y} + 2\mathrm{e}^{-x-y}}{4} = \boxed{\operatorname{ch}(x+y)},$$

et le calcul est le même pour $\operatorname{sh}(x+y)$, les termes croisés se compensant.

2. On divise numérateur et dénominateur de $\frac{\operatorname{sh}(x+y)}{\operatorname{ch}(x+y)}$ par $\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y > 0$.

$$\boxed{\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}}$$

3. La fonction th est dérivable et strictement croissante (proposition 10), donc $\operatorname{th}(\mathbb{R})$ est un intervalle d'après le théorème 2 ; il est contenu dans $]-1\,,1[$, puisque $|\operatorname{sh} x| < \operatorname{ch} x$, et contient des réels aussi

proches qu'on veut de 1 et de -1, d'après les limites. Donc $\mathrm{th}(\mathbb{R}) =]-1\,,1[$. Si $a,\,b \in]-1\,,1[$, on écrit $a = \mathrm{th}\,\alpha$ et $b = \mathrm{th}\,\beta$, et la question 2 donne $\frac{a+b}{1+ab} = \mathrm{th}(\alpha+\beta)$.

$$\boxed{\frac{a+b}{1+ab} \in]-1\,,1[}$$

En physique, c'est la loi de composition des vitesses en relativité restreinte, avec des vitesses mesurées en fractions de la vitesse de la lumière : la composée de deux vitesses inférieures à celle de la lumière lui reste inférieure.

4. Les formules sont celles de la trigonométrie circulaire, à un signe près devant chaque produit de deux sinus : $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x \sin y$, alors que $\mathrm{ch}(x+y)$ fait apparaître $+\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,y$. De même, $\tan(x+y)$ a $1-\tan x\tan y$ au dénominateur, et $\mathrm{th}(x+y)$ a $1+\mathrm{th}\,x\,\mathrm{th}\,y$. Ce parallèle n'est pas un hasard : si l'on remplace formellement x par $\mathrm{i}x$ dans les formules d'Euler du chapitre 4, on obtient $\frac{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}}{2} = \mathrm{ch}\,x$ pour « $\cos(\mathrm{i}x)$ », ce que la seconde année justifiera en prolongeant le cosinus à $\mathbb{C}$.

EXERCICE 44 ⋆⋆

1. D'après la proposition 10, $\mathrm{ch}\,x + \mathrm{sh}\,x = \mathrm{e}^{x}$, donc $(\mathrm{ch}\,x+\mathrm{sh}\,x)^n = \mathrm{e}^{nx} = \mathrm{ch}(nx) + \mathrm{sh}(nx)$.

2. On calcule les deux sommes géométriques de raisons e^{x} et e^{-x}, différentes de 1 puisque $x \neq 0$, en factorisant par l'angle moitié comme au chapitre 4 :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{kx} = \frac{\mathrm{e}^{(n+1)x}-1}{\mathrm{e}^{x}-1} = \frac{\mathrm{e}^{(n+1)x/2}}{\mathrm{e}^{x/2}} \cdot \frac{\mathrm{sh}\,\frac{(n+1)x}{2}}{\mathrm{sh}\,\frac{x}{2}} = \mathrm{e}^{nx/2}\,\frac{\mathrm{sh}\,\frac{(n+1)x}{2}}{\mathrm{sh}\,\frac{x}{2}},$$

et de même $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-kx} = \mathrm{e}^{-nx/2}\,\frac{\mathrm{sh}\,\frac{(n+1)x}{2}}{\mathrm{sh}\,\frac{x}{2}}$ en changeant x en $-x$. La demi-somme et la demi-différence donnent

$$\boxed{C_n = \frac{\mathrm{ch}\,\frac{nx}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{(n+1)x}{2}}{\mathrm{sh}\,\frac{x}{2}} \qquad S_n = \frac{\mathrm{sh}\,\frac{nx}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{(n+1)x}{2}}{\mathrm{sh}\,\frac{x}{2}}}.$$

3. La relation $2\,\mathrm{ch}\,a\,\mathrm{sh}\,a = \mathrm{sh}(2a)$, appliquée à $a = \frac{x}{2^k}$, donne $2\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{2^k}\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{2^k} = \mathrm{sh}\,\frac{x}{2^{k-1}}$. En multipliant P_n par $\mathrm{sh}\,\frac{x}{2^n}$, les facteurs se simplifient de proche en proche, du dernier au premier :

$$P_n\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{2^n} = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1} \mathrm{ch}\,\frac{x}{2^k} \cdot \mathrm{sh}\,\frac{x}{2^{n-1}} = \cdots = \mathrm{sh}\,x.$$

$$\boxed{P_n = \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{sh}\,\frac{x}{2^n}}}$$

EXERCICE 45 ⋆⋆

1. La fonction $\varphi : x \mapsto \mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}\,x) + \mathrm{Arccos}(\mathrm{th}\,x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, car $\mathrm{th}\,x \in]-1\,,1[$. Avec $1+\mathrm{sh}^2 = \mathrm{ch}^2$ et $\sqrt{1-\mathrm{th}^2\,x} = \frac{1}{\mathrm{ch}\,x}$,

$$\varphi'(x) = \frac{\mathrm{ch}\,x}{1+\mathrm{sh}^2\,x} - \frac{1/\mathrm{ch}^2\,x}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2\,x}} = \frac{1}{\mathrm{ch}\,x} - \frac{1}{\mathrm{ch}\,x} = 0.$$

Donc φ est constante, égale à $\varphi(0) = 0 + \mathrm{Arccos}\,0$.

$$\boxed{\mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}\,x) + \mathrm{Arccos}(\mathrm{th}\,x) = \frac{\pi}{2}}$$

2. L'équation $\mathrm{th}\,x = \frac{5}{13}$ s'écrit $\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1} = \frac{5}{13}$, soit $\mathrm{e}^{2x} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$.

$$\boxed{x = \ln\frac{3}{2}, \qquad \mathrm{sh}\,x = \frac{1}{2}\Big(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\Big) = \frac{5}{12}}$$

La question 1, en ce point, donne $\operatorname{Arctan}\frac{5}{12}+\operatorname{Arccos}\frac{5}{13}=\frac{\pi}{2}$. Géométriquement, dans le triangle rectangle de côtés 5, 12 et 13, l'angle opposé au côté 5 a pour tangente $\frac{5}{12}$, et l'autre angle aigu a pour cosinus $\frac{5}{13}$; ces deux angles sont complémentaires.

3. *Par la dérivation.* Avec $\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x=\operatorname{ch}(2x)$, conséquence de l'exercice 43,

$$\big(2\operatorname{Arctan}(\operatorname{th} x)\big)'=\frac{2/\operatorname{ch}^2 x}{1+\operatorname{th}^2 x}=\frac{2}{\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x}=\frac{2}{\operatorname{ch}(2x)},$$

$$\big(\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} 2x)\big)'=\frac{2\operatorname{ch}(2x)}{1+\operatorname{sh}^2(2x)}=\frac{2}{\operatorname{ch}(2x)}.$$

Les deux fonctions ont la même dérivée sur $\mathbb{R}$ et sont nulles en 0 : elles sont égales.

Par la trigonométrie. Soit $\theta=\operatorname{Arctan}(\operatorname{th} x)$; comme $\operatorname{th} x\in\,]-1\,,1[$, $\theta\in\,]-\frac{\pi}{4}\,,\frac{\pi}{4}[$, donc $2\theta\in\,]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}[$. Alors

$$\tan(2\theta)=\frac{2\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th}^2 x}=\frac{2\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x}=\operatorname{sh}(2x),$$

et 2θ est l'arc tangente de $\operatorname{sh}(2x)$.

$$\boxed{2\operatorname{Arctan}(\operatorname{th} x)=\operatorname{Arctan}\big(\operatorname{sh}(2x)\big)}$$

La fonction $x\mapsto\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x)$ de la question 1 s'appelle la fonction de Gudermann ; elle relie, sans passer par les complexes, les fonctions circulaires et hyperboliques.

EXERCICE 46 ⋆⋆⋆

1. La fonction sh est dérivable, strictement croissante, de limites $\pm\infty$: c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ (théorème 2). Pour y réel, $\operatorname{sh} x=y$ s'écrit $t^2-2yt-1=0$ avec $t=\mathrm{e}^x>0$; le produit des racines vaut -1, donc une seule est positive, $y+\sqrt{y^2+1}$.

$$\boxed{\operatorname{sh}^{-1}(y)=\ln\big(y+\sqrt{y^2+1}\big)}$$

Comme $\operatorname{sh}'=\operatorname{ch}$ ne s'annule pas, le théorème 2 donne $(\operatorname{sh}^{-1})'(y)=\frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{sh}^{-1} y)}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$, puisque $\operatorname{ch}=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2}$. Directement :

$$\Big(\ln\big(y+\sqrt{y^2+1}\big)\Big)'=\frac{1+\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}}{y+\sqrt{y^2+1}}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}}.$$

2. La restriction de ch à $[0\,,+\infty[$ est strictement croissante, de $\operatorname{ch} 0=1$ à $+\infty$: c'est une bijection sur $[1\,,+\infty[$. Pour $y\geqslant 1$, l'équation $t^2-2yt+1=0$ a deux racines positives de produit 1, et $x\geqslant 0$ impose $t\geqslant 1$, donc la plus grande.

$$\boxed{\big(\operatorname{ch}_{|[0,+\infty[}\big)^{-1}(y)=\ln\big(y+\sqrt{y^2-1}\big),\qquad\text{de dérivée }\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}\text{ sur }]1\,,+\infty[}$$

La dérivée vaut $\frac{1}{\operatorname{sh} x}$, avec $\operatorname{sh}=\sqrt{\operatorname{ch}^2-1}$ sur $[0\,,+\infty[$; elle n'existe pas en 1, où $\operatorname{ch}'(0)=0$, et la courbe de la réciproque y a une tangente verticale.

3. Pour $y\in\,]-1\,,1[$, l'équation $\operatorname{th} x=y$ s'écrit $\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}=y$, soit $\mathrm{e}^{2x}=\frac{1+y}{1-y}$.

$$\boxed{\operatorname{th}^{-1}(y)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y},\qquad\text{de dérivée }\frac{1}{1-y^2}}$$

Le théorème 2 donne la dérivée $\frac{1}{1-\operatorname{th}^2(\operatorname{th}^{-1} y)}=\frac{1}{1-y^2}$, et le calcul direct donne $\frac{1}{2}\big(\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1-y}\big)$, qui vaut la même chose.

EXERCICE 47 ⋆⋆⋆

1. Pour $x \neq 0$, $f(-x) = -x \operatorname{sh}\left(-\frac{1}{x}\right) = x \operatorname{sh}\frac{1}{x}$: $\boxed{f \text{ est paire}}$, et l'on étudie f sur $]0\,,+\infty[$.

2. Avec $u = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{\operatorname{sh} u}{u}$. En 0^+, $u \to +\infty$, et $\frac{\operatorname{sh} u}{u} = \frac{\mathrm{e}^u}{2u} - \frac{\mathrm{e}^{-u}}{2u} \to +\infty$ par croissances comparées. En $+\infty$, $u \to 0^+$, et $\frac{\operatorname{sh} u - \operatorname{sh} 0}{u}$ est le taux d'accroissement de sh en 0, qui tend vers $\operatorname{sh}'(0) = \operatorname{ch} 0 = 1$.

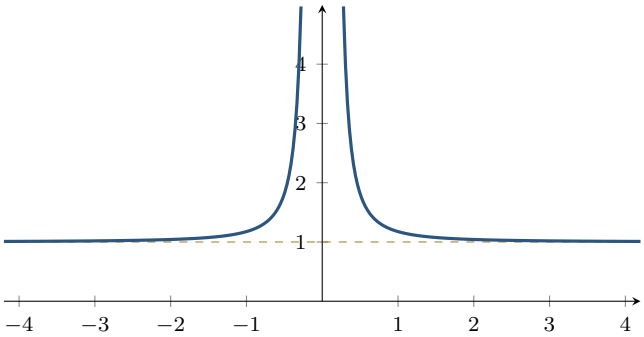
$$\boxed{\lim_{0^+} f = +\infty, \qquad \lim_{+\infty} f = 1}$$

3. La fonction $u \mapsto u - \operatorname{th} u$ a pour dérivée $1 - (1 - \operatorname{th}^2 u) = \operatorname{th}^2 u > 0$ sur $]0\,,+\infty[$, et s'annule en 0 : donc $\operatorname{th} u < u$ pour $u > 0$. Ensuite, avec $u = \frac{1}{x}$,

$$f'(x) = \operatorname{sh}\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\operatorname{ch}\frac{1}{x} = \operatorname{ch} u\,(\operatorname{th} u - u) < 0.$$

$$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]0\,,+\infty[, \text{ de } +\infty \text{ à } 1}$$

4. La courbe est symétrique par rapport à (Oy), a pour asymptotes $x = 0$ et $y = 1$, et reste au-dessus de cette dernière ; quelques valeurs : $f(1) = \operatorname{sh} 1 \approx 1{,}18$, $f(\frac{1}{2}) \approx 1{,}81$, $f(\frac{1}{4}) \approx 6{,}82$.



La courbe descend de part et d'autre de l'axe des ordonnées vers son asymptote horizontale $y = 1$, sans jamais l'atteindre, ce qui traduit l'inégalité $\operatorname{sh} u > u$ pour $u > 0$.

Fonctions à valeurs complexes

EXERCICE 48 ⋆⋆

1. Le module de $-1 + \mathrm{i}$ est $\sqrt{2}$, et $\frac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} = \cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}$; de même, $|\sqrt{3} + \mathrm{i}| = 2$.

$$\boxed{-1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4} \qquad \sqrt{3} + \mathrm{i} = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}}$$

2. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, la proposition 11 donne, par récurrence, $\left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right)^{(n)} = \lambda^n \mathrm{e}^{\lambda x}$. Or $\mathrm{e}^{-x}\sin x = \operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}\right)$, et la dérivée n-ième de la partie imaginaire est la partie imaginaire de la dérivée n-ième, par définition de la dérivée d'une fonction complexe. Avec $(-1+\mathrm{i})^n = 2^{n/2}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}n\pi/4}$:

$$\left(\mathrm{e}^{-x}\sin x\right)^{(n)} = \operatorname{Im}\left(2^{n/2}\,\mathrm{e}^{3\mathrm{i}n\pi/4}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right), \qquad \boxed{\left(\mathrm{e}^{-x}\sin x\right)^{(n)} = 2^{n/2}\,\mathrm{e}^{-x}\sin\left(x + \frac{3n\pi}{4}\right)}.$$

De même, $\mathrm{e}^{\sqrt{3}x}\cos x = \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{(\sqrt{3}+\mathrm{i})x}\right)$ et $(\sqrt{3}+\mathrm{i})^n = 2^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/6}$.

$$\boxed{\left(\mathrm{e}^{\sqrt{3}\,x}\cos x\right)^{(n)} = 2^n\,\mathrm{e}^{\sqrt{3}\,x}\cos\left(x + \frac{n\pi}{6}\right)}$$

3. Si $f^{(n)} = c_n f$, alors en $x = 0$, $2^{n/2}\sin\frac{3n\pi}{4} = 0$, donc $\frac{3n\pi}{4} \equiv 0\ [\pi]$, ce qui équivaut à $4 \mid 3n$, soit $4 \mid n$. Réciproquement, si $n = 4m$, alors $(-1+\mathrm{i})^4 = 4\,\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi} = -4$, et $f^{(4m)} = (-4)^m f$.

$$\boxed{f^{(n)} = c_n f \iff 4 \mid n, \quad \text{et alors } c_{4m} = (-4)^m}$$

4. Pour $\varphi(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ avec $\lambda = -1 + \mathrm{i}$, on a $\varphi'' + 2\varphi' + 2\varphi = (\lambda^2 + 2\lambda + 2)\,\varphi$. Or $\lambda^2 = -2\mathrm{i}$, donc $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = -2\mathrm{i} - 2 + 2\mathrm{i} + 2 = 0$. En prenant la partie imaginaire, $f'' + 2f' + 2f = 0$.

$$\boxed{f'' + 2f' + 2f = 0, \quad \text{car } -1 + \mathrm{i} \text{ est racine de } r^2 + 2r + 2}$$

Le chapitre 6 fera de cette observation la méthode de résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants, et $r^2 + 2r + 2 = 0$ y sera appelée l'équation caractéristique.

EXERCICE 49 ⋆⋆

1. La fonction $g : t \mapsto f(t)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ est dérivable d'après la proposition 11, et

$$g'(t) = f'(t)\,\mathrm{e}^{-\lambda t} - \lambda f(t)\,\mathrm{e}^{-\lambda t} = \big(f'(t) - \lambda f(t)\big)\mathrm{e}^{-\lambda t} = 0.$$

Sur l'intervalle I, g est donc constante (proposition 11, (iii)), égale à $g(0) = 1$. Comme $\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{e}^{-\lambda t} = \mathrm{e}^0 = 1$, on en déduit $f(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$.

$$\boxed{f(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \quad \text{pour tout } t \in I}$$

2. La fonction e^{φ} convient, puisque $(\mathrm{e}^{\varphi})' = \varphi'\mathrm{e}^{\varphi}$ et $\mathrm{e}^{\varphi(0)} = 1$. Si f convient aussi, la fonction $f\,\mathrm{e}^{-\varphi}$ a pour dérivée $(f' - \varphi' f)\,\mathrm{e}^{-\varphi} = 0$; elle est donc constante, égale à 1, et $f = \mathrm{e}^{\varphi}$. Avec $\varphi(t) = t + \mathrm{i}t^2$, on a bien $\varphi'(t) = 1 + 2\mathrm{i}t$ et $\varphi(0) = 0$.

$$\boxed{f(t) = \mathrm{e}^{t+\mathrm{i}t^2} = \mathrm{e}^t\big(\cos(t^2) + \mathrm{i}\sin(t^2)\big), \qquad |f(t)| = \mathrm{e}^t}$$

Le module ne dépend que de la partie réelle de φ, et l'argument que de sa partie imaginaire.

3. La formule $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ concerne une puissance dont l'exposant est fixe et la base variable. Ici, c'est l'exposant qui varie : il faut dériver la composée $t \mapsto \exp(\mathrm{i}t)$, ce qui donne $\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\big)' = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. C'est la même confusion qu'entre $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto 2^x$, que le cours signale en section 5.5.

Exercices de synthèse

EXERCICE 50 ⋆⋆

1. **Vraie**. Pour tout x, $g(f(-x)) = g(-f(x)) = -g(f(x))$; c'est l'exercice 2.
2. **Vraie**. On écrit $f = p + i$ avec $p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$, paire, et $i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$, impaire ; c'est la décomposition vue en section 5.2 du cours.
3. **Fausse**. Pour $x = \pi$, $\mathrm{Arcsin}(\sin\pi) = \mathrm{Arcsin}\,0 = 0 \neq \pi$; l'égalité n'est vraie que sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (exercice 36).
4. **Vraie**. C'est la définition de l'arc sinus, réciproque de la restriction du sinus.
5. **Fausse**. La fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée s'annule en 0 ; le théorème 1 ne donne qu'une condition suffisante.
6. **Vraie**. Pour $x \neq 0$, $x^2 = |x|^2$ avec $|x| > 0$, et la proposition 6 donne $\ln(|x|^2) = 2\ln|x|$ (exercice 21).
7. **Fausse**. Pour $x = 3$, $(3^3)^3 = 3^9$ alors que $3^{(3^3)} = 3^{27}$ (exercice 30). L'égalité a pourtant lieu pour $x = 1$ et $x = 2$, d'où le piège.
8. **Vraie**. En dérivant l'égalité $f(-x) = f(x)$, on obtient $-f'(-x) = f'(x)$.
9. **Vraie**. C'est l'exercice 43, question 3.
10. **Fausse**. Pour $x = -1$, la somme vaut $-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$; d'après la proposition 9, la somme vaut $-\frac{\pi}{2}$ pour tout $x < 0$.

À retenir : les quatre affirmations fausses viennent toutes de formules vraies sur un domaine plus petit que celui qu'on leur prête.

EXERCICE 51 ⋆⋆

1. Pour tout réel x, on a

$$\Delta_T(\lambda f+g)(x)=\lambda f(x+T)+g(x+T)-\lambda f(x)-g(x)=\lambda\,\Delta_T f(x)+\Delta_T g(x).$$

Les fonctions $\Delta_S(\Delta_T f)$ et $\Delta_T(\Delta_S f)$ prennent toutes deux en x la valeur suivante, qui est symétrique en S et T :

$$f(x+S+T)-f(x+S)-f(x+T)+f(x).$$

Enfin, $\Delta_T f=0$ signifie que $f(x+T)=f(x)$ pour tout réel x.

$$\boxed{\Delta_T \text{ est linéaire},\quad \Delta_S\Delta_T=\Delta_T\Delta_S,\quad \Delta_T f=0 \iff f \text{ est } T\text{-périodique}}$$

2. D'après la proposition 5 du cours, $\mathrm{e}^{x+T}-\mathrm{e}^x=(\mathrm{e}^T-1)\mathrm{e}^x$ pour tout réel x.

$$\boxed{\Delta_T \exp=(\mathrm{e}^T-1)\exp}$$

Supposons que $\exp=f_1+\cdots+f_n$, où chaque f_i est T_i-périodique, avec $T_i>0$, et notons Δ l'opération qui consiste à appliquer successivement Δ_{T_1}, …, Δ_{T_n}. D'une part, la formule précédente, appliquée n fois, donne

$$\Delta\exp=(\mathrm{e}^{T_1}-1)(\mathrm{e}^{T_2}-1)\cdots(\mathrm{e}^{T_n}-1)\exp,$$

qui n'est pas la fonction nulle, puisque chaque facteur $\mathrm{e}^{T_i}-1$ est strictement positif. D'autre part, la linéarité donne $\Delta\exp=\Delta f_1+\cdots+\Delta f_n$. Comme les opérations Δ_{T_j} commutent, on peut, pour calculer Δf_i, appliquer Δ_{T_i} en premier : on obtient la fonction nulle, que les opérations suivantes laissent nulle, par linéarité. Ainsi $\Delta\exp=0$, ce qui est absurde.

$$\boxed{\exp \text{ n'est pas la somme d'un nombre fini de fonctions périodiques}}$$

3. Notons $c:x\mapsto x^2$. On calcule $\Delta_T c(x)=(x+T)^2-x^2=2Tx+T^2$, puis

$$\Delta_S(\Delta_T c)(x)=2T(x+S)+T^2-2Tx-T^2=2ST.$$

Si l'on avait $c=f_1+f_2$, avec f_i de période $T_i>0$, l'opération $\Delta_{T_1}\Delta_{T_2}$ donnerait, comme à la question 2, la fonction nulle au second membre, et la constante $2T_1T_2\neq 0$ au premier : c'est impossible.

$$\boxed{x\mapsto x^2 \text{ n'est pas la somme de deux fonctions périodiques}}$$

Pour la fonction $x\mapsto x$, on trouve $\Delta_T(x\mapsto x)=T$, puis $\Delta_S\Delta_T(x\mapsto x)=0$: le même raisonnement ne fournit que l'égalité $0=0$, et ne conclut pas. Il montre seulement que $x\mapsto x$ n'est pas périodique. Ce n'est pas une faiblesse de la méthode : l'exercice 79 de la feuille du chapitre 14 montrera que $x\mapsto x$ *est* la somme de deux fonctions périodiques, nécessairement très irrégulières, puisque leur construction repose sur l'axiome du choix.
À retenir : la méthode consiste à traduire l'hypothèse « f est T-périodique » par l'équation $\Delta_T f=0$, où Δ_T est une opération linéaire, puis à exhiber une fonction que Δ_T multiplie simplement par une constante non nulle. L'exponentielle joue ce rôle pour Δ_T comme pour la dérivation, et c'est ce qui la rend si commode. Sans aucune hypothèse de continuité, l'argument est purement algébrique ; l'exercice 21 de la feuille du chapitre 11 montrera de son côté que la somme de deux fonctions périodiques n'est pas toujours périodique.

EXERCICE 52 ⋆⋆

1. Pour tout réel t, la proposition 10 du cours donne $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$ et $\operatorname{ch} t \geqslant 1 > 0$: le point $(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ appartient à la branche annoncée. Réciproquement, soit (x, y) tel que $x^2 - y^2 = 1$ et $x > 0$. La fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ (exercice 46, question 1) : il existe un unique réel t tel que $\operatorname{sh} t = y$. Alors $x^2 = 1 + \operatorname{sh}^2 t = \operatorname{ch}^2 t$, et comme x et $\operatorname{ch} t$ sont strictement positifs, $x = \operatorname{ch} t$. L'unicité de t vient de l'injectivité de sh : deux paramètres qui donnent le même point donnent la même ordonnée.

$$\boxed{\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1 \text{ et } x > 0\}, \text{ chaque point ayant un unique paramètre}}$$

Attention : $\mathcal{C}$ n'est pas l'hyperbole entière. Les points de la branche gauche, d'abscisse négative, ne sont jamais atteints, puisque $\operatorname{ch} t \geqslant 1$; on les obtient avec $(-\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$.

2. D'après le théorème 5 du chapitre 4, la similitude de centre O, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ est $z \mapsto \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} z$, et $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = 1 + \mathrm{i}$. Pour $z = x + \mathrm{i}y$, on a $(1 + \mathrm{i})(x + \mathrm{i}y) = (x - y) + \mathrm{i}(x + y)$. La réciproque est $w \mapsto \frac{w}{1+\mathrm{i}} = \frac{1-\mathrm{i}}{2} w$, et $\frac{1-\mathrm{i}}{2}(x + \mathrm{i}y) = \frac{x+y}{2} + \mathrm{i}\,\frac{y-x}{2}$.

$$\boxed{f(z) = (1 + \mathrm{i})z, \qquad f(x, y) = (x - y,\ x + y), \qquad f^{-1}(x, y) = \Big(\frac{x + y}{2},\ \frac{y - x}{2}\Big)}$$

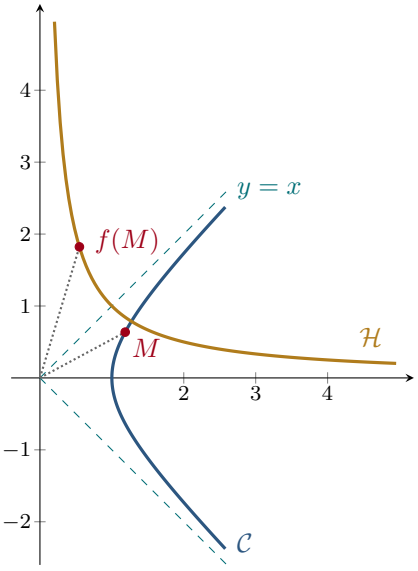
3. Pour tout réel t, la proposition 10 (i), appliquée en t et en $-t$, donne

$$f(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t) = (\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t,\ \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t) = (\mathrm{e}^{-t},\ \mathrm{e}^{t}).$$

Ce point a une abscisse strictement positive et une ordonnée égale à l'inverse de son abscisse : il appartient à $\mathcal{H}$. Réciproquement, un point $(x, \frac{1}{x})$ de $\mathcal{H}$, avec $x > 0$, est l'image du point de $\mathcal{C}$ de paramètre $t = -\ln x$.

$$\boxed{f(\mathcal{C}) = \mathcal{H}}$$

Les asymptotes ont pour images $f(x, x) = (0, 2x)$ et $f(x, -x) = (2x, 0)$: la droite $y = x$ est envoyée sur l'axe des ordonnées, et la droite $y = -x$ sur l'axe des abscisses, qui sont bien les asymptotes de la courbe de la fonction inverse.



La branche d'hyperbole $\mathcal{C}$, en ardoise, et la courbe $\mathcal{H}$ de la fonction inverse, en ocre, se correspondent par la similitude f : le point M de paramètre $t = 0{,}6$ a pour image le point $f(M) = (\mathrm{e}^{-0{,}6}, \mathrm{e}^{0{,}6})$, obtenu en tournant le segment $[OM]$, en pointillés, d'un angle $\frac{\pi}{4}$ et en multipliant sa longueur par $\sqrt{2}$.

4. Les formules d'addition de l'exercice 43, question 1, donnent

$$\rho_s(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t) = (\operatorname{ch} t \operatorname{ch} s + \operatorname{sh} t \operatorname{sh} s,\ \operatorname{ch} t \operatorname{sh} s + \operatorname{sh} t \operatorname{ch} s) = \big(\operatorname{ch}(t + s),\ \operatorname{sh}(t + s)\big).$$

$$\boxed{\rho_s \text{ envoie le point de paramètre } t \text{ sur le point de paramètre } t+s}$$

Soit (X,Y) un point du plan et $(x,y) = f^{-1}(X,Y)$, de sorte que $X = x-y$ et $Y = x+y$. Notons $(x',y') = \rho_s(x,y)$. En regroupant les termes,

$$x'-y' = (x-y)(\operatorname{ch} s - \operatorname{sh} s) = \mathrm{e}^{-s}X \qquad \text{et} \qquad x'+y' = (x+y)(\operatorname{ch} s + \operatorname{sh} s) = \mathrm{e}^{s}Y,$$

et le point $f(x',y')$ a pour coordonnées $(x'-y', x'+y')$.

$$\boxed{f \circ \rho_s \circ f^{-1} : (X,Y) \longmapsto (\mathrm{e}^{-s}X,\ \mathrm{e}^{s}Y)}$$

Cette dernière application conserve le produit XY. Or $XY = (x-y)(x+y) = x^2-y^2$, et l'on a de même $(x'-y')(x'+y') = \mathrm{e}^{-s}X\,\mathrm{e}^{s}Y = XY$.

$$\boxed{\rho_s \text{ conserve } x^2-y^2}$$

L'application ρ_s joue pour l'hyperbole le rôle que joue la rotation d'angle s pour le cercle : celle-ci conserve x^2+y^2 et ajoute s au paramètre du point $(\cos t, \sin t)$. On l'appelle *rotation hyperbolique*. En relativité restreinte, les changements de référentiel inertiel, ou transformations de Lorentz, agissent sur les coordonnées (ct,x) d'un événement par des applications de cette forme, qui conservent $c^2t^2-x^2$; le paramètre s y est appelé *rapidité*, la vitesse correspondante vaut $c\operatorname{th} s$, et la formule de $\operatorname{th}(x+y)$ de l'exercice 43 devient la loi de composition des vitesses, qui ne permet jamais de dépasser c.

EXERCICE 53 ⋆⋆⋆

1. La fonction g est dérivable sur $[0,+\infty[$, de dérivée $g'(w) = (1+w)\,\mathrm{e}^w > 0$: elle est strictement croissante, avec $g(0) = 0$ et $g(w) \to +\infty$. D'après le théorème 2, $g([0,+\infty[)$ est un intervalle qui contient 0 et n'est pas majoré, donc c'est $[0,+\infty[$. Pour $x \geqslant 0$, l'hypothèse s'écrit $g(W(x)) = x = g(g^{-1}(x))$, et l'injectivité de g donne $W(x) = g^{-1}(x)$.

$$\boxed{g : [0,+\infty[\to [0,+\infty[\text{ bijective, et } W = g^{-1}}$$

2. D'après le théorème 2, W est strictement croissante, comme g, et dérivable sur $[0,+\infty[$, puisque g' ne s'annule pas, avec

$$W'(x) = \frac{1}{g'(W(x))} = \frac{1}{(1+W(x))\mathrm{e}^{W(x)}}.$$

Pour $x > 0$, on a $W(x) > 0$ et $\mathrm{e}^{W(x)} = \frac{x}{W(x)}$.

$$\boxed{W'(x) = \frac{W(x)}{x\,(1+W(x))} \quad \text{pour } x > 0}$$

3. On a $g(0) = 0$ et $g(1) = \mathrm{e}$, donc $W(0) = 0$ et $W(\mathrm{e}) = 1$. La formule précédente donne $W'(\mathrm{e}) = \frac{1}{2\mathrm{e}}$, et la première expression de W' donne $W'(0) = \frac{1}{g'(0)} = 1$.

$$\boxed{W(0) = 0, \quad W(\mathrm{e}) = 1, \quad W'(\mathrm{e}) = \frac{1}{2\mathrm{e}}, \quad W'(0) = 1}$$

La fonction W, appelée fonction de Lambert, n'a pas d'expression à l'aide des fonctions usuelles ; tout ce qu'on en sait vient de sa définition comme réciproque, ce qui illustre la force du théorème 2.

EXERCICE 54 ⋆⋆⋆

1. Les tangentes ont pour équations

$$\boxed{\mathcal{P} : y = 2ax - a^2 \qquad \mathcal{L} : y = \frac{x}{b} + \ln b - 1}.$$

2. Deux droites non verticales sont confondues si et seulement si elles ont même pente et même ordonnée à l'origine : $2a = \frac{1}{b}$ et $-a^2 = \ln b - 1$. En reportant $a = \frac{1}{2b}$ dans la seconde équation, on obtient $\ln b - 1 + \frac{1}{4b^2} = 0$.

$$\boxed{\text{tangentes confondues} \iff a = \frac{1}{2b} \quad \text{et} \quad h(b) = 0}$$

3. On a $h'(b) = \frac{1}{b} - \frac{1}{2b^3} = \frac{2b^2-1}{2b^3}$: h décroît sur $]0\,,\frac{1}{\sqrt{2}}]$ et croît sur $[\frac{1}{\sqrt{2}}\,,+\infty[$, avec un minimum

$$h\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = -\frac{\ln 2}{2} - 1 + \frac{1}{2} = -\frac{1+\ln 2}{2} < 0.$$

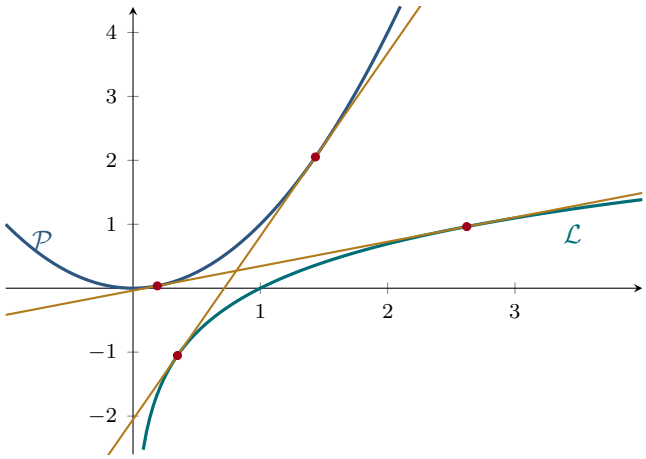
En 0^+, $h(b) = \frac{1}{4b^2}(1 + 4b^2 \ln b - 4b^2) \to +\infty$, puisque $b^2 \ln b \to 0$ par croissances comparées ; en $+\infty$, $h(b) \to +\infty$. Sur chacun des deux intervalles, h est strictement monotone et prend des valeurs de signes opposés : d'après le théorème 2, elle s'y annule exactement une fois.

$$\boxed{\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{L} \text{ ont exactement deux tangentes communes}}$$

4. On calcule $h(0{,}3) \approx 0{,}57$, $h(0{,}4) \approx -0{,}35$, $h(2{,}6) \approx -0{,}0075$ et $h(2{,}7) \approx 0{,}028$.

$$\boxed{b_1 \in]0{,}3\,;0{,}4[\qquad b_2 \in]2{,}6\,;2{,}7[}$$

Plus précisément, $b_1 \approx 0{,}349$ et $b_2 \approx 2{,}621$, ce qui donne les tangentes $y \approx 2{,}865x - 2{,}053$ et $y \approx 0{,}382x - 0{,}036$.



Les deux tangentes communes, en ocre, touchent chacune la parabole et la courbe du logarithme ; les points de contact, en carmin, sont ceux qui ont été calculés. L'une est presque horizontale, l'autre très pentue : elles correspondent aux deux racines de h, de part et d'autre de son minimum.

EXERCICE 55 ⋆⋆⋆

1. La fonction ψ est dérivable sur $]0\,,+\infty[$, et

$$\psi'(u) = \frac{\big(\ln(1+u)+1\big)u - (1+u)\ln(1+u)}{u^2} = \frac{u-\ln(1+u)}{u^2} > 0,$$

d'après l'inégalité stricte $\ln(1+u) < u$ pour $u \neq 0$ (proposition 6).

$$\boxed{\psi \text{ est strictement croissante}}$$

2. La formule du quotient donne

$$f'(x) = \frac{\frac{a}{1+ax}\ln(1+bx) - \frac{b}{1+bx}\ln(1+ax)}{\ln^2(1+bx)}.$$

En multipliant le numérateur par $(1+ax)(1+bx) > 0$, on obtient

$$a(1+bx)\ln(1+bx) - b(1+ax)\ln(1+ax) = abx\,\big(\psi(bx) - \psi(ax)\big).$$

Comme $bx > ax$, ce nombre est strictement positif : f est strictement croissante. En 0^+, on écrit

$$f(x) = \frac{a}{b}\cdot\frac{\ln(1+ax)}{ax}\cdot\frac{bx}{\ln(1+bx)},$$

et chaque quotient tend vers $\ln'(1) = 1$. En $+\infty$, $\ln(1+ax) = \ln x + \ln\big(a+\frac{1}{x}\big)$, et de même au dénominateur.

$$\boxed{f \text{ strictement croissante}, \qquad \lim_{0^+} f = \frac{a}{b}, \qquad \lim_{+\infty} f = 1}$$

3. Comme $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, on a $f\big(\frac{1}{b}\big) < f\big(\frac{1}{a}\big)$, c'est-à-dire $\dfrac{\ln(1+\frac{a}{b})}{\ln 2} < \dfrac{\ln 2}{\ln(1+\frac{b}{a})}$. Les dénominateurs étant positifs, on obtient

$$\boxed{\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) < (\ln 2)^2}.$$

Lorsque $a = b$, le membre de gauche vaut $(\ln 2)^2$: l'inégalité large reste vraie, avec égalité. Ainsi, parmi les couples $(t, \frac{1}{t})$, le produit $\ln(1+t)\ln(1+\frac{1}{t})$ est maximal pour $t = 1$.

EXERCICE 56 ⋆⋆⋆

1. Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « pour toutes fonctions f et g n fois dérivables sur I, fg est n fois dérivable sur I et vérifie la formule ». Pour $n = 0$, la formule se réduit à $fg = fg$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, et soit f et g deux fonctions $n+1$ fois dérivables sur I. Elles sont en particulier n fois dérivables, et l'hypothèse de récurrence donne

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k)}\,g^{(k)}.$$

Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, les fonctions $f^{(n-k)}$ et $g^{(k)}$ sont dérivables, puisque $n-k+1$ et $k+1$ sont au plus égaux à $n+1$. D'après la proposition 3 du cours, $(fg)^{(n)}$ est donc dérivable, et

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n+1-k)}\,g^{(k)} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k)}\,g^{(k+1)}.$$

Dans la seconde somme, on pose $j = k+1$; elle devient $\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1} f^{(n+1-j)}\,g^{(j)}$. Avec la convention $\binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0$, les deux sommes peuvent être prises de 0 à $n+1$, et la formule de Pascal (proposition 9 du chapitre 3) donne $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$, d'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k)}\,g^{(k)}}$$

Le calcul est exactement celui de la formule du binôme (théorème 2 du chapitre 3), la dérivation d'un facteur jouant le rôle de la multiplication par a ou par b. La question 2 de l'exercice 20 en était le cas particulier où f est la fonction $x \mapsto x$, dont les dérivées d'ordre au moins 2 sont nulles ; le chapitre 9 fera de cette formule son théorème 9.

2. La formule de dérivation d'un produit donne, pour $n \geqslant 1$ et $x > 0$,

$$u_n'(x) = nx^{n-1} \ln x + x^n \cdot \frac{1}{x} = n\, u_{n-1}(x) + x^{n-1}.$$

Montrons par récurrence que u_n est n fois dérivable, avec $u_n^{(n)}(x) = n!\,(\ln x + H_n)$. Pour $n = 0$, $u_0 = \ln$ et $H_0 = 0$. Supposons le résultat vrai au rang $n-1$, avec $n \geqslant 1$. La fonction $u_n' = n\, u_{n-1} + (x \mapsto x^{n-1})$ est $n-1$ fois dérivable, et, comme la dérivée $(n-1)$-ième de $x \mapsto x^{n-1}$ est la constante $(n-1)!$,

$$u_n^{(n)}(x) = n\, u_{n-1}^{(n-1)}(x) + (n-1)! = n\,(n-1)!\,(\ln x + H_{n-1}) + (n-1)! = n!\,\Big(\ln x + H_{n-1} + \frac{1}{n}\Big).$$

$$\boxed{u_n^{(n)}(x) = n!\,(\ln x + H_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et tout } x > 0}$$

3. On a $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. Si l'on suppose que $\ln^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\,x^{-k}$ pour un entier $k \geqslant 1$, on obtient en dérivant

$$\ln^{(k+1)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\,(-k)\,x^{-k-1} = (-1)^k\, k!\, x^{-(k+1)},$$

de sorte que la formule suivante se démontre par récurrence sur k.

$$\boxed{\ln^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k} \quad \text{pour tout } k \geqslant 1 \text{ et tout } x > 0}$$

D'autre part, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, dériver $n-k$ fois la fonction $x \mapsto x^n$ fait apparaître le facteur $n(n-1)\cdots(k+1) = \frac{n!}{k!}$ et l'exposant k. La formule de Leibniz, appliquée à $x \mapsto x^n$ et à ln, isole le terme $k = 0$, qui vaut $n!\ln x$, et donne

$$u_n^{(n)}(x) = n!\ln x + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{k!}\, x^k \cdot \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k} = n!\ln x + n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k}.$$

En comparant avec la question 2 et en simplifiant par $n!$, on obtient l'identité annoncée.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} = H_n \quad \text{pour tout } n \geqslant 1}$$

4. Pour $n = 3$, le membre de gauche vaut $3 - \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$, et $H_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$ ✓. Notons S_n le membre de gauche, avec $S_0 = 0$. Pour $n \geqslant 1$ et $1 \leqslant k \leqslant n$, la formule de Pascal s'écrit $\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} = \binom{n-1}{k-1}$, avec $\binom{n-1}{n} = 0$. Par différence, puis par la formule du pion (proposition 9 du chapitre 3), qui est l'égalité de l'énoncé,

$$S_n - S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n-1}{k-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k}.$$

La formule du binôme donne $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0$ pour $n \geqslant 1$; la dernière somme vaut donc 1, et $S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n}$. En sommant ces égalités de 1 à n, la somme télescopique donne $S_n = H_n$.

$$\boxed{S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n}, \quad \text{d'où à nouveau } S_n = H_n}$$

La seconde méthode est plus courte, mais elle suppose que l'on connaisse déjà le résultat. La première le fait *découvrir* : on calcule un même objet, la dérivée n-ième de $x \mapsto x^n \ln x$, de deux façons, comme

on dénombrait un même ensemble de deux façons au chapitre 3. Elle s'adapte à d'autres fonctions ; avec $x \mapsto x^{2n} = x^n \cdot x^n$, elle redonne par exemple l'identité $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$, obtenue dans la feuille du chapitre 3 à l'aide de la formule de Vandermonde.
Attention : le membre de gauche est une somme alternée de termes qui peuvent être très grands, alors que H_n croît très lentement ; pour $n = 30$, certains termes dépassent 10^7 en valeur absolue, alors que $H_{30} \approx 4{,}0$. Ces termes se compensent presque exactement, et un calcul approché de la somme, en virgule flottante, perd ainsi plusieurs chiffres significatifs : la formule exacte n'en est que plus précieuse.

EXERCICE 57 ⋆⋆⋆

1. On a $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, et la formule de $\tan(a-b)$, qui suit la proposition 8 du chapitre 4, donne

$$\tan\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2}.$$

$$\boxed{\tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}}$$

2. Les réels α et β appartiennent à $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos\alpha > 0$, $\cos\beta > 0$, et $\sin\alpha = a\cos\alpha$, $\sin\beta = b\cos\beta$. Les formules d'addition (théorème 1 du chapitre 4) donnent

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = (1+ab)\cos\alpha\cos\beta,$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = (a-b)\cos\alpha\cos\beta.$$

Si $1+ab \neq 0$, alors $\cos(\alpha-\beta) \neq 0$, et le quotient de ces deux égalités donne le résultat.

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = (1+ab)\cos\alpha\cos\beta \quad \text{et} \quad \frac{a-b}{1+ab} = \tan(\alpha-\beta) \ \text{ si } 1+ab \neq 0}$$

En particulier, $1+ab$ est du signe de $\cos(\alpha-\beta)$.

3. Pour $j \in [\![1\,;12]\!]$, notons $I_j = \left]-\frac{\pi}{2}+\frac{(j-1)\pi}{12}\,,-\frac{\pi}{2}+\frac{j\pi}{12}\right]$: ces douze intervalles de longueur $\frac{\pi}{12}$ sont deux à deux disjoints, et leur réunion $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]$ contient l'arc tangent de chaque élément de A. L'application qui associe à $a \in A$ l'indice j tel que $\operatorname{Arctan} a \in I_j$ va d'un ensemble à 13 éléments dans un ensemble à 12 éléments : d'après le principe des tiroirs (théorème 2 du chapitre 2), elle n'est pas injective. Il existe donc deux éléments distincts a et b de A dont les arcs tangents α et β sont dans le même intervalle I_j ; quitte à les échanger, $\alpha > \beta$, puisque Arctan est injective, et $0 < \alpha-\beta < \frac{\pi}{12}$. Alors $\cos(\alpha-\beta) > 0$, donc $1+ab > 0$ d'après la question 2, et

$$\frac{a-b}{1+ab} = \tan(\alpha-\beta) \in \left]0\,,\tan\frac{\pi}{12}\right[,$$

puisque la tangente est strictement croissante sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$.

$$\boxed{\text{si } \operatorname{card} A = 13, \text{ il existe } a,b \in A \text{ tels que } 0 < \frac{a-b}{1+ab} \leqslant 2-\sqrt{3}}$$

4. Notons a_1, …, a_{12} les éléments de A, rangés de sorte que l'on ait $\alpha_1 < \cdots < \alpha_{12}$ pour leurs arcs tangents, et posons $d_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant 11$, et $d_{12} = \alpha_1 + \pi - \alpha_{12}$. Ces douze écarts sont strictement positifs, le dernier parce que $\alpha_{12} - \alpha_1 < \pi$, et leur somme télescopique vaut π. Ils ne peuvent donc pas tous dépasser strictement $\frac{\pi}{12}$: l'un d'eux, d_i, vérifie $0 < d_i \leqslant \frac{\pi}{12}$.

Si $i \leqslant 11$, on prend $a = a_{i+1}$ et $b = a_i$: alors $\alpha - \beta = d_i \in \left]0\,,\frac{\pi}{12}\right]$, et l'on conclut comme à la question 3.

Si $i = 12$, on prend $a = a_1$ et $b = a_{12}$: alors $\alpha - \beta = d_{12} - \pi \in \left]-\pi\,,-\frac{11\pi}{12}\right]$. Dans ce cas, $\cos(\alpha-\beta) = -\cos d_{12} < 0$, donc $1+ab < 0$, et la π-périodicité de la tangente donne

$$\frac{a-b}{1+ab} = \tan(d_{12}-\pi) = \tan d_{12} \in \left]0\,,2-\sqrt{3}\right].$$

la conclusion reste vraie lorsque $\operatorname{card} A = 12$

L'idée est que la tangente, étant π-périodique, « recolle » les deux extrémités de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$: un très grand réel positif b et un réel négatif a de grande valeur absolue ont des arcs tangents éloignés, mais un quotient $\frac{a-b}{1+ab}$ petit et positif. On range donc les douze arcs sur un cercle de longueur π, et non sur un segment, ce qui économise un tiroir.

5. Posons $\alpha_k = -\frac{\pi}{2} + \frac{(2k-1)\pi}{22}$ pour $k \in [\![1\,;11]\!]$. Ces réels sont compris entre $-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{22}$ et $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{22}$, donc α_k est l'arc tangent de $a_k = \tan \alpha_k$. Pour $k \neq l$, on a $\alpha_k - \alpha_l = \frac{(k-l)\pi}{11}$, avec $1 \leqslant |k-l| \leqslant 10$; ce n'est jamais $\pm\frac{\pi}{2}$, car 11 ne peut valoir $\pm 2(k-l)$, donc $1 + a_k a_l \neq 0$. Notons $m \in [\![1\,;10]\!]$ le reste de la division de $k-l$ par 11 ; par π-périodicité,

$$\frac{a_k - a_l}{1 + a_k a_l} = \tan \frac{(k-l)\pi}{11} = \tan \frac{m\pi}{11}.$$

Si $1 \leqslant m \leqslant 5$, l'angle $\frac{m\pi}{11}$ est dans $\left[\frac{\pi}{11}, \frac{\pi}{2}\right[$, et sa tangente est strictement supérieure à $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$, puisque $\frac{\pi}{11} > \frac{\pi}{12}$. Si $6 \leqslant m \leqslant 10$, l'angle est dans $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, et sa tangente est strictement négative. Aucun couple ne convient.

le plus petit cardinal qui garantit l'existence de a et b est 12

Numériquement, la plus petite valeur positive du quotient pour cette partie est $\tan \frac{\pi}{11} \approx 0{,}2936$, à comparer à $2 - \sqrt{3} \approx 0{,}2679$. La constante $2 - \sqrt{3}$ est elle aussi optimale pour 12 éléments : avec les arcs $-\frac{\pi}{2} + \frac{(2k-1)\pi}{24}$, pour $k \in [\![1\,;12]\!]$, tous les écarts valent exactement $\frac{\pi}{12}$, et le plus petit quotient positif est égal à $2 - \sqrt{3}$.

À retenir : le découpage naïf de la question 3 demande 13 éléments, alors que 12 suffisent. Dans un argument de tiroirs, la difficulté est toujours de choisir les tiroirs, comme le soulignait déjà le corrigé de la feuille du chapitre 1 ; ici, le bon choix vient de la périodicité de la tangente.

EXERCICE 58 ⋆⋆⋆⋆

1. Si $u = 0$ ou $v = 0$, l'inégalité est claire, en convenant que $0^p = 0$. Fixons $v > 0$, et posons $\varphi(u) = \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} - uv$ pour $u > 0$. Alors $\varphi'(u) = u^{p-1} - v$, qui s'annule en $u_0 = v^{1/(p-1)}$: φ décroît sur $]0, u_0]$ et croît ensuite. Comme $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ équivaut à $q = \frac{p}{p-1}$, on a $u_0^p = v^{p/(p-1)} = v^q$ et $u_0 v = v^{\frac{1}{p-1}+1} = v^q$, donc

$$\varphi(u_0) = \frac{v^q}{p} + \frac{v^q}{q} - v^q = 0.$$

$$\boxed{uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}}$$

Pour $p = q = 2$, on retrouve $uv \leqslant \frac{u^2+v^2}{2}$, c'est-à-dire $(u-v)^2 \geqslant 0$.

2. Notons $A = \left(\sum |u_k|^p\right)^{1/p}$ et $B = \left(\sum |v_k|^q\right)^{1/q}$. Dans le cas $A = B = 1$, la question 1 appliquée à $|u_k|$ et $|v_k|$, puis sommée, donne

$$\sum_{k=1}^{n} |u_k v_k| \leqslant \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} |u_k|^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{n} |v_k|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Dans le cas général, si $A = 0$, tous les u_k sont nuls et l'inégalité est une égalité $0 = 0$; de même si $B = 0$. Sinon, les nombres $u'_k = \frac{u_k}{A}$ et $v'_k = \frac{v_k}{B}$ vérifient $\sum |u'_k|^p = \frac{1}{A^p} \sum |u_k|^p = 1$, et de même pour les v'_k. Le premier cas donne $\sum |u'_k v'_k| \leqslant 1$, soit, en multipliant par AB :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} |u_k v_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |u_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |v_k|^q\right)^{1/q}}$$

Pour $p = q = 2$, c'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que le chapitre 19 retrouvera dans le cadre des espaces préhilbertiens. La méthode, se ramener au cas où les deux quantités valent 1 par homogénéité, est à retenir.

EXERCICE 59 ⋆⋆⋆

1. Fixons x, et dérivons l'égalité $f(x+y) = f(x) + f(y)$ par rapport à y : $f'(x+y) = f'(y)$. En $y = 0$, $f'(x) = f'(0)$: la dérivée est constante, égale à un réel c. La fonction $x \mapsto f(x) - cx$ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$, donc elle est constante (théorème 1), égale à $f(0)$; or $f(0) = f(0+0) = 2f(0)$ impose $f(0) = 0$.

$$\boxed{f(x) = cx,\ c \in \mathbb{R}}$$

Réciproquement, ces fonctions conviennent.

2. Dérivons de même par rapport à y : $xf'(xy) = f'(y)$, puis faisons $y = 1$: $f'(x) = \frac{c}{x}$, avec $c = f'(1)$. Alors $f - c\ln$ est constante sur $]0\,,+\infty[$, et $f(1) = 2f(1)$ donne $f(1) = 0$.

$$\boxed{f = c\ln,\ c \in \mathbb{R}}$$

Ce sont exactement les logarithmes de toutes les bases, au facteur près : la seule façon dérivable de transformer les produits en sommes est celle de Napier, comme le racontait l'introduction historique du cours.

3. La fonction $g = \ln \circ f$ est dérivable, et $g(x+y) = \ln\big(f(x)f(y)\big) = g(x)+g(y)$. D'après la question 1, $g(x) = cx$.

$$\boxed{f(x) = \mathrm{e}^{cx},\ c \in \mathbb{R}}$$

L'hypothèse $f > 0$ permet de prendre le logarithme ; sans elle, il faudrait ajouter la fonction nulle. On peut affaiblir l'hypothèse de dérivabilité en une hypothèse de continuité, avec les mêmes conclusions, mais la démonstration utilise la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, qui relève des chapitres 7 et 8.