EXERCICES – CHAPITRE 5

FONCTIONS USUELLES ET DÉRIVATION PRATIQUE

⋆ *application directe* ⋆⋆ *mise en œuvre* ⋆⋆⋆ *problème* ⋆⋆⋆⋆ *problème long, en autonomie*

Généralités sur les fonctions

EXERCICE 1 ⋆

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes, en l'écrivant comme une réunion d'intervalles.

(a) $x \mapsto \sqrt{2x^2 - 12x + 18}$

(b) $x \mapsto \ln(x^2 + 4x + 4)$

(c) $x \mapsto \sqrt{\dfrac{8 - 16x}{(7 + x)^2}}$

(d) $x \mapsto \ln(3 - x) + \dfrac{\sqrt{x - 1}}{x - 2}$

(e) $x \mapsto \ln(\ln x)$

(f) $x \mapsto \ln\big(\ln(\ln x)\big)$

Simplifier l'expression (a), puis tracer sans calcul la courbe de la fonction qu'elle définit.

EXERCICE 2 ⋆

Dans chacun des cas suivants, dire si la parité de la fonction obtenue est déterminée par les hypothèses ; si oui, la démontrer, et sinon, donner deux exemples qui aboutissent à des conclusions différentes.

1. La somme $f + g$, puis le produit fg, de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$, lorsque f et g sont toutes deux paires, toutes deux impaires, ou l'une paire et l'autre impaire.
2. La composée $g \circ f$ de deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dans les quatre cas de parité possibles.
3. La composée $h \circ f$, puis la composée $f \circ h$, lorsque f est paire et que h est une fonction quelconque de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 3 ⋆

Étudier la parité des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$.

(a) $x \mapsto \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$

(b) $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1}$

(c) $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}$

(d) $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + 1} - \dfrac{1}{2}$

Que dire de la courbe de $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + 1}$?

EXERCICE 4 ⋆⋆

Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'ensemble de définition, puis expliquer comment sa courbe se déduit, par des translations, des affinités ou des symétries, de celle d'une fonction de référence. Tracer enfin rapidement la courbe.

(a) $x \mapsto 2\ln\dfrac{1}{2-x}$ (b) $x \mapsto \sqrt{3x-2}-1$ (c) $x \mapsto \dfrac{4}{2x+1}+3$

EXERCICE 5 ⋆⋆

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $T>0$. On dit que D est *T-périodique* si, pour tout $x \in D$, les réels $x+T$ et $x-T$ appartiennent encore à D. On note $\mathbb{1}_D$ la fonction indicatrice de D, définie sur $\mathbb{R}$ comme au chapitre 2.

1. Montrer que D est T-périodique si et seulement si la fonction $\mathbb{1}_D$ est T-périodique. Donner un exemple de partie D qui soit 1-périodique, sans être T-périodique pour aucun $T \in]0\,,1[$.
2. À quelle condition portant sur D la fonction $\mathbb{1}_D$ est-elle paire ? impaire ?
3. À quelle condition portant sur D la fonction $\mathbb{1}_D$ est-elle croissante ?

EXERCICE 6 ⋆⋆

Soit α un réel non nul. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \cos x + \cos(\alpha x)$ est périodique si et seulement si α est rationnel.

Indication : si $T>0$ est une période, comparer $f(T)$ et $f(0)$.

EXERCICE 7 ⋆⋆

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \circ f$ soit croissante et que $f \circ f \circ f$ soit strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

EXERCICE 8 ⋆⋆

On rappelle que la courbe d'une fonction f définie sur D admet le point $\Omega(a,b)$ pour centre de symétrie si, pour tout $x \in D$, le réel $2a-x$ appartient à D et $f(2a-x)=2b-f(x)$.

1. Montrer que le point $\Omega(a,b)$ est centre de symétrie de la courbe de f si et seulement si la fonction $h \mapsto f(a+h)-b$ est impaire. Interpréter cette condition à l'aide de la proposition 1 du cours.
2. Montrer que la courbe d'équation $y=\dfrac{x+3}{x+5}$ admet un centre de symétrie, que l'on précisera.
3. Soit p, q, r, s des réels avec $p \neq 0$. Montrer que la courbe d'équation $y=px^3+qx^2+rx+s$ admet un centre de symétrie, d'abscisse $-\dfrac{q}{3p}$.
4. Montrer de même que toute parabole d'équation $y=px^2+qx+r$, avec $p \neq 0$, admet un axe de symétrie vertical.

EXERCICE 9 ⋆⋆⋆

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dont la courbe admet deux centres de symétrie distincts $\Omega_1(a_1, b_1)$ et $\Omega_2(a_2, b_2)$.

1. Montrer que $a_1 \neq a_2$.
2. En composant les deux symétries, montrer que l'on a, pour tout réel x,
$$f(x + 2(a_2 - a_1)) = f(x) + 2(b_2 - b_1).$$
3. En déduire que f est la somme d'une fonction affine et d'une fonction périodique.
4. Réciproquement, donner l'exemple d'une fonction non affine dont la courbe admet une infinité de centres de symétrie.

Dérivation

EXERCICE 10 ⋆

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition, préciser un ensemble sur lequel la fonction est dérivable d'après les théorèmes du cours, et calculer sa dérivée.

(a) $x \mapsto \ln(1 + 2\cos x)$

(b) $x \mapsto \sqrt{\sqrt{x-2} - 1}$

(c) $x \mapsto \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

(d) $x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{x}}$

(e) $x \mapsto \dfrac{\cos(2x)}{x^2 - 2}$

(f) $x \mapsto \sin x \, \sin \dfrac{1}{x}$

EXERCICE 11 ⋆⋆

Pour tout réel m, on note C_m la courbe de la fonction $f_m : x \mapsto \dfrac{x+m}{x^2+1}$.

1. Montrer que les tangentes aux courbes C_m en leur point d'abscisse 0 sont parallèles.
2. Montrer que les tangentes aux courbes C_m en leur point d'abscisse 1 sont concourantes, en un point que l'on déterminera.

EXERCICE 12 ⋆⋆

1. Existe-t-il un point de la courbe du logarithme népérien en lequel la tangente passe par l'origine ?
2. On cherche le point de la courbe d'équation $y = \mathrm{e}^x$ le plus proche de l'origine O. Montrer que la fonction $g : x \mapsto x + \mathrm{e}^{2x}$ s'annule en un unique réel x_0, et que $x_0 \in]-1, 0[$. En déduire que le point $M_0(x_0, \mathrm{e}^{x_0})$ répond à la question.
3. Montrer que la tangente à la courbe en M_0 est perpendiculaire à la droite (OM_0). Interpréter géométriquement.

EXERCICE 13 ⋆⋆

Étudier les branches infinies des fonctions suivantes : asymptotes éventuelles, et position de la courbe par rapport à ses asymptotes obliques lorsque c'est possible.

(a) $x \mapsto \dfrac{2x^2-3x+1}{x+2}$

(b) $x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$

(c) $x \mapsto x\,\mathrm{e}^{1/x}$, en $\pm\infty$

(d) $x \mapsto x+\sqrt{x}$, en $+\infty$

Pour (b), l'erreur la plus répandue est d'annoncer la même asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$: expliquer pourquoi elle est fausse.

EXERCICE 14 ⋆⋆⋆

On considère la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, et l'on suit le plan d'étude du cours.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f. La fonction f est-elle paire ou impaire ?
2. Étudier les limites de f aux bornes de D. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x-1$ est asymptote à la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Montrer que $f(x)^2-(x-1)^2 = \dfrac{x-1}{x+1}$ pour tout $x \in D$, et en déduire la position de la courbe par rapport à Δ.
4. Montrer que f est dérivable sur $D\setminus\{1\}$, et que $f'(x) = \dfrac{x^2+x-1}{(x+1)^2}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.
5. Dresser le tableau de variations de f. On exprimera la valeur de l'extremum à l'aide du nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, qui vérifie $\varphi^2 = \varphi+1$.
6. Étudier le taux d'accroissement de f en 1, puis tracer la courbe en utilisant tous les résultats obtenus.

EXERCICE 15 ⋆⋆

Démontrer les inégalités suivantes, en étudiant chaque fois une fonction bien choisie.

(a) Pour tout $x \geqslant 0$, $\sin x \leqslant x$; en déduire que $|\sin x| \leqslant |x|$ pour tout réel x.

(b) Pour tout réel x, $1-\dfrac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1$.

(c) Pour tout $x \in \left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan x \geqslant x$.

(d) Pour tout $x \in \left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \geqslant \dfrac{2}{\pi}x$. On étudiera la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ sur $\left]0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$. Interpréter graphiquement.

EXERCICE 16 ⋆⋆

Inégalité de Huygens. Montrer que, pour tout $x \in \left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\dfrac{2}{3}\sin x + \dfrac{1}{3}\tan x \geqslant x$.

Indication : on factorisera le polynôme $2c^3 - 3c^2 + 1$, après avoir remarqué qu'il s'annule en 1.

EXERCICE 17 ⋆⋆

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 + x$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, et que sa réciproque f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(2)$ et $f^{-1}(10)$, puis $(f^{-1})'(0)$, $(f^{-1})'(2)$ et $(f^{-1})'(10)$.
3. Tracer sur une même figure les courbes de f et de f^{-1}, avec leurs tangentes à l'origine.
4. Un élève affirme : « la fonction $g : x \mapsto x^3$ est strictement croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sa réciproque est dérivable sur $\mathbb{R}$ ». Corriger cette affirmation.

EXERCICE 18 ⋆⋆

Le plan est muni d'un repère orthonormé, et l'on note $s : (x, y) \mapsto (y, x)$ la symétrie par rapport à la première bissectrice Δ, comme dans le cours.

1. Soit $f : I \to I$ une bijection, où I est une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que la courbe de f est symétrique par rapport à Δ, c'est-à-dire que $s(\Gamma_f) = \Gamma_f$, si et seulement si $f \circ f = \mathrm{id}_I$.
2. Soit $I = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $f : x \mapsto \dfrac{x+2}{x-1}$. Montrer que f est une bijection de I sur I égale à sa propre réciproque.
3. Déterminer les points d'intersection de la courbe de f avec Δ, puis tracer la courbe en faisant apparaître sa symétrie.
4. Plus généralement, soit a, b, c des réels avec $c \neq 0$ et $a^2 + bc \neq 0$. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx-a}$ est sa propre réciproque.

EXERCICE 19 ⋆⋆

Calculer, pour tout entier $n \geqslant 1$, la dérivée n-ième de chacune des fonctions suivantes. On commencera par conjecturer la formule à l'aide des premières dérivées, puis on la démontrera par récurrence.

(a) $x \mapsto \cos(3x)$

(b) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 1}$

(c) $x \mapsto \dfrac{1}{2 + 5x - 3x^2}$

(d) $x \mapsto \sin(5x - 2)\cos(2x + 1)$

Indication : pour (b) et (c), écrire la fraction comme une somme de deux fractions plus simples ; pour (d), linéariser comme au chapitre 4.

EXERCICE 20 ⋆⋆⋆

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $f_n(x) = x^{n-1}\mathrm{e}^{1/x}$ pour $x \neq 0$.

1. Calculer f_1', f_2'' et $f_3^{(3)}$. Conjecturer une expression simple de $f_n^{(n)}$.
2. Soit g une fonction $n+1$ fois dérivable sur un intervalle. Montrer par récurrence sur n que la fonction $x \mapsto x\,g(x)$ est $n+1$ fois dérivable, et que
$$\big(x\,g(x)\big)^{(n+1)} = x\,g^{(n+1)}(x) + (n+1)\,g^{(n)}(x).$$
3. En remarquant que $f_{n+1}(x) = xf_n(x)$, démontrer la conjecture par récurrence sur n.

Exponentielle et logarithme

EXERCICE 21 ⋆

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes, en commençant chaque fois par déterminer l'ensemble des réels pour lesquels elles ont un sens.

(a) $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 6 = 0$

(b) $3\mathrm{e}^x - 7\mathrm{e}^{-x} - 20 = 0$

(c) $\ln(x^2-1) + \ln 4 = \ln(4x-1)$

(d) $\ln(x+2) - \ln(x+1) = \ln(x-1)$

(e) $\ln|x-1| + \ln|x+2| = \ln|4x^2+3x-7|$

(f) $\ln(x^2) = 2$

Pour (f), un élève écrit : « $\ln(x^2) = 2\ln x$, donc $\ln x = 1$, et l'unique solution est e ». Où est l'erreur ?

EXERCICE 22 ⋆

Résoudre les inéquations suivantes.

(a) $\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x - 3 \leqslant 2$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\ln(x-1) + \ln(x+1) < 2\ln x - 1$, d'inconnue $x \in]1\,,+\infty[$.

(c) $\ln(2x+1) \geqslant \ln(x^2-2)$.

EXERCICE 23 ⋆⋆

Résoudre les systèmes suivants, d'inconnues réelles x et y.

(a) $\begin{cases} \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{2y} = 5 \\ \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{e}^{-y} = \dfrac{1}{25} \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2\ln x - 3\ln y = \ln 2 \\ x - y = 2 \end{cases}$

EXERCICE 24 ⋆

Le médecin légiste. D'après la loi de refroidissement de Newton, la température d'un corps placé dans une pièce à 20 °C vérifie $T(t) = A\,\mathrm{e}^{-ct} + 20$, où t est le temps en heures, et A et c deux constantes positives. Un corps est découvert à 23 h, à la température de 31 °C ; une heure plus tard, il n'est plus qu'à 29 °C. On prend l'origine des temps à l'heure de la découverte.

1. Déterminer les constantes A et c.
2. Sachant que la température du corps vivant était de 37 °C, déterminer l'heure du décès, à la minute près.

EXERCICE 25 ⋆⋆

1. Soit N un entier naturel non nul et $k \geqslant 1$ un entier. Montrer que N s'écrit avec exactement k chiffres en base 10 si et seulement si $k-1 \leqslant \log_{10} N < k$.
2. Le plus grand nombre premier connu en 2018 était $2^{82\,589\,933} - 1$. Combien a-t-il de chiffres ? On justifiera que ce nombre et la puissance de 2 qui le suit ont le même nombre de chiffres. On donne $\log_{10} 2 \approx 0{,}301\,029\,995\,66$.
3. Le nombre 304^{1777} a 4 413 chiffres. Existe-t-il des entiers n tels que 2^n ait autant de chiffres que lui ? Les déterminer.

EXERCICE 26 ⋆⋆

1. Montrer que le réel $\log_{10} 2$ n'est pas rationnel.
2. Montrer de même que $\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ n'est pas rationnel.
3. Montrer que $\log_{10} 5$ n'est pas rationnel. Un élève affirme que la somme de deux réels non rationnels n'est jamais rationnelle : que lui répondre ?

EXERCICE 27 ⋆⋆

1. Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
2. Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $(x-2)\mathrm{e}^x + x + 2 \geqslant 0$.
3. À l'aide de l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$ du cours, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$,
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$
En prenant $n = 100$, en déduire un encadrement de e d'amplitude inférieure à 0,03.

EXERCICE 28 ⋆⋆

1. Montrer que l'équation $x \ln x = 1$ admet une unique solution sur $]0\,,+\infty[$, et que celle-ci appartient à $]1\,,\mathrm{e}[$.
2. Montrer que l'équation $\mathrm{e}^{-x^2} = \mathrm{e}^x - 1$ admet une unique solution réelle. On commencera par montrer qu'elle n'en a aucune sur $]-\infty\,,0]$.

Fonctions puissances et croissances comparées

EXERCICE 29 ⋆

Résoudre les équations et le système suivants, d'inconnues réelles.

(a) $2^{x+4} + 3^x = 2^{x+2} + 3^{x+2}$

(b) $2^{x+1} + 4^x = 15$

(c) $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$

(d) $\begin{cases} 8^x = 10^y \\ 2^x = 5^y \end{cases}$

EXERCICE 30 ⋆⋆

Déterminer les limites suivantes, en se ramenant chaque fois aux croissances comparées du cours.

(a) $\dfrac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$

(b) $x^{1/x}$ en $+\infty$

(c) $\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{x^{10}}$ en $+\infty$

(d) $x\,(\ln x)^3$ en 0^+

(e) $\dfrac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$ en $+\infty$

(f) $x^{1/\ln x}$ en $+\infty$

La limite (e) cache un piège d'écriture : les nombres $(x^x)^x$ et $x^{(x^x)}$ sont-ils égaux ?

EXERCICE 31 ⋆⋆

On considère la fonction $f : x \mapsto x^x$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f, et écrire $f(x)$ à l'aide de l'exponentielle.
2. Étudier les variations de f, et ses limites en 0 et en $+\infty$. On donnera la valeur exacte du minimum.
3. Étudier le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-1}{x}$ en 0^+ : que peut-on en dire de la courbe au voisinage de 0 ?
4. Discuter, selon la valeur du réel y, le nombre de solutions de l'équation $x^x = y$.

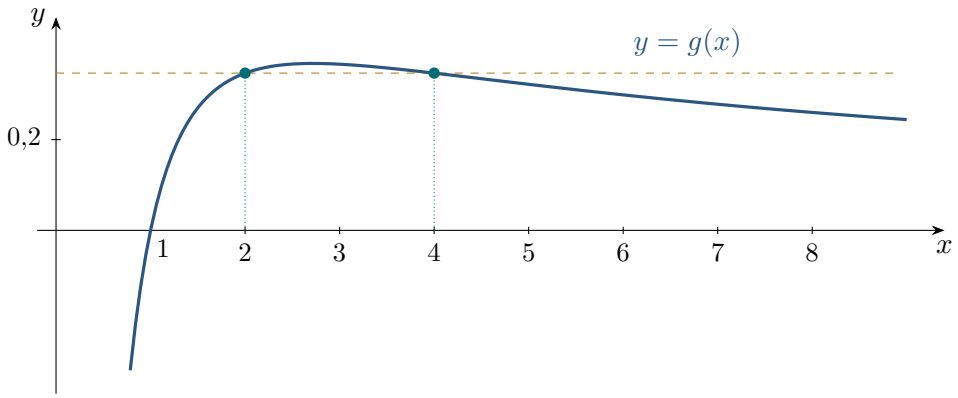
EXERCICE 32 ⋆⋆⋆

On cherche tous les réels $a > 0$ tels que $a^x \geqslant x+1$ pour tout réel x.

1. Montrer que $a = \mathrm{e}$ convient.
2. Soit $a > 0$. Montrer que $\dfrac{a^x - 1}{x}$ tend vers $\ln a$ lorsque x tend vers 0.
3. On suppose que a convient. En distinguant les cas $x > 0$ et $x < 0$, montrer que $\ln a \geqslant 1$ et $\ln a \leqslant 1$. Conclure.
4. Interpréter graphiquement le résultat à l'aide des tangentes en 0 aux courbes $y = a^x$.

EXERCICE 33 ⋆⋆⋆

On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0\,,+\infty[$, dont la courbe est représentée ci-dessous.



1. Étudier les variations et les limites de g, puis justifier que $g(2) = g(4)$, comme le suggère la figure.
2. Déterminer les entiers naturels n tels que $2^n \geqslant n^2$.

3. Sans calculatrice, comparer les réels e^π et π^e.
4. Déterminer tous les couples (p, q) d'entiers naturels non nuls tels que $p < q$ et $p^q = q^p$.

Fonctions circulaires réciproques

EXERCICE 34 ⋆

Calculer les nombres suivants.

(a) $\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right)$
(b) $\operatorname{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
(c) $\operatorname{Arctan}\sqrt{3}$
(d) $\operatorname{Arccos}\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right)$
(e) $\operatorname{Arcsin}(\sin 3)$
(f) $\operatorname{Arctan}\left(\tan\frac{87\pi}{5}\right)$
(g) $\operatorname{Arccos}\left(\sin\frac{7\pi}{15}\right)$
(h) $\operatorname{Arccos}\left(\sin\frac{17\pi}{5}\right)$
(i) $\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

EXERCICE 35 ⋆

Simplifier les expressions suivantes, après avoir précisé pour quels réels x elles ont un sens.

(a) $\cos(\operatorname{Arctan} x)$
(b) $\sin(\operatorname{Arctan} x)$
(c) $\tan(\operatorname{Arcsin} x)$
(d) $\cos(2\operatorname{Arccos} x)$
(e) $\sin(2\operatorname{Arccos} x)$
(f) $\cos(2\operatorname{Arctan} x)$

EXERCICE 36 ⋆⋆

1. Tracer la courbe de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arcsin}(\sin x)$. On étudiera sa parité et sa périodicité, puis on en donnera une expression simple sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.
2. Tracer de même les courbes de $x \mapsto \operatorname{Arccos}(\cos x)$ et de $x \mapsto \operatorname{Arctan}(\tan x)$.
3. Montrer que la courbe de la fonction Arccos admet un centre de symétrie, que l'on précisera.

EXERCICE 37 ⋆⋆

Démontrer de deux façons différentes que, pour tout $x \geqslant 0$,

$$\operatorname{Arccos}\frac{1-x}{1+x} = 2\operatorname{Arctan}\sqrt{x}\,:$$

d'abord en étudiant la différence des deux membres, puis en posant $\theta = \operatorname{Arctan}\sqrt{x}$ et en calculant $\cos(2\theta)$. Quelle méthode préférer ?

EXERCICE 38 ⋆⋆

1. Soit a et b deux réels tels que $ab \neq 1$. Montrer qu'il existe un entier $k \in \{-1, 0, 1\}$ tel que

$$\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b = \operatorname{Arctan}\frac{a+b}{1-ab} + k\pi,$$

et montrer que $k = 0$ lorsque $ab < 1$.

2. En déduire que $2\operatorname{Arctan}\frac{1}{3} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$.
3. Calculer $\operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} 5 + \operatorname{Arctan} 8$.
4. Résoudre l'équation $\operatorname{Arctan}(x-3) + \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}(x+3) = \frac{5\pi}{4}$.

EXERCICE 39 ⋆⋆

Résoudre les équations suivantes. Chaque fois que l'on applique une fonction aux deux membres, on vérifiera que l'on ne crée pas de fausses solutions.

(a) $\operatorname{Arcsin}(2x) = \operatorname{Arccos} x$

(b) $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}(2x) = \dfrac{\pi}{4}$

(c) $\operatorname{Arcsin} \dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{\pi}{3}$

(d) $\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} 3$

EXERCICE 40 ⋆⋆⋆

On considère la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arccos}(4x^3 - 3x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Rappeler l'expression de $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$, obtenue au chapitre 4.
3. En posant $\theta = \operatorname{Arccos} x$, exprimer $f(x)$ sous la forme $a + b \operatorname{Arccos} x$, où les constantes a et b dépendent de l'intervalle auquel appartient x.
4. Tracer la courbe de f. En quels points la fonction f semble-t-elle ne pas être dérivable ?

EXERCICE 41 ⋆⋆

1. Montrer que, pour tout réel x, $\operatorname{Arctan}(x+1) - \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x^2+x+1}$.
2. En déduire une expression simple de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan} \frac{1}{k^2+k+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Fonctions hyperboliques

EXERCICE 42 ⋆

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

(a) $\operatorname{ch} x = 2$ (b) $5\operatorname{ch} x - 3\operatorname{sh} x = 4$ (c) $3\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x = 1$

Soit ensuite a et b deux réels. Discuter, selon leurs valeurs, l'existence et le nombre de solutions de l'équation $a\operatorname{ch} x + b\operatorname{sh} x = 0$.

EXERCICE 43 ⋆⋆

1. Montrer que, pour tous réels x et y,
$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y.$$
2. En déduire une expression de $\operatorname{th}(x+y)$ en fonction de $\operatorname{th} x$ et $\operatorname{th} y$.
3. Montrer que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1\,,1[$, puis en déduire que $\dfrac{a+b}{1+ab} \in]-1\,,1[$ pour tous a, b de $]-1\,,1[$.
4. Comparer ces formules avec celles de la trigonométrie circulaire.

EXERCICE 44 ⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et x un réel non nul.

1. Montrer que $(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch}(nx) + \operatorname{sh}(nx)$.
2. Calculer les sommes $C_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(kx)$. On montrera que $C_n = \dfrac{\operatorname{ch}\frac{nx}{2}\ \operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}$.
3. Simplifier le produit $P_n = 2^n \prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch}\dfrac{x}{2^k}$, en remarquant que $\operatorname{sh}(2a) = 2\operatorname{sh} a \operatorname{ch} a$.

EXERCICE 45 ⋆⋆

1. Montrer que, pour tout réel x, $\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x) + \operatorname{Arccos}(\operatorname{th} x) = \dfrac{\pi}{2}$.
2. Résoudre l'équation $\operatorname{th} x = \dfrac{5}{13}$, puis en déduire que $\operatorname{Arctan}\dfrac{5}{12} + \operatorname{Arccos}\dfrac{5}{13} = \dfrac{\pi}{2}$. Retrouver ce résultat géométriquement, à l'aide d'un triangle rectangle de côtés 5, 12 et 13.
3. Démontrer de deux façons différentes que, pour tout réel x, $2\operatorname{Arctan}(\operatorname{th} x) = \operatorname{Arctan}\big(\operatorname{sh}(2x)\big)$.

EXERCICE 46 ⋆⋆⋆

Les réciproques des fonctions hyperboliques ne sont pas au programme, mais elles s'expriment à l'aide du logarithme.

1. Montrer que sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. En résolvant l'équation $\operatorname{sh} x = y$, d'inconnue x, montrer que sa réciproque est $y \mapsto \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$. Calculer la dérivée de cette réciproque de deux façons : à l'aide du théorème 2 du cours, puis directement.
2. Mêmes questions pour la restriction de ch à $[0\,, +\infty[$, qui réalise une bijection sur un intervalle que l'on précisera.
3. Mêmes questions pour th, qui réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1\,, 1[$.

EXERCICE 47 ⋆⋆⋆

On étudie la fonction $f : x \mapsto x \operatorname{sh}\dfrac{1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$.

1. Étudier la parité de f.
2. Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$. Pour la seconde, on reconnaîtra un taux d'accroissement.
3. Montrer que, pour tout $u > 0$, $\operatorname{th} u < u$, et en déduire les variations de f.
4. Tracer la courbe de f.

Fonctions à valeurs complexes

EXERCICE 48 ⋆⋆

Le cours a calculé les dérivées successives de $x \mapsto \mathrm{e}^x \cos x$ en la voyant comme la partie réelle de $x \mapsto \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$. On applique ici la même méthode à d'autres fonctions.

1. Écrire $-1+\mathrm{i}$ et $\sqrt{3}+\mathrm{i}$ sous forme exponentielle.
2. Calculer la dérivée n-ième de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\sin x$, puis celle de $x \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{3}x}\cos x$, pour tout $n \geqslant 1$.
3. Pour quels entiers n la dérivée n-ième de $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\sin x$ est-elle de la forme $c_n f$, avec c_n réel ?
4. Montrer que f vérifie $f'' + 2f' + 2f = 0$. Quel lien avec le complexe $-1+\mathrm{i}$?

EXERCICE 49 ⋆⋆

Soit I un intervalle contenant 0.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable telle que $f' = \lambda f$ et $f(0) = 1$. En dérivant $t \mapsto f(t)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$, montrer que $f(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ pour tout $t \in I$.
2. Plus généralement, soit $\varphi : I \to \mathbb{C}$ dérivable, avec $\varphi(0) = 0$. Montrer que l'unique fonction $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable telle que $f' = \varphi' f$ et $f(0) = 1$ est e^{φ}. Déterminer ainsi la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dérivable telle que $f'(t) = (1+2\mathrm{i}t)f(t)$ pour tout t et $f(0) = 1$, et calculer son module.
3. Un élève dérive $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ en écrivant $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)' = \mathrm{i}t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t-1}$, « comme pour une puissance ». Expliquer l'erreur.

Exercices de synthèse

EXERCICE 50 ⋆⋆

Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

1. Si f et g sont deux fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $g \circ f$ est impaire.
2. Toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
3. Pour tout réel x, $\mathrm{Arcsin}(\sin x) = x$.
4. Pour tout $x \in [-1\,,1]$, $\sin(\mathrm{Arcsin}\, x) = x$.
5. Si f est dérivable et strictement croissante sur un intervalle I, alors $f' > 0$ sur I.
6. Pour tout réel x non nul, $\ln(x^2) = 2\ln|x|$.
7. Pour tout $x > 0$, $(x^x)^x = x^{(x^x)}$.
8. Si f est une fonction paire et dérivable sur $\mathbb{R}$, alors sa dérivée f' est impaire.
9. La fonction th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1\,,1[$.
10. Pour tout réel x non nul, $\mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

EXERCICE 51 ⋆⋆

L'exponentielle n'est pas une somme de fonctions périodiques. Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et tout réel $T > 0$, on note $\Delta_T f$ la fonction $x \mapsto f(x+T) - f(x)$. On ne fait aucune hypothèse de régularité sur les fonctions considérées.

1. Vérifier que $\Delta_T(\lambda f + g) = \lambda\,\Delta_T f + \Delta_T g$ pour tout réel λ et toutes fonctions f et g, et que $\Delta_S(\Delta_T f) = \Delta_T(\Delta_S f)$ pour tous réels S, $T > 0$. À quelle condition a-t-on $\Delta_T f = 0$?
2. Calculer $\Delta_T \exp$. En déduire que la fonction exponentielle n'est pas la somme d'un nombre fini de fonctions périodiques.
3. Montrer de même que la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas la somme de deux fonctions périodiques. Pourquoi le raisonnement ne permet-il pas de conclure pour la fonction $x \mapsto x$?

Indication : pour la question 2, on supposera que $\exp = f_1 + \cdots + f_n$*, où chaque* f_i *est* T_i*-périodique, et l'on appliquera successivement* Δ_{T_1}*, …,* Δ_{T_n} *aux deux membres.*

EXERCICE 52 ⋆⋆

L'hyperbole sous deux angles. On identifie le plan au plan complexe, le point (x, y) ayant pour affixe $x + \mathrm{i}y$, comme au chapitre 4. On note

$$\mathcal{C} = \{(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t) \mid t \in \mathbb{R}\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{H} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x > 0 \text{ et } y = \frac{1}{x}\right\},$$

et l'on désigne par f la similitude directe de centre O, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est la branche de l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$ formée de ses points d'abscisse strictement positive, et que chaque point de $\mathcal{C}$ est atteint pour une seule valeur de t.
2. Donner l'écriture complexe de f, puis exprimer $f(x, y)$ et $f^{-1}(x, y)$ à l'aide des coordonnées x et y.
3. Montrer que $f(\mathcal{C}) = \mathcal{H}$. Que deviennent par f les asymptotes $y = x$ et $y = -x$ de l'hyperbole ?
4. Pour tout réel s, on note ρ_s l'application $(x, y) \mapsto (x \operatorname{ch} s + y \operatorname{sh} s,\ x \operatorname{sh} s + y \operatorname{ch} s)$. Montrer que ρ_s envoie le point de $\mathcal{C}$ de paramètre t sur celui de paramètre $t + s$, puis que $f \circ \rho_s \circ f^{-1}$ est l'application $(X, Y) \mapsto (\mathrm{e}^{-s}X, \mathrm{e}^{s}Y)$. Quelle quantité, calculée en (x, y), l'application ρ_s conserve-t-elle ?

EXERCICE 53 ⋆⋆⋆

On note $g : w \mapsto w\,\mathrm{e}^{w}$, définie sur $[0, +\infty[$, et l'on considère une fonction $W : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ telle que

$$W(x)\,\mathrm{e}^{W(x)} = x \qquad \text{pour tout } x \geqslant 0.$$

On ne suppose pas *a priori* que W est dérivable.

1. Montrer que g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur lui-même, et en déduire que W est la réciproque de g.
2. En déduire les variations de W, puis montrer que W est dérivable sur $[0, +\infty[$, et que l'on a

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x\,(1 + W(x))} \qquad \text{pour tout } x > 0.$$

3. Calculer $W(0)$, $W(\mathrm{e})$ et $W'(\mathrm{e})$, puis $W'(0)$.

EXERCICE 54 ⋆⋆⋆

On cherche les droites tangentes à la fois à la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$ et à la courbe $\mathcal{L}$ d'équation $y = \ln x$.

1. Écrire l'équation de la tangente à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse a, puis celle de la tangente à $\mathcal{L}$ au point d'abscisse $b > 0$.
2. Montrer que ces deux tangentes sont confondues si et seulement si $a = \dfrac{1}{2b}$ et $h(b) = 0$, où $h : b \mapsto \ln b - 1 + \dfrac{1}{4b^2}$.
3. Étudier la fonction h sur $]0\,,+\infty[$ et en déduire que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$ admettent exactement deux tangentes communes.
4. Localiser les abscisses $b_1 < b_2$ des points de contact avec $\mathcal{L}$ entre deux dixièmes consécutifs, puis tracer la figure.

EXERCICE 55 ⋆⋆⋆

Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On pose, pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$.

1. On note $\psi : u \mapsto \dfrac{(1+u)\ln(1+u)}{u}$, définie sur $]0\,,+\infty[$. Montrer que ψ est strictement croissante.
2. Montrer que $f'(x)$ est du signe de $\psi(bx) - \psi(ax)$, et en déduire les variations de f. Quelles sont ses limites en 0^+ et en $+\infty$?
3. En comparant $f\left(\frac{1}{b}\right)$ et $f\left(\frac{1}{a}\right)$, montrer que
$$\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leqslant (\ln 2)^2.$$
L'inégalité reste-t-elle vraie lorsque $a = b$?

EXERCICE 56 ⋆⋆⋆

Une identité binomiale obtenue par dérivation. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, et l'on pose $H_0 = 0$.

1. *Formule de Leibniz.* Soit I un intervalle. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, si f et g sont deux fonctions n fois dérivables sur I, leur produit fg est n fois dérivable sur I, et
$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}\, g^{(k)}.$$
On s'inspirera de la démonstration de la formule du binôme, au chapitre 3.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(x) = x^n \ln x$ pour $x > 0$. Montrer que $u_n'(x) = n\,u_{n-1}(x) + x^{n-1}$ pour $n \geqslant 1$, puis que $u_n^{(n)}(x) = n!\,(\ln x + H_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$.
3. Calculer les dérivées successives de la fonction ln, puis calculer $u_n^{(n)}$ à l'aide de la formule de Leibniz. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k} = H_n.$$
4. Vérifier cette formule pour $n = 3$. La retrouver ensuite par récurrence, sans dérivation, à l'aide de la formule de Pascal et de l'égalité $\dfrac{1}{k}\binom{n-1}{k-1} = \dfrac{1}{n}\binom{n}{k}$, valable pour $1 \leqslant k \leqslant n$. Quelle méthode préférer ?

EXERCICE 57 ⋆⋆⋆

Des tiroirs pour les arcs tangents. Soit A une partie finie de $\mathbb{R}$. On cherche à partir de quel cardinal de A on peut affirmer qu'il existe deux éléments a et b de A tels que $1+ab\neq 0$ et

$$0<\frac{a-b}{1+ab}\leqslant 2-\sqrt{3}.$$

1. Montrer que $\tan\dfrac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$.
2. Soit a et b deux réels, $\alpha=\operatorname{Arctan}a$ et $\beta=\operatorname{Arctan}b$. Montrer que $\cos(\alpha-\beta)=(1+ab)\cos\alpha\cos\beta$, et que l'on a $\dfrac{a-b}{1+ab}=\tan(\alpha-\beta)$ lorsque $1+ab\neq 0$.
3. On suppose que A a 13 éléments. En découpant l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[$ en douze intervalles de même longueur, et à l'aide du principe des tiroirs du chapitre 2, montrer que A contient deux éléments a et b qui conviennent.
4. Montrer que la conclusion subsiste lorsque A n'a que 12 éléments. On rangera les arcs tangents des éléments de A dans l'ordre croissant, $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_{12}$, et l'on considérera les douze écarts $\alpha_2-\alpha_1$, …, $\alpha_{12}-\alpha_{11}$ et $\alpha_1+\pi-\alpha_{12}$.
5. Montrer qu'elle tombe en défaut pour la partie à 11 éléments formée des réels

$$\tan\Big(-\frac{\pi}{2}+\frac{(2k-1)\pi}{22}\Big),\qquad k\in[\![1\,;11]\!].$$

Quel est donc le plus petit cardinal de A qui garantisse l'existence de a et b ?

EXERCICE 58 ⋆⋆⋆⋆

Inégalités de Young et de Hölder. Soit p et q deux réels de $]1\,,+\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

1. Montrer que, pour tous réels $u\geqslant 0$ et $v\geqslant 0$, $uv\leqslant\dfrac{u^p}{p}+\dfrac{v^q}{q}$. On pourra fixer $v>0$ et étudier une fonction de la variable u. Que retrouve-t-on lorsque $p=q=2$?
2. Soit $u_1,\dots,u_n$ et $v_1,\dots,v_n$ des nombres complexes. Démontrer l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{k=1}^{n}|u_kv_k|\leqslant\Big(\sum_{k=1}^{n}|u_k|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{k=1}^{n}|v_k|^q\Big)^{1/q}.$$

On commencera par le cas où $\sum|u_k|^p=\sum|v_k|^q=1$, puis on s'y ramènera.

EXERCICE 59 ⋆⋆⋆

1. Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables telles que $f(x+y)=f(x)+f(y)$ pour tous réels x et y. On pourra dériver la relation par rapport à y, à x fixé.
2. Déterminer toutes les fonctions $f:]0\,,+\infty[\to\mathbb{R}$ dérivables telles que $f(xy)=f(x)+f(y)$ pour tous x, $y>0$. Quel lien avec l'introduction historique du cours ?
3. Déterminer de même les fonctions $f:\mathbb{R}\to]0\,,+\infty[$ dérivables telles que $f(x+y)=f(x)f(y)$ pour tous réels x et y.