CORRIGÉ – CHAPITRE 6

PRIMITIVES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

⋆ *application directe* ⋆⋆ *mise en œuvre* ⋆⋆⋆ *problème* ⋆⋆⋆⋆ *problème long, en autonomie*

Primitives et intégrales

EXERCICE 1 ⋆

On lit le tableau des primitives usuelles du cours de droite à gauche ; pour une fonction de la forme $x \mapsto g(ax+b)$, avec $a \neq 0$, une primitive est $x \mapsto \frac{1}{a}G(ax+b)$, où G est une primitive de g. Chaque résultat se vérifie en dérivant.

- **(a)** Sur $\mathbb{R}$: $\boxed{x \mapsto \frac{5}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 7x}$
- **(b)** Sur $\mathbb{R}$: $\boxed{x \mapsto 2\sin x + 3\cos x}$
- **(c)** On écrit $\frac{5}{\sqrt{x}} = 5x^{-1/2}$ et $\frac{2}{x^3} = 2x^{-3}$. Sur $]0\,,+\infty[$: $\boxed{x \mapsto 10\sqrt{x} + 4\ln x - \frac{1}{x^2}}$
- **(d)** On sépare la fraction : $\frac{x+5}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}$. Sur $]0\,,+\infty[$: $\boxed{x \mapsto \ln x - \frac{5}{x}}$
- **(e)** Sur $\mathbb{R}$: $\boxed{x \mapsto \frac{1}{4}\mathrm{e}^{4x+3}}$
- **(f)** Sur $\mathbb{R}$: $\boxed{x \mapsto \frac{1}{3}\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)}$
- **(g)** Sur $\mathbb{R}$: $\boxed{x \mapsto \frac{(2x+1)^6}{12}}$
- **(h)** On écrit $3(5x+1)^{-1/2}$, de primitive $\frac{3}{5}\cdot 2(5x+1)^{1/2}$. Sur $]-\frac{1}{5}\,,+\infty[$: $\boxed{x \mapsto \frac{6}{5}\sqrt{5x+1}}$
- **(i)** On factorise 9 : $\frac{1}{x^2+9} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1+(x/3)^2}$. Sur $\mathbb{R}$: $\boxed{x \mapsto \frac{1}{3}\operatorname{Arctan}\frac{x}{3}}$
- **(j)** De même $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(x/2)^2}}$. Sur $]-2\,,2[$: $\boxed{x \mapsto \operatorname{Arcsin}\frac{x}{2}}$
- **(k)** Sur $\mathbb{R}$: $\boxed{x \mapsto \frac{1}{2}\operatorname{sh}(2x) + 3\operatorname{ch}\frac{x}{3}}$
- **(l)** On écrit $\tan^2 x = (1+\tan^2 x) - 1$. Sur $]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}[$: $\boxed{x \mapsto \tan x - x}$

Piège : en (i) et (j), on oublie souvent le facteur issu de la factorisation. Dériver le résultat le fait apparaître aussitôt : la dérivée de $\operatorname{Arctan}\frac{x}{3}$ est $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+x^2/9} = \frac{3}{x^2+9}$, d'où le coefficient $\frac{1}{3}$.

EXERCICE 2 ⋆

Dans chaque cas, on repère une fonction u dont la dérivée apparaît en facteur, et l'on applique la proposition 3 du cours.

- **(a)** $\frac{1}{2}\cdot\frac{u'}{u}$ avec $u = 1+x^2$. Sur $\mathbb{R}$: $\boxed{x \mapsto \frac{1}{2}\ln(1+x^2)}$
- **(b)** $\frac{1}{3}\cdot\frac{u'}{u}$ avec $u = 1+\mathrm{e}^{3x} > 0$. Sur $\mathbb{R}$: $\boxed{x \mapsto \frac{1}{3}\ln(1+\mathrm{e}^{3x})}$
- **(c)** $u'u$ avec $u = \ln$. Sur $]0\,,+\infty[$: $\boxed{x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{2}}$
- **(d)** $u'u^2$ avec $u = \sin$. Sur $\mathbb{R}$: $\boxed{x \mapsto \frac{\sin^3 x}{3}}$
- **(e)** $\frac{u'}{u}$ avec $u = \ln$, qui ne s'annule pas sur $]1\,,+\infty[$. Sur cet intervalle : $\boxed{x \mapsto \ln(\ln x)}$
- **(f)** $\frac{3}{2}u'u^{1/2}$ avec $u = 1+x^2$. Sur $\mathbb{R}$: $\boxed{x \mapsto (1+x^2)^{3/2}}$
- **(g)** $-\frac{u'}{1+u^2}$ avec $u = \cos$. Sur $\mathbb{R}$: $\boxed{x \mapsto -\operatorname{Arctan}(\cos x)}$
- **(h)** $u'\cos u$ avec $u = \ln$. Sur $]0\,,+\infty[$: $\boxed{x \mapsto \sin(\ln x)}$
- **(i)** $-u'u^{-3}$ avec $u = \cos$. Sur $]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}[$: $\boxed{x \mapsto \frac{1}{2\cos^2 x}}$
- **(j)** $-\frac{1}{2}u'u^{1/2}$ avec $u = 1-x^2$. Sur $]-1\,,1[$: $\boxed{x \mapsto -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}}$
- **(k)** $u'u^{-4}$ avec $u = \ln$. Sur $]1\,,+\infty[$: $\boxed{x \mapsto -\frac{1}{3(\ln x)^3}}$
- **(l)** $\frac{1}{3}\cdot\frac{u'}{u}$ avec $u = 1+x^3$. Sur $]-1\,,+\infty[$: $\boxed{x \mapsto \frac{1}{3}\ln(1+x^3)}$
- **(m)** $-\frac{u'}{u}$ avec $u = 1+\cos^2 x$, car $u'(x) = -\sin(2x)$. Sur $\mathbb{R}$: $\boxed{x \mapsto -\ln(1+\cos^2 x)}$
- **(n)** On factorise $\sqrt{x}$: $\frac{1}{\sqrt{x}+x} = 2\cdot\frac{u'}{u}$ avec $u = 1+\sqrt{x}$, $u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Sur $]0\,,+\infty[$: $\boxed{x \mapsto 2\ln(1+\sqrt{x})}$
- **(o)** $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x+x} = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$ est de la forme $u'\mathrm{e}^u$ avec $u = \exp$. Sur $\mathbb{R}$: $\boxed{x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}}$
- **(p)** $2\cdot\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u = 1+\ln x > 0$. Sur $]\frac{1}{\mathrm{e}}\,,+\infty[$: $\boxed{x \mapsto 2\sqrt{1+\ln x}}$
- **(q)** $\frac{1}{2}u'u^3$ avec $u = 3x^2-2x+3$, puisque $u' = 2(3x-1)$. Sur $\mathbb{R}$: $\boxed{x \mapsto \frac{1}{8}(3x^2-2x+3)^4}$
- **(r)** $\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ avec $u = \exp$, qui vérifie $|u|<1$ sur $]-\infty\,,0[$. Sur cet intervalle : $\boxed{x \mapsto \operatorname{Arcsin}(\mathrm{e}^x)}$

À retenir : les expressions (b), (g), (n) et (r) se traiteront aussi par changement de variable (exercices 18 et 19) ; reconnaître la forme $u'\,g(u)$ est le même calcul, mené sans changer de lettre.

EXERCICE 3 ⋆⋆

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est strictement positive : si son intégrale sur $[-1\,,1]$ avait un sens, elle serait positive d'après la proposition 2 (iii), et non égale à -2. L'erreur est d'appliquer la définition de l'intégrale à une fonction qui n'est pas continue sur $[-1\,,1]$: elle n'est même pas définie en 0, et $x \mapsto -\frac{1}{x}$ n'est une primitive que sur $]-\infty\,,0[$ et sur $]0\,,+\infty[$, pas sur un intervalle contenant -1 et 1.

$$\boxed{\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \text{ n'est pas définie : } [-1\,,1] \text{ contient } 0}$$

2. Soit F une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$. Sur l'intervalle $]0\,,+\infty[$, F et $\ln|\cdot|$ ont la même dérivée : elles diffèrent d'une constante c_1 (proposition 1). Il en est de même sur $]-\infty\,,0[$, avec une constante c_2 qui n'a aucune raison d'être égale à c_1. Réciproquement, toute fonction de cette forme convient.

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} \ln|x| + c_2 & \text{si } x < 0 \\ \ln x + c_1 & \text{si } x > 0 \end{cases}, \qquad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2}$$

Il faut donc deux constantes, une par intervalle : c'est la remarque du cours sur l'hypothèse « I est un intervalle ».

3. On décompose, comme dans la méthode du cours avec $x_1 = 1$ et $x_2 = -1$:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\Big), \qquad \text{de primitive} \qquad \frac{1}{2}\ln\Big|\frac{x-1}{x+1}\Big|.$$

Sur $]-1\,,1[$, on a $\big|\frac{x-1}{x+1}\big| = \frac{1-x}{1+x}$, et cette primitive vaut $\frac{1}{2}\ln 1 = 0$ en 0.

$$\boxed{x \mapsto \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}}$$

L'ensemble $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$ est la réunion des trois intervalles $]-\infty\,,-1[$, $]-1\,,1[$ et $]1\,,+\infty[$; le raisonnement de la question 2 donne une constante par intervalle.

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2}\ln\Big|\frac{x-1}{x+1}\Big| + c_k \text{ sur le } k\text{-ième intervalle}, \qquad (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3}$$

EXERCICE 4 ⋆⋆

Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$, qui existe d'après le théorème 1 ; elle est dérivable, de dérivée f. Toutes les intégrales s'expriment à l'aide de F, et l'on dérive des composées.

(a) On a $G_1(x) = F(x^2) - F(0)$, composée de fonctions dérivables, d'où :

$$\boxed{G_1'(x) = 2x\, f(x^2)}$$

(b) On a $G_2(x) = F(2x) - F(x)$, d'où :

$$\boxed{G_2'(x) = 2f(2x) - f(x)}$$

(c) À x fixé, le changement de variable $u = t + x$ donne $G_3(x) = \displaystyle\int_x^{2x} f(u)\,\mathrm{d}u = G_2(x)$, d'où :

$$\boxed{G_3'(x) = 2f(2x) - f(x)}$$

(d) La variable d'intégration est t : le facteur x sort de l'intégrale, ce qui donne

$$G_4(x) = x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x t\, f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Les deux intégrales sont des primitives de f et de $t \mapsto t\,f(t)$, qui s'annulent en 0 (proposition 2 (i)). Par la dérivée d'un produit :

$$G_4'(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + x\,f(x) - x\,f(x), \qquad \text{soit} \qquad \boxed{G_4'(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Ainsi G_4 est la primitive nulle en 0 de la primitive nulle en 0 de f : c'est une « primitive seconde » de f.
Piège : on ne peut pas dériver directement $\int_0^x (x-t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$ en remplaçant t par x dans l'intégrande, ce qui donnerait 0 : la variable x figure aussi dans l'intégrande, et il faut d'abord l'en faire sortir.

EXERCICE 5 ⋆⋆

1. Soit $F(x) = \int_a^x f$, la primitive de f nulle en a. Comme $F' = f \geqslant 0$, la fonction F est croissante sur $[a\,,b]$ (chapitre 5). Or $F(a) = 0$ et $F(b) = \int_a^b f = 0$: pour tout $x \in [a\,,b]$, $0 = F(a) \leqslant F(x) \leqslant F(b) = 0$. Ainsi F est nulle, et $f = F'$ aussi.

$$\boxed{f \geqslant 0 \text{ continue et } \int_a^b f = 0 \implies f = 0}$$

2. L'égalité s'écrit $\int_a^b (|f| - f) = 0$, où $|f| - f$ est continue et positive. D'après la question 1, $|f| = f$, c'est-à-dire $f \geqslant 0$; réciproquement, toute fonction positive convient.

$$\boxed{\text{les fonctions continues positives sur } [a\,,b]}$$

3. La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f$ est nulle par hypothèse, donc sa dérivée f aussi.

$$\boxed{f = 0}$$

4. La fonction f^2 est continue et positive, d'intégrale nulle : la question 1 donne $f^2 = 0$, donc $\boxed{f = 0}$.
La conclusion tombe sans le carré : sur $[a\,,b]$, la fonction $x \mapsto x - \frac{a+b}{2}$ a une intégrale nulle, comme on le vérifie avec la primitive $\frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$, qui prend la même valeur en a et en b, sans être nulle.

$$\boxed{\text{non : } \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x = 0}$$

À retenir : la question 1 est l'outil qui rend strictes les inégalités entre intégrales ; on l'utilise à l'exercice 8 et à l'exercice 9.

EXERCICE 6 ⋆⋆

1. Soit $F(x) = \int_0^x f$; les primitives de f sont les $F + c$, et chacune est T-périodique si et seulement si F l'est. Or, d'après la proposition 6 (ii), pour tout réel x :

$$F(x+T) - F(x) = \int_x^{x+T} f = \int_0^T f.$$

$$\boxed{f \text{ admet une primitive } T\text{-périodique} \iff \int_0^T f = 0}$$

La fonction $x \mapsto \cos^2 x$ est π-périodique et $\int_0^\pi \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \neq 0$; ses primitives ne sont pas π-périodiques. Elles ne sont pas davantage T-périodiques pour un autre $T > 0$: ce sont les fonctions $x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + c$, qui tendent vers $+\infty$ en $+\infty$, alors qu'une fonction périodique continue est bornée, puisqu'elle reprend sur $\mathbb{R}$ les valeurs qu'elle prend sur une période.

$$\boxed{\text{non : les primitives de } \cos^2 \text{ sont } x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + c}$$

2. Avec la même primitive F, la fonction $G : x \mapsto F(x+T) - F(x)$ est constante, donc sa dérivée est nulle :

$$G'(x) = f(x+T) - f(x) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{f \text{ est } T\text{-périodique}}.$$

EXERCICE 7 ⋆⋆

1. La fonction φ est paire, car sh et $x \mapsto x$ sont impaires. Pour tout réel x, le changement de variable $t = -u$ donne

$$F(-x) = \int_{-x}^{-2x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x}^{2x} \varphi(-u)\,(-\mathrm{d}u) = -\int_{x}^{2x} \varphi(u)\,\mathrm{d}u = -F(x).$$

$$\boxed{F \text{ est impaire}}$$

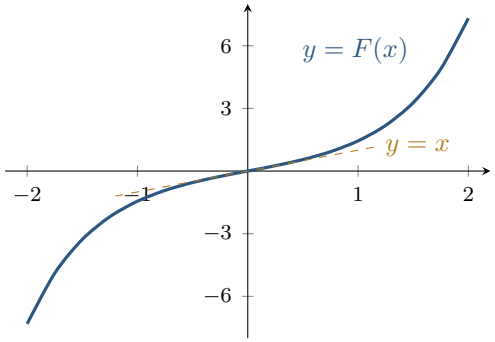
2. La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$; soit Φ une primitive (théorème 1). Alors $F(x) = \Phi(2x) - \Phi(x)$ est dérivable, et $F'(x) = 2\varphi(2x) - \varphi(x)$. Pour $x \neq 0$:

$$F'(x) = 2\,\frac{\mathrm{sh}(2x)}{2x} - \frac{\mathrm{sh}\,x}{x}, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{F'(x) = \frac{\mathrm{sh}(2x) - \mathrm{sh}\,x}{x}},$$

et $F'(0) = 2\varphi(0) - \varphi(0) = 1$.

3. La fonction sh est strictement croissante. Pour $x > 0$, on a $2x > x$, donc $\mathrm{sh}(2x) > \mathrm{sh}\,x$ et $F'(x) > 0$; pour $x < 0$, on a $2x < x$, donc $\mathrm{sh}(2x) - \mathrm{sh}\,x < 0$, et le quotient par $x < 0$ est encore strictement positif. Avec $F'(0) = 1$, on obtient $F' > 0$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{F \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}, \text{ avec } F(0) = 0}$$



La courbe de F, tracée à partir de valeurs approchées des intégrales, est symétrique par rapport à l'origine et tangente en 0 à la droite $y = x$, puisque $F'(0) = 1$; sa croissance devient très rapide, comme celle de sh.

EXERCICE 8 ⋆⋆⋆

1. Pour $t \in [0\,,1]$, on a $0 \leqslant t^n \leqslant 1$, donc $\frac{1}{1+t^n} \leqslant 1$. D'autre part $(1-t^n)(1+t^n) = 1 - t^{2n} \leqslant 1$, d'où $1 - t^n \leqslant \frac{1}{1+t^n}$. Par croissance de l'intégrale (proposition 2 (iii)) :

$$\int_0^1 (1-t^n)\,\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{n+1}, \qquad \text{donc} \qquad \boxed{1 - \frac{1}{n+1} \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n} \leqslant 1}.$$

Par encadrement, l'intégrale tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$: la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^n}$ vaut presque 1 sur $[0\,,1[$ dès que n est grand.

2. Pour la minoration, on compare à t : $\frac{1+t^2}{2} - t = \frac{(1-t)^2}{2} \geqslant 0$, donc $\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \geqslant t^n$, d'intégrale $\frac{1}{n+1}$. Pour la majoration, $t^2 \leqslant t$ sur $[0\,,1]$, donc $\frac{1+t^2}{2} \leqslant \frac{1+t}{2}$, et l'on calcule avec la primitive $\frac{2}{n+1}\left(\frac{1+t}{2}\right)^{n+1}$:

$$\int_0^1 \left(\frac{1+t}{2}\right)^n \mathrm{d}t = \frac{2}{n+1}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \leqslant \frac{2}{n+1}.$$

$$\boxed{\frac{1}{n+1} \leqslant \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{n+1}}$$

3. Pour $x \in [\mathrm{e}\,,\pi]$, on a $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}$, avec égalité seulement en e. La fonction $x \mapsto \frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{1}{x}$ est continue, positive et non nulle sur $[\mathrm{e}\,,\pi]$: son intégrale est strictement positive d'après l'exercice 5, question 1.

$$\int_{\mathrm{e}}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln\pi - 1 < \frac{\pi - \mathrm{e}}{\mathrm{e}} = \frac{\pi}{\mathrm{e}} - 1.$$

On obtient $\ln\pi < \frac{\pi}{\mathrm{e}}$, soit $\mathrm{e}\ln\pi < \pi$, et l'on compose par la fonction exp, strictement croissante.

$$\boxed{\pi^{\mathrm{e}} < \mathrm{e}^{\pi}}$$

Numériquement, $\pi^{\mathrm{e}} \approx 22{,}46$ et $\mathrm{e}^{\pi} \approx 23{,}14$: l'écart est faible, ce qui rend cette comparaison difficile à obtenir autrement.

EXERCICE 9 ⋆⋆⋆

1. On développe les deux membres :

$$x^4(1-x)^4 = x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4,$$

$$(1+x^2)(x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4) - 4 = x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4. \quad ✓$$

2. En divisant par $1+x^2$, on obtient la somme d'un polynôme et d'une fraction, que l'on intègre terme à terme :

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4)\,\mathrm{d}x - 4\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{1}{7} - \frac{2}{3} + 1 - \frac{4}{3} + 4 - \pi.$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{22}{7} - \pi}$$

L'intégrande est continue, positive et non nulle sur $[0\,,1]$: d'après l'exercice 5, l'intégrale est strictement positive.

$$\boxed{\pi < \frac{22}{7}}$$

3. On développe : $\int_0^1 (x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9} - \frac{1}{2} + \frac{6}{7} - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}$.

$$\boxed{\int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{630}}$$

Pour $x \in [0\,,1]$, on a $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$; en multipliant par $x^4(1-x)^4 \geqslant 0$ et en intégrant, on obtient

$$\frac{1}{1260} \leqslant \frac{22}{7} - \pi \leqslant \frac{1}{630}.$$

Comme $\frac{22}{7} = \frac{1980}{630} = \frac{3960}{1260}$, on en déduit :

$$\boxed{\frac{1979}{630} \leqslant \pi \leqslant \frac{3959}{1260}}$$

L'encadrement est de longueur $\frac{1}{1260} \approx 8 \cdot 10^{-4}$: il donne $3{,}1412 \leqslant \pi \leqslant 3{,}1421$, donc les trois premières décimales de π.
À retenir : cette intégrale, publiée par D. P. Dalzell en 1944, montre que l'approximation d'Archimède $\frac{22}{7}$ est un majorant de π, et l'écart est l'aire d'un domaine que l'on sait calculer exactement.

EXERCICE 10 ⋆

Chaque intégrande est une dérivée usuelle ou une dérivée composée (proposition 3).

(a) Une primitive est $x \mapsto x - \frac{1}{3}\sin(3x)$, et $\sin \pi = 0$.

$$\int_0^{\pi/3} (1 - \cos 3x)\,\mathrm{d}x = \Big[x - \frac{\sin 3x}{3}\Big]_0^{\pi/3} = \boxed{\frac{\pi}{3}}$$

(b) C'est $\frac{1}{2}u' \sin u$ avec $u = x^2$.

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{1}{2}\cos(x^2)\Big]_0^{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{1}$$

(c) C'est $u' u^{1/2}$ avec $u = \ln$.

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{2}{3}(\ln x)^{3/2}\Big]_1^2 = \boxed{\frac{2}{3}(\ln 2)^{3/2}}$$

(d) C'est $-\frac{u'}{u}$ avec $u = \cos > 0$ sur $[0\,,\frac{\pi}{4}]$.

$$\int_0^{\pi/4} \tan x\,\mathrm{d}x = \big[-\ln\cos x\big]_0^{\pi/4} = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{\ln 2}{2}}$$

(e) C'est $\frac{1}{2}\cdot\frac{u'}{1+u^2}$ avec $u = x^2$.

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(x^2)\Big]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{8}}$$

(f) C'est $\frac{u'}{u}$ avec $u = 1 + \mathrm{e}^x$.

$$\int_0^{\ln 3} \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \big[\ln(1+\mathrm{e}^x)\big]_0^{\ln 3} = \ln 4 - \ln 2 = \boxed{\ln 2}$$

(g) C'est $\frac{u'}{u}$ avec $u = \ln > 0$ sur $[\mathrm{e}\,,\mathrm{e}^2]$.

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \big[\ln(\ln x)\big]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} = \ln 2 - \ln 1 = \boxed{\ln 2}$$

(h) C'est $u' u^2$ avec $u = \sin$.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{\sin^3 x}{3}\Big]_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

EXERCICE 11 ⋆

On applique la méthode du cours pour les fractions $\frac{1}{ax^2+bx+c}$, après avoir fait apparaître, s'il y a lieu, la dérivée du dénominateur au numérateur.

(a) $\Delta = 9 > 0$ et $x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$, d'où $\frac{1}{(x-2)(x-5)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-2}\right)$.

$$\boxed{x \mapsto \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-5}{x-2}\right|}$$

(b) On cherche $\frac{x+1}{(x-2)(x-5)} = \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x-5}$: en multipliant par $x-2$ puis en faisant $x = 2$, $\alpha = \frac{3}{-3} = -1$; de même $\beta = \frac{6}{3} = 2$.

$$\boxed{x \mapsto 2\ln|x-5| - \ln|x-2|}$$

(c) $\Delta = 0$ et $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$.

$$\boxed{x \mapsto -\frac{1}{x-3}}$$

(d) $\Delta = -3$ et $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$.

$$\boxed{x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}}$$

(e) $\Delta = -7$ et $2x^2 + x + 1 = 2\left(\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2\right)$, d'où une primitive $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{7}}\operatorname{Arctan}\frac{4x+1}{\sqrt{7}}$.

$$\boxed{x \mapsto \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{Arctan}\frac{4x+1}{\sqrt{7}}}$$

(f) $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1$.

$$\boxed{x \mapsto \operatorname{Arctan}(x+2)}$$

(g) On sépare : $\frac{x+4}{x^2+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1} + \frac{4}{x^2+1}$.

$$\boxed{x \mapsto \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 4\operatorname{Arctan} x}$$

(h) On fait apparaître $2x + 1$: $3x + 2 = \frac{3}{2}(2x+1) + \frac{1}{2}$, et l'on traite le reste comme en (d).

$$\boxed{x \mapsto \frac{3}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}$$

(i) Le numérateur est exactement la dérivée du dénominateur : inutile de décomposer.

$$\boxed{x \mapsto \ln|x^2+x-3|}$$

Piège : en (i), le discriminant 13 est positif et l'on serait tenté de factoriser, ce qui mène à des racines $\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ et à un calcul pénible ; il faut toujours regarder d'abord si le numérateur est la dérivée du dénominateur.

EXERCICE 12 ⋆⋆

(a) En multipliant par $x-1$ et en faisant $x=1$, on obtient $a=\frac{48}{16}=3$; en multipliant par $(x+3)^2$ et en faisant $x=-3$, $c=\frac{45-63+22}{-4}=-1$; enfin, en multipliant par x et en faisant tendre x vers $+\infty$, $5=a+b$, soit $b=2$.

$$\boxed{\frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}=\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x+3}-\frac{1}{(x+3)^2}}$$

Une primitive sur $]1\,,+\infty[$ est $x\mapsto 3\ln(x-1)+2\ln(x+3)+\frac{1}{x+3}$, qui vaut $2\ln 5+\frac{1}{5}$ en 2.

$$\boxed{x\mapsto 3\ln(x-1)+2\ln\frac{x+3}{5}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{5}}$$

(b) On pose $u=x-1$: $2x^2-3x+4=2(u+1)^2-3(u+1)+4=2u^2+u+3$, d'où, en divisant par u^2, $a=2$, $b=1$, $c=3$.

$$\boxed{\frac{2x^2-3x+4}{(x-1)^2}=2+\frac{1}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}}\qquad\boxed{x\mapsto 2x+\ln(x-1)-\frac{3}{x-1}}$$

(c) On a $(x^2-4)^2=(x-2)^2(x+2)^2$. En multipliant par $(x-2)^2$ et en faisant $x=2$, $a=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$; de même $b=\frac{-2}{16}=-\frac{1}{8}$. On vérifie : $\frac{1}{8}\cdot\frac{(x+2)^2-(x-2)^2}{(x^2-4)^2}=\frac{1}{8}\cdot\frac{8x}{(x^2-4)^2}$. ✓

$$\boxed{\frac{x}{(x^2-4)^2}=\frac{1}{8(x-2)^2}-\frac{1}{8(x+2)^2}}\qquad\boxed{x\mapsto-\frac{1}{8(x-2)}+\frac{1}{8(x+2)}=-\frac{1}{2(x^2-4)}}$$

On retrouve ce résultat directement, puisque $\frac{x}{(x^2-4)^2}=\frac{1}{2}\,u'u^{-2}$ avec $u=x^2-4$, de primitive $-\frac{1}{2u}$.

(d) En multipliant par $1-x$ et en faisant $x=1$, $a=\frac{1}{(1+1)(1+1)}=\frac{1}{4}$; de même $b=\frac{1}{4}$; et $x=0$ donne $1=a+b+c$, soit $c=\frac{1}{2}$.

$$\boxed{\frac{1}{1-x^4}=\frac{1}{4(1-x)}+\frac{1}{4(1+x)}+\frac{1}{2(1+x^2)}}\qquad\boxed{x\mapsto\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\operatorname{Arctan}x}$$

À retenir : la technique « multiplier par le facteur, puis évaluer en sa racine » donne directement le coefficient des termes de plus haut degré ; les autres s'obtiennent par une valeur particulière ou par un comportement en $+\infty$. Le chapitre 13 en fera une méthode générale.

EXERCICE 13 ⋆

(a) On simplifie d'abord : $t^2-1=(t-1)(t+1)$, donc $\frac{t+1}{t(t^2-1)}=\frac{1}{t(t-1)}=\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}$.

$$\int_2^3\frac{t+1}{t(t^2-1)}\,\mathrm{d}t=\Big[\ln\frac{t-1}{t}\Big]_2^3=\ln\frac{2}{3}-\ln\frac{1}{2}=\boxed{\ln\frac{4}{3}}$$

(b) C'est le premier exemple du cours : $\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$.

$$\int_3^4\frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2}=\Big[\ln\frac{x-2}{x-1}\Big]_3^4=\boxed{\ln\frac{4}{3}}$$

(c) C'est le second exemple du cours : $x^2+2x+5=(x+1)^2+4$.

$$\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5}=\Big[\frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\frac{x+1}{2}\Big]_{-1}^1=\boxed{\frac{\pi}{8}}$$

Les intégrales (a) et (b) sont égales sans que ce soit un hasard : le changement de variable $x=t+1$ transforme l'une en l'autre.

EXERCICE 14 ⋆⋆

1. *Par l'exponentielle complexe.* On a $\mathrm{e}^{2x}\sin(3x) = \operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{(2+3\mathrm{i})x}\right)$, et une primitive de $\mathrm{e}^{(2+3\mathrm{i})x}$ est

$$\frac{\mathrm{e}^{(2+3\mathrm{i})x}}{2+3\mathrm{i}} = \frac{2-3\mathrm{i}}{13}\,\mathrm{e}^{2x}\big(\cos(3x)+\mathrm{i}\sin(3x)\big),$$

dont la partie imaginaire est $\frac{\mathrm{e}^{2x}}{13}\big(2\sin(3x)-3\cos(3x)\big)$.

$$\boxed{\int^x \mathrm{e}^{2t}\sin(3t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{13}\big(2\sin(3x)-3\cos(3x)\big)}$$

Par parties. Notons $S = \int^x \mathrm{e}^{2t}\sin(3t)\,\mathrm{d}t$ et $C = \int^x \mathrm{e}^{2t}\cos(3t)\,\mathrm{d}t$. En primitivant l'exponentielle, deux intégrations par parties donnent

$$S = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\sin(3x) - \frac{3}{2}C \qquad \text{et} \qquad C = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\cos(3x) + \frac{3}{2}S,$$

d'où $S = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\sin(3x) - \frac{3\mathrm{e}^{2x}}{4}\cos(3x) - \frac{9}{4}S$, soit $\frac{13}{4}S = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{4}\big(2\sin(3x)-3\cos(3x)\big)$: on retrouve le résultat.

Pour la seconde fonction, $\operatorname{ch}x\cos x = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} + \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}\right)$. Les primitives $\frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}}{1+\mathrm{i}} = \frac{1-\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$ et $\frac{\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}}{-1+\mathrm{i}} = -\frac{1+\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}$ ont pour parties réelles $\frac{\mathrm{e}^{x}}{2}(\cos x+\sin x)$ et $\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)$. En regroupant les termes en $\cos x$ et en $\sin x$:

$$\boxed{\int^x \operatorname{ch}t\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\big(\operatorname{sh}x\cos x + \operatorname{ch}x\sin x\big)}$$

Deux intégrations par parties, en primitivant ch puis sh, donnent

$$\int^x \operatorname{ch}t\cos t\,\mathrm{d}t = \operatorname{sh}x\cos x + \operatorname{ch}x\sin x - \int^x \operatorname{ch}t\cos t\,\mathrm{d}t,$$

d'où le même résultat. La méthode complexe évite de résoudre une équation en l'intégrale cherchée.

2. Une primitive de $\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})x}$ est $\frac{\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})x}}{1+2\mathrm{i}}$, et $\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})\pi} = \mathrm{e}^{\pi}$:

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{x}\sin(2x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{Im}\frac{\mathrm{e}^{\pi}-1}{1+2\mathrm{i}} = \operatorname{Im}\frac{(\mathrm{e}^{\pi}-1)(1-2\mathrm{i})}{5} = \boxed{\frac{2}{5}\left(1-\mathrm{e}^{\pi}\right)}.$$

Pour la seconde, on linéarise $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$, et l'on calcule de même

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-x}\cos(2x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{Re}\frac{\mathrm{e}^{-2\pi}-1}{-1+2\mathrm{i}} = \frac{1-\mathrm{e}^{-2\pi}}{5},$$

d'où

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-x}\sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1-\mathrm{e}^{-2\pi}}{2} - \frac{1-\mathrm{e}^{-2\pi}}{10} = \boxed{\frac{2}{5}\left(1-\mathrm{e}^{-2\pi}\right)}.$$

La première intégrale est négative, ce qu'il est bon de vérifier : sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, où $\sin(2x)\leqslant 0$, le facteur e^{x} est le plus grand.

3. Pour $\sin^5 x$, on isole un facteur $\sin x$ et l'on écrit $\sin^4 x = (1-\cos^2 x)^2$: l'intégrande devient $\sin x\,(1-2\cos^2 x+\cos^4 x)$, de la forme $-u'(1-2u^2+u^4)$ avec $u=\cos$.

$$\boxed{\int^x \sin^5 t\,\mathrm{d}t = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x}$$

Pour $\cos^4 x\sin^2 x = (\sin x\cos x)^2\cos^2 x = \frac{\sin^2(2x)}{4}\cdot\frac{1+\cos(2x)}{2}$, on obtient $\frac{1-\cos(4x)}{16} + \frac{1}{8}\sin^2(2x)\cos(2x)$, le dernier terme étant de la forme $\frac{1}{16}u'u^2$ avec $u=\sin(2x)$.

$$\boxed{\int^x \cos^4 t\sin^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{x}{16} - \frac{\sin(4x)}{64} + \frac{\sin^3(2x)}{48}}$$

Pour la troisième, $\cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos(3x)}{4}$ (chapitre 4), d'où

$$\cos(3x)\cos^3 x = \frac{3}{4}\cos(3x)\cos x + \frac{1}{4}\cos^2(3x) = \frac{3}{8}\big(\cos(4x) + \cos(2x)\big) + \frac{1+\cos(6x)}{8}.$$

$$\boxed{\int^x \cos(3t)\cos^3 t\,\mathrm{d}t = \frac{x}{8} + \frac{3\sin(2x)}{16} + \frac{3\sin(4x)}{32} + \frac{\sin(6x)}{48}}$$

4. On linéarise : $\cos t\cos(3t) = \frac{1}{2}\big(\cos(4t) + \cos(2t)\big)$, puis, en multipliant par $\cos(2t)$,

$$\cos t\cos(2t)\cos(3t) = \frac{1}{4}\big(1 + \cos(2t) + \cos(4t) + \cos(6t)\big).$$

Chaque cosinus a une intégrale nulle sur $[0\,,2\pi]$, et il ne reste que la constante.

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos t\cos(2t)\cos(3t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}}$$

EXERCICE 15 ⋆

On note u' le facteur que l'on primitive et v celui que l'on dérive (proposition 4).

(a) Deux intégrations par parties, en dérivant le polynôme :

$$\int_0^1 t^2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \big[t^2\mathrm{e}^t\big]_0^1 - 2\int_0^1 t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e} - 2\Big(\big[t\,\mathrm{e}^t\big]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\Big) = \mathrm{e} - 2\cdot 1 = \boxed{\mathrm{e}-2}.$$

(b) On dérive ln et l'on primitive t^2 :

$$\int_1^{\mathrm{e}} t^2\ln t\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{t^3}{3}\ln t\Big]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{t^2}{3}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \frac{\mathrm{e}^3-1}{9} = \boxed{\frac{2\mathrm{e}^3+1}{9}}.$$

(c) On dérive t, et $\cos(3\pi) = -1$:

$$\int_0^{\pi} t\sin(3t)\,\mathrm{d}t = \Big[-\frac{t\cos(3t)}{3}\Big]_0^{\pi} + \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\cos(3t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{3} + 0 = \boxed{\frac{\pi}{3}}.$$

(d) On primitive $\frac{1}{(1+t)^2}$ en choisissant la primitive $1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t}$, qui simplifie le calcul :

$$\int_1^2 \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{t\ln t}{1+t}\Big]_1^2 - \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \frac{2}{3}\ln 2 - \ln\frac{3}{2} = \boxed{\frac{5}{3}\ln 2 - \ln 3}.$$

(e) On écrit $t^3\mathrm{e}^{t^2} = t^2\cdot t\,\mathrm{e}^{t^2}$ et l'on primitive $t\,\mathrm{e}^{t^2}$ en $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t^2}$:

$$\int_0^1 t^3\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{t^2\mathrm{e}^{t^2}}{2}\Big]_0^1 - \int_0^1 t\,\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}}{2} - \frac{\mathrm{e}-1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

(f) La fonction Arcsin n'est pas dérivable en 1 : on ne peut pas intégrer par parties directement sur $[0\,,1]$ dans le cadre du cours. On pose d'abord $x = \sin\theta$, avec $\theta \in [0\,,\frac{\pi}{2}]$, ce qui donne $\int_0^{\pi/2}\theta^2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$, puis deux intégrations par parties :

$$\int_0^{\pi/2}\theta^2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \big[\theta^2\sin\theta\big]_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2}\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi^2}{4} - 2\big[\sin\theta - \theta\cos\theta\big]_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{\pi^2}{4} - 2}.$$

(g) On dérive Arctan et l'on primitive x^2, puis on divise : $\frac{x^3}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2}$.

$$\int_0^{\sqrt{3}} x^2\,\mathrm{Arctan}\,x\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{x^3}{3}\,\mathrm{Arctan}\,x\Big]_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\Big[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big]_0^{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{3}}.$$

(h) On primitive $\frac{1}{t^2}$ en $-\frac{1}{t}$, puis $\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$:

$$\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[-\frac{\ln(1+t)}{t}\Big]_1^2 + \Big[\ln\frac{t}{1+t}\Big]_1^2 = -\frac{\ln 3}{2} + \ln 2 + \ln\frac{4}{3} = \boxed{3\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3}.$$

(i) On primitive x en $\frac{1+x^2}{2}$ plutôt qu'en $\frac{x^2}{2}$, ce qui simplifie le dénominateur de la dérivée de Arctan^2 :

$$\int_0^1 x(\mathrm{Arctan}\,x)^2\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{1+x^2}{2}(\mathrm{Arctan}\,x)^2\Big]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{Arctan}\,x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{16} - \Big(\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}\Big),$$

la dernière intégrale ayant été calculée dans le cours.

$$\boxed{\int_0^1 x(\mathrm{Arctan}\,x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}}$$

À retenir : en (d) et en (i), on a choisi une primitive autre que la plus simple ; la constante ajoutée ne change rien à la formule, mais elle peut rendre l'intégrale restante beaucoup plus facile.

EXERCICE 16 ⋆

On intègre par parties sur $[x_0\,,x]$; dans les cinq premiers cas, on primitive 1 en t et l'on dérive la fonction donnée, dont la dérivée est plus simple.

- **(a)** $\int^x \mathrm{Arctan}\,t\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{Arctan}\,x - \int^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Sur $\mathbb{R}$: $\boxed{x \mapsto x\,\mathrm{Arctan}\,x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)}$
- **(b)** $\int^x \mathrm{Arcsin}\,t\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{Arcsin}\,x - \int^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$. Sur $]-1\,,1[$: $\boxed{x \mapsto x\,\mathrm{Arcsin}\,x + \sqrt{1-x^2}}$
- **(c)** On dérive $\ln(1+t^2)$, ce qui laisse à primitiver $\frac{2t^2}{1+t^2} = 2 - \frac{2}{1+t^2}$. Sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{x \mapsto x\ln(1+x^2) - 2x + 2\,\mathrm{Arctan}\,x}$$

- **(d)** On primitive t^2 et l'on dérive $(\ln t)^2$, puis on recommence avec $t^2\ln t$ (exercice 15 (b)). Sur $]0\,,+\infty[$:

$$\boxed{x \mapsto \frac{x^3}{3}(\ln x)^2 - \frac{2x^3}{9}\ln x + \frac{2x^3}{27}}$$

- **(e)** On primitive $\frac{1}{\cos^2 t}$ en $\tan t$ et l'on dérive t. Sur $]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}[$: $\boxed{x \mapsto x\tan x + \ln(\cos x)}$
- **(f)** On primitive ch et l'on dérive t. Sur $\mathbb{R}$: $\boxed{x \mapsto x\,\mathrm{sh}\,x - \mathrm{ch}\,x}$
- **(g)** On linéarise $x\sin^2 x = \frac{x}{2} - \frac{x\cos(2x)}{2}$, puis on intègre le second terme par parties. Sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{x \mapsto \frac{x^2}{4} - \frac{x\sin(2x)}{4} - \frac{\cos(2x)}{8}}$$

- **(h)** On primitive t en $\frac{1+t^2}{2}$, comme à l'exercice 15 (i) : l'intégrale restante est $\int \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$. Sur $\mathbb{R}$: $\boxed{x \mapsto \frac{1+x^2}{2}\,\mathrm{Arctan}\,x - \frac{x}{2}}$
- **(i)** Deux intégrations par parties, en primitivant 1 chaque fois, donnent

$$\int^x \sin(\ln t)\,\mathrm{d}t = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int^x \sin(\ln t)\,\mathrm{d}t.$$

Sur $]0\,,+\infty[$, on obtient donc :

$$\boxed{x \mapsto \frac{x}{2}\big(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\big)}$$

EXERCICE 17 ⋆⋆

1. On linéarise, puis on intègre $x\cos(2x)$ par parties :

$$I = \int_0^\pi \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\pi x\cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\Big(\Big[\frac{x\sin(2x)}{2}\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(2x)}{2}\,\mathrm{d}x\Big) = \boxed{\frac{\pi^2}{4}}.$$

Habilement : $I + J = \int_0^\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2}$, puisque $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

$$\boxed{J = \frac{\pi^2}{2} - I = \frac{\pi^2}{4}}$$

On peut aussi obtenir ces valeurs par l'exercice 21 : $\cos^2$ et $\sin^2$ sont inchangées quand on remplace x par $\pi - x$, donc $I = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$, et de même pour J.

2. On écrit $x^2\mathrm{e}^x\cos x = \mathrm{Re}\,(x^2\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x})$. Deux intégrations par parties, avec $a = 1+\mathrm{i}$, donnent une primitive $\mathrm{e}^{ax}\big(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\big)$, avec $\frac{1}{a} = \frac{1-\mathrm{i}}{2}$, $\frac{1}{a^2} = -\frac{\mathrm{i}}{2}$ et $\frac{1}{a^3} = -\frac{1+\mathrm{i}}{4}$. En π, $\mathrm{e}^{a\pi} = -\mathrm{e}^\pi$, et la partie réelle vaut $-\mathrm{e}^\pi\big(\frac{\pi^2}{2} - \frac{1}{2}\big)$; en 0, elle vaut $-\frac{1}{2}$.

$$\boxed{\int_0^\pi x^2\mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1+\mathrm{e}^\pi}{2} - \frac{\pi^2\mathrm{e}^\pi}{2}}$$

Cette valeur, proche de -102, est négative : le facteur e^x donne le plus grand poids à la fin de l'intervalle, où $\cos x < 0$.

3. Notons F_n une primitive de $(\ln x)^n$. En primitivant 1 et en dérivant $(\ln x)^n$, on obtient

$$F_n(x) = x(\ln x)^n - nF_{n-1}(x).$$

Avec $F_0(x) = x$, on obtient par récurrence $F_n(x) = x\,P_n(\ln x)$, où :

$$\boxed{P_0 = 1, \qquad P_n(X) = X^n - n\,P_{n-1}(X) \quad (n \geqslant 1)}$$

Les premiers termes sont $P_1 = X - 1$, $P_2 = X^2 - 2X + 2$, $P_3 = X^3 - 3X^2 + 6X - 6$, ce qui suggère la formule suivante.

$$\boxed{P_n(X) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}X^k}$$

Elle se démontre par récurrence : si elle est vraie au rang $n-1$, alors $-nP_{n-1}(X) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}X^k$, et l'ajout de X^n donne le terme $k = n$.

EXERCICE 18 ⋆

Dans chaque cas, on écrit l'ancienne variable en fonction de la nouvelle, on transforme l'élément différentiel, puis les bornes (proposition 5).

(a) $t = x^2$, $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$, et x va de 1 à 2.

$$\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{1-x}{x}\,2x\,\mathrm{d}x = \big[2x - x^2\big]_1^2 = \boxed{-1}$$

(b) $x = \cos t$, $\mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t$, et x va de 1 à -1.

$$\int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{-1} \frac{-\mathrm{d}x}{1+x^2} = \big[\,\mathrm{Arctan}\,x\big]_{-1}^1 = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

(c) $x = \ln t$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t}$, et x va de 0 à 1.

$$\int_1^\mathrm{e} \frac{\mathrm{d}t}{t(2\ln t + 1)} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{2x+1} = \boxed{\frac{\ln 3}{2}}$$

(d) $t = \ln x$, $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x}$, et x va de 1 à e ; puis $\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}$.

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+\mathrm{e}^t} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)} = \Big[\ln \frac{x}{1+x}\Big]_1^{\mathrm{e}} = \boxed{1 + \ln 2 - \ln(1+\mathrm{e})}$$

(e) $t = x^2$, $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$, et x va de 1 à $\sqrt{3}$; puis $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$.

$$\int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{t+1}\,\mathrm{d}t = 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 2\Big(\sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\Big) = \boxed{2\sqrt{3} - 2 - \frac{\pi}{6}}$$

(f) On pose $x = u^2$, $\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$, et u va de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ à 1.

$$\int_{1/3}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}} = \int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{2\,\mathrm{d}u}{u^2+1} = 2\Big(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\Big) = \boxed{\frac{\pi}{6}}$$

(g) On pose $u = \sqrt{t+1}$, soit $t = u^2 - 1$ et $\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u$, et u va de 1 à $\sqrt{2}$.

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt{2}} 2(u^2-1)\,\mathrm{d}u = 2\Big[\frac{u^3}{3} - u\Big]_1^{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{4 - 2\sqrt{2}}{3}}$$

(h) On pose $x = u^2$, puis trois intégrations par parties donnent la primitive $\mathrm{e}^u(u^3 - 3u^2 + 6u - 6)$ de $u^3\mathrm{e}^u$.

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2u^3\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = 2(-2\mathrm{e} + 6) = \boxed{12 - 4\mathrm{e}}$$

(i) On pose $u = \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}$, soit $x = \ln(1+u^2)$ et $\mathrm{d}x = \frac{2u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$, et u va de 0 à 1.

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{2u^2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = 2\Big(1 - \frac{\pi}{4}\Big) = \boxed{2 - \frac{\pi}{2}}$$

(j) On pose $x = \sin t$, avec $t \in \big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big]$, où $\cos t \geqslant 0$; puis $\sin^2 t \cos^2 t = \frac{\sin^2(2t)}{4} = \frac{1-\cos(4t)}{8}$.

$$\int_{-1}^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8} - 0 = \boxed{\frac{\pi}{8}}$$

(k) On pose $u = x^3$, $\mathrm{d}u = 3x^2\,\mathrm{d}x$.

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^6+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \boxed{\frac{\pi}{12}}$$

(l) On pose $u = \ln t$, soit $t = \mathrm{e}^u$ et $\mathrm{d}t = \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$, puis on passe à l'exponentielle complexe.

$$\int_1^{\mathrm{e}^\pi} \sin(\ln t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \mathrm{e}^u \sin u\,\mathrm{d}u = \mathrm{Im}\,\frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})\pi} - 1}{1+\mathrm{i}} = \mathrm{Im}\,\frac{-(\mathrm{e}^\pi + 1)(1-\mathrm{i})}{2} = \boxed{\frac{\mathrm{e}^\pi + 1}{2}}$$

Piège : l'erreur la plus répandue est d'oublier de changer les bornes, ou de les changer dans le mauvais sens ; en (b), les bornes se retrouvent dans l'ordre décroissant, et c'est le signe moins de $\mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t$ qui rétablit l'ordre.

EXERCICE 19 ⋆⋆

Pour obtenir une primitive, on effectue le changement de variable dans $\int_{x_0}^{x} f$, puis l'on revient à la variable x. On donne chaque fois l'intervalle de travail.

(a) $\frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}$; avec $u = \mathrm{e}^x$, $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, on obtient $\int \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2}$. Sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{x \mapsto 2\operatorname{Arctan}(\mathrm{e}^x)}$$

(b) Avec $u = \mathrm{e}^x$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{u}$, on obtient $\int \frac{\mathrm{d}u}{u(u+1)} = \ln\frac{u}{u+1}$. Sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{x \mapsto x - \ln(1+\mathrm{e}^x)}$$

(c) Avec $u = \ln x$, $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$, on obtient $\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$. Sur $]0\,,+\infty[$:

$$\boxed{x \mapsto \operatorname{Arctan}(\ln x)}$$

(d) Avec $x = u^2$, $u \geqslant 0$, on obtient $\int 2u\cos u\,\mathrm{d}u = 2(u\sin u + \cos u)$ par parties. Sur $[0\,,+\infty[$:

$$\boxed{x \mapsto 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x}}$$

(e) Avec $x = \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]$, on a $\sqrt{1-x^2} = \cos t$ et $\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} = \frac{t+\sin t\cos t}{2}$. Sur $[-1\,,1]$:

$$\boxed{x \mapsto \frac{1}{2}\left(\operatorname{Arcsin} x + x\sqrt{1-x^2}\right)}$$

(f) Avec $x = \operatorname{sh} t$, on a $\sqrt{x^2+1} = \operatorname{ch} t$ et $\mathrm{d}x = \operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t$, d'où $\int \mathrm{d}t = t$. Il reste à exprimer t en fonction de x : $\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t} = 2x$ donne $\mathrm{e}^{2t} - 2x\,\mathrm{e}^t - 1 = 0$, et la racine positive de ce trinôme en e^t est $x + \sqrt{x^2+1}$. Sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}$$

(g) Avec $x = \mathrm{e}^u$, on obtient $\int \mathrm{e}^u\cos(2u)\,\mathrm{d}u = \operatorname{Re}\frac{\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})u}}{1+2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^u}{5}\left(\cos(2u) + 2\sin(2u)\right)$. Sur $]0\,,+\infty[$:

$$\boxed{x \mapsto \frac{x}{5}\left(\cos(2\ln x) + 2\sin(2\ln x)\right)}$$

(h) On pose $u = \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}$, de sorte que $\mathrm{e}^x = 1 + u^2$ et $\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$:

$$\int \frac{2u\,\mathrm{d}u}{(4+u^2)\,u} = \int \frac{2\,\mathrm{d}u}{4+u^2} = \operatorname{Arctan}\frac{u}{2}.$$

Sur $]0\,,+\infty[$, on obtient donc :

$$\boxed{x \mapsto \operatorname{Arctan}\frac{\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}}{2}}$$

À retenir : en (e), on reconnaît dans la primitive l'aire d'un secteur et d'un triangle ; c'est le calcul de l'aire du quart de disque du cours, mené avec une borne variable.

EXERCICE 20 ⋆⋆

Pour chaque intégrale, on indique la méthode et l'indice qui y conduit, puis le calcul.

(a) *Dérivée composée* : le facteur x est, à $\frac{1}{2}$ près, la dérivée de l'exposant x^2.

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2}\Big]_0^1 = \boxed{\frac{\mathrm{e}-1}{2}}$$

(b) *Intégration par parties* : l'exposant est x, dont la dérivée 1 n'apporte pas le facteur x ; on dérive le polynôme.

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \big[x\,\mathrm{e}^x\big]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - (\mathrm{e}-1) = \boxed{1}$$

(c) *Dérivée composée* : $\frac{1}{x}$ est la dérivée de $\ln x$.

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{(\ln x)^2}{2}\Big]_1^{\mathrm{e}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

(d) *Intégration par parties* : x n'est pas la dérivée de $\ln x$; on dérive ln, on primitive x.

$$\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{x^2}{2}\ln x\Big]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{\mathrm{e}^2-1}{4} = \boxed{\frac{\mathrm{e}^2+1}{4}}$$

(e) *Dérivée composée* : le numérateur est la moitié de la dérivée du dénominateur.

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big]_0^1 = \boxed{\frac{\ln 2}{2}}$$

(f) *Décomposition* : numérateur et dénominateur ont le même degré, on divise d'abord.

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \Big(1 - \frac{1}{1+x^2}\Big)\mathrm{d}x = \boxed{1 - \frac{\pi}{4}}$$

(g) *Intégration par parties* : on dérive Arctan, qui devient rationnelle, et l'on primitive x en $\frac{1+x^2}{2}$.

$$\int_0^1 x\,\mathrm{Arctan}\,x\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{1+x^2}{2}\,\mathrm{Arctan}\,x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{2} = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}$$

(h) *Intégration par parties* en primitivant 1 : une fonction seule, dont la dérivée est rationnelle. On choisit la primitive $1+x$ de 1.

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = \big[(1+x)\ln(1+x)\big]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{d}x = \boxed{2\ln 2 - 1}$$

(i) *Intégration par parties* en primitivant 1, puis l'exemple du cours pour $\int \ln$.

$$\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2\,\mathrm{d}x = \big[x(\ln x)^2\big]_1^{\mathrm{e}} - 2\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 2\big[x\ln x - x\big]_1^{\mathrm{e}} = \boxed{\mathrm{e}-2}$$

(j) *Changement de variable* $x = \sin\theta$, plutôt qu'une intégration par parties directe, puisque Arcsin n'est pas dérivable en 1 (voir l'exercice 15 (f)).

$$\int_0^1 \mathrm{Arcsin}\,x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \big[\theta\sin\theta + \cos\theta\big]_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{\pi}{2} - 1}$$

(k) *Dérivée composée* : une puissance impaire de sin ; on isole un $\sin x$ et l'on écrit $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,\mathrm{d}x = \Big[-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}\Big]_0^{\pi/2} = 1 - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

(l) *Intégration par parties* : un polynôme multiplié par un cosinus.

$$\int_0^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x = \big[x\sin x\big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x = \boxed{-2}$$

(m) *Changement de variable* $x = u^2$, pour faire disparaître la racine, puis intégration par parties.

$$\int_0^{\pi^2/4}\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} 2u\sin u\,\mathrm{d}u = 2\big[\sin u - u\cos u\big]_0^{\pi/2} = \boxed{2}$$

(n) *Changement de variable* $x = u^2$, puis décomposition, comme à l'exercice 18 (e).

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{2u^2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \boxed{2 - \frac{\pi}{2}}$$

(o) *Changement de variable* $x = u^2$: $x + \sqrt{x} = u(u+1)$ et $\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$.

$$\int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}} = \int_1^2 \frac{2\,\mathrm{d}u}{u+1} = 2\ln\frac{3}{2} = \boxed{\ln\frac{9}{4}}$$

(p) *Décomposition* : $\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}$.

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)} = \Big[\ln\frac{x}{1+x}\Big]_1^2 = \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2} = \boxed{\ln\frac{4}{3}}$$

(q) *Dérivée composée* : la forme $u'u^{-2}$ avec $u = 1 + \mathrm{e}^x$.

$$\int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\Big]_0^{\ln 2} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

(r) *Dérivée usuelle*, après avoir écrit $\tan^2 x = (1+\tan^2 x) - 1$.

$$\int_0^{\pi/4} \tan^2 x\,\mathrm{d}x = \big[\tan x - x\big]_0^{\pi/4} = \boxed{1 - \frac{\pi}{4}}$$

(s) *Exponentielle complexe* : le produit d'une exponentielle et d'un sinus.

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x - \cos x)\Big]_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{\mathrm{e}^{\pi/2}+1}{2}}$$

(t) *Changement de variable* $u = 1 - x^2$: on écrit $x^3 = x^2\cdot x$, où $x\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}u}{2}$ et $x^2 = 1 - u$.

$$\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-u)\sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\Big) = \boxed{\frac{2}{15}}$$

(u) *Parité* : l'intervalle est symétrique et l'intégrande est impaire, comme produit de la fonction impaire x^5 et des fonctions paires cos et $\frac{1}{1+x^2}$; aucun calcul de primitive n'est nécessaire (proposition 6).

$$\boxed{\int_{-1}^1 \frac{x^5\cos x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0}$$

En résumé, les intégrales se regroupent ainsi :

- dérivées composées (a), (c), (e), (k), (q), et dérivée usuelle (r) : l'intégrande contient un facteur qui est la dérivée d'une fonction apparaissant ailleurs ;
- intégrations par parties (b), (d), (g), (h), (i), (l) : un produit dont un facteur se simplifie en le dérivant (x, ln, Arctan), ou une fonction seule dont la dérivée est plus simple ;
- changements de variable (j), (m), (n), (o), (t) : une racine, ou une fonction réciproque non dérivable au bord ;
- décompositions (f), (p) ; exponentielle complexe (s) ; parité (u).

Les couples (a)–(b), (c)–(d) et (e)–(f) montrent qu'un changement minime de l'intégrande, ici la place d'un x ou d'un carré, fait disparaître le facteur « dérivée de » et oblige à changer de méthode.

EXERCICE 21 ⋆⋆

1. Le changement de variable $x = a + b - u$ échange a et b, et $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$:

$$J = \int_a^b x\, f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^a (a+b-u)\, f(a+b-u)\,(-\mathrm{d}u) = \int_a^b (a+b-u)\, f(u)\,\mathrm{d}u = (a+b)\int_a^b f - J.$$

$$\boxed{\int_a^b x\, f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

La courbe de f est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{a+b}{2}$; si $f \geqslant 0$, le domaine sous la courbe a son centre de gravité sur cette droite, et c'est ce qu'exprime l'égalité, le quotient $\int xf / \int f$ étant l'abscisse de ce centre de gravité.

2. Sur $[0\,,\pi]$, les fonctions $x \mapsto \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$ et $x \mapsto \frac{1}{1+\sin x}$ sont inchangées quand on remplace x par $\pi - x$, puisque $\sin(\pi - x) = \sin x$ et $\cos^2(\pi - x) = \cos^2 x$. La première intégrale se ramène à l'exercice 18 (b) :

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi^2}{4}}.$$

Pour la seconde, la symétrie par rapport à $\frac{\pi}{2}$ donne $\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$, puis $x = \frac{\pi}{2} - u$ et $1 + \cos u = 2\cos^2\frac{u}{2}$ donnent

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}u}{1+\cos u} = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}u}{2\cos^2(u/2)} = \Big[\tan\frac{u}{2}\Big]_0^{\pi/2} = 1, \qquad \text{d'où} \qquad \int_0^\pi \frac{x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\cdot 2 = \boxed{\pi}.$$

3. Le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - u$ échange cos et sin et laisse le dénominateur inchangé : les deux intégrales A et B sont égales. Leur somme vaut $\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

$$\boxed{A = B = \frac{\pi}{4}}$$

Enfin, le changement de variable $t = \sin\theta$, $\theta \in \big[0\,,\frac{\pi}{2}\big]$, donne $\sqrt{1-t^2} = \cos\theta$ et $\mathrm{d}t = \cos\theta\,\mathrm{d}\theta$:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}+t} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta = \boxed{\frac{\pi}{4}}.$$

À retenir : une symétrie de l'intervalle permet de calculer des intégrales dont on ne connaît aucune primitive explicite, comme $\int \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}$; on retrouvera cette idée dans l'exercice suivant.

EXERCICE 22 ⋆⋆⋆

1. Pour $x \in\,]-\pi\,,\pi[$, on a $\frac{x}{2} \in\,]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}[$, donc $\cos\frac{x}{2} > 0$ et $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2}$. Les formules de duplication du chapitre 4 donnent alors

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2}\Big(1-\tan^2\frac{x}{2}\Big) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Enfin $x = 2\operatorname{Arctan} t$, donc $\mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

2. *Première intégrale.* L'expression $\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$ est inchangée quand on remplace x par $-x$: on pose $u = \cos x$, en écrivant $\frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{1-\cos^2 x}$. Quand x va de $\frac{\pi}{3}$ à $\frac{\pi}{2}$, u va de $\frac{1}{2}$ à 0 :

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = \Big[\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}\Big]_0^{1/2} = \boxed{\frac{\ln 3}{2}}.$$

Deuxième intégrale. Même invariance, et $u = \cos x$ va de 1 à -1 :

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{4-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}u}{4-u^2} = \Big[\frac{1}{4}\ln\frac{2+u}{2-u}\Big]_{-1}^1 = \frac{1}{4}\Big(\ln 3 - \ln\frac{1}{3}\Big) = \boxed{\frac{\ln 3}{2}}.$$

Troisième intégrale. Aucune des trois symétries ne laisse $\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$ invariante : on pose $t = \tan\frac{x}{2}$, qui va de 0 à 1.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{2(1+t^2)+1-t^2} = \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{3+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\pi}{3\sqrt{3}}}$$

Quatrième intégrale. En remplaçant x par $-x$, $\sin x + \tan x$ et $\mathrm{d}x$ changent tous deux de signe : on pose $u = \cos x$. On écrit $\sin x + \tan x = \frac{\sin x\,(1+\cos x)}{\cos x}$, d'où

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sin x + \tan x} = \frac{\cos x\,\sin x\,\mathrm{d}x}{(1-\cos^2 x)(1+\cos x)} = \frac{-u\,\mathrm{d}u}{(1-u)(1+u)^2}.$$

On décompose, comme à l'exercice 12 : $\frac{u}{(1-u)(1+u)^2} = \frac{1}{4(1-u)} + \frac{1}{4(1+u)} - \frac{1}{2(1+u)^2}$.

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + \tan x} = \Big[\frac{1}{4}\ln\frac{1+u}{1-u} + \frac{1}{2(1+u)}\Big]_0^{1/2} = \frac{\ln 3}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{\ln 3}{4} - \frac{1}{6}}$$

Le résultat vaut environ 0,108 : il est bien positif, comme l'intégrande.

EXERCICE 23 ⋆⋆⋆

1. Les premières valeurs se calculent directement, avec $\sin^2 = \frac{1-\cos(2t)}{2}$:

$$\boxed{W_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad W_1 = \big[-\cos t\big]_0^{\pi/2} = 1, \qquad W_2 = \frac{\pi}{4}}$$

Le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - u$ échange les bornes, et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u$:

$$W_n = \int_{\pi/2}^0 \cos^n u\,(-\mathrm{d}u) = \boxed{\int_0^{\pi/2} \cos^n u\,\mathrm{d}u}.$$

2. Sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leqslant \sin t \leqslant 1$, donc $\sin^{n+1} t \leqslant \sin^n t$, et $W_{n+1} \leqslant W_n$ par croissance de l'intégrale. De plus, $\sin^n$ est continue, positive et non nulle : l'exercice 5 donne $W_n > 0$.

$$\boxed{(W_n) \text{ est décroissante, et } W_n > 0}$$

3. On écrit $\sin^{n+2} t = \sin t \cdot \sin^{n+1} t$, on primitive $\sin t$ en $-\cos t$ et l'on dérive $\sin^{n+1} t$:

$$W_{n+2} = \big[-\cos t \sin^{n+1} t\big]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,\sin^n t\,\mathrm{d}t = (n+1)(W_n - W_{n+2}),$$

en remplaçant $\cos^2 t$ par $1 - \sin^2 t$.

$$\boxed{(n+2)\,W_{n+2} = (n+1)\,W_n}$$

4. Par récurrence sur p. Les formules sont vraies pour $p = 0$. Si elles le sont au rang p, la relation de la question 3 avec $n = 2p$ donne

$$W_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2}\,W_{2p} = \frac{(2p+1)(2p+2)}{(2p+2)^2}\cdot\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}\big((p+1)!\big)^2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

puisque $(2p+2)^2 = 4(p+1)^2$; de même, avec $n = 2p+1$,

$$W_{2p+3} = \frac{2p+2}{2p+3}\,W_{2p+1} = \frac{(2p+2)^2}{(2p+2)(2p+3)}\cdot\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{2^{2p+2}\big((p+1)!\big)^2}{(2p+3)!}.$$

$$\boxed{W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\cdot\frac{\pi}{2} \qquad W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}}$$

5. En multipliant la relation de la question 3 par W_{n+1}, on obtient

$$(n+2)\,W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)\,W_{n+1}W_n :$$

la suite est constante, égale à son premier terme $1 \cdot W_1 W_0$.

$$\boxed{(n+1)\,W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}}$$

6. La suite étant décroissante et strictement positive, $W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$; en divisant par $W_n > 0$ et en utilisant la question 3 :

$$\boxed{\frac{n+1}{n+2} = \frac{W_{n+2}}{W_n} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1}$$

Lorsque n est grand, le quotient $\frac{W_{n+1}}{W_n}$ est donc très proche de 1 : W_{n+1} et W_n sont presque égaux, et la question 5 suggère alors $(n+1)\,W_n^2 \approx \frac{\pi}{2}$, soit $W_n \approx \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. On pourra rendre ce raisonnement rigoureux lorsque les limites de suites auront été étudiées ; il conduit à la formule de Wallis et à celle de Stirling.

EXERCICE 24 ⋆⋆⋆

1. Le changement de variable $t = 1-u$ échange les bornes 0 et 1, et $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$:

$$I_{p,q} = \int_1^0 (1-u)^p u^q\,(-\mathrm{d}u) = \int_0^1 u^q (1-u)^p\,\mathrm{d}u = \boxed{I_{q,p}}.$$

2. Pour $q \geqslant 1$, on primitive t^p en $\frac{t^{p+1}}{p+1}$ et l'on dérive $(1-t)^q$; le crochet est nul aux deux bornes :

$$I_{p,q} = \Big[\frac{t^{p+1}}{p+1}(1-t)^q\Big]_0^1 + \frac{q}{p+1}\int_0^1 t^{p+1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t = \boxed{\frac{q}{p+1}\,I_{p+1,q-1}}.$$

En appliquant cette relation q fois, l'exposant de $1-t$ descend jusqu'à 0 :

$$I_{p,q} = \frac{q}{p+1}\cdot\frac{q-1}{p+2}\cdots\frac{1}{p+q}\,I_{p+q,0} = \frac{q!\,p!}{(p+q)!}\cdot\frac{1}{p+q+1},$$

puisque $I_{p+q,0} = \frac{1}{p+q+1}$.

$$\boxed{I_{p,q} = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}}$$

3. La formule du binôme donne $(1-t)^q = \sum_{k=0}^q \binom{q}{k}(-1)^k t^k$, d'où, par linéarité,

$$I_{p,q} = \sum_{k=0}^q \binom{q}{k}(-1)^k \int_0^1 t^{p+k}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\sum_{k=0}^q \binom{q}{k}\frac{(-1)^k}{p+k+1} = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}}.$$

4. Pour $p=0$ et $q=2$, le membre de gauche vaut $1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, et celui de droite $\frac{0!\,2!}{3!} = \frac{1}{3}$. ✓ Pour $p=q=4$:

$$\boxed{\int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x = \frac{4!\,4!}{9!} = \frac{576}{362\,880} = \frac{1}{630}}$$

C'est bien la valeur trouvée à l'exercice 9 en développant.

EXERCICE 25 ⋆⋆⋆

1. On a $I_0 = \big[\ln(1+x)\big]_0^1$, donc $\boxed{I_0 = \ln 2}$. Pour $x \in [0\,,1]$, on a $0 \leqslant \frac{x^n}{1+x} \leqslant x^n$, et l'on intègre :

$$\boxed{0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}}$$

2. Les deux intégrandes s'ajoutent en $\frac{x^n(1+x)}{1+x} = x^n$:

$$\boxed{I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}}$$

3. On remplace chaque $\frac{1}{k+1}$ par $I_k + I_{k+1}$; la somme est télescopique, au signe près :

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k I_k - \sum_{k=1}^{N+1} (-1)^k I_k = I_0 - (-1)^{N+1} I_{N+1}.$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 + (-1)^N I_{N+1}}$$

D'après la question 1, l'écart entre cette somme et $\ln 2$ vaut I_{N+1}, compris entre 0 et $\frac{1}{N+2}$: il est aussi petit que l'on veut pourvu que N soit assez grand.

4. On pose de même $J_0 = \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}$; l'encadrement $0 \leqslant \frac{x^{2n}}{1+x^2} \leqslant x^{2n}$ donne $0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{2n+1}$, et $J_n + J_{n+1} = \int_0^1 x^{2n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n+1}$. Le même télescopage donne

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} + (-1)^N J_{N+1}, \qquad 0 \leqslant J_{N+1} \leqslant \frac{1}{2N+3}}$$

La somme $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$ s'approche donc de $\frac{\pi}{4}$, avec une erreur au plus $\frac{1}{2N+3}$.
À retenir : ces deux résultats sont dus à Mercator et à Leibniz (ou, en Inde, à Madhava) ; l'erreur, de l'ordre de $\frac{1}{N}$, montre qu'il faut des milliers de termes pour obtenir trois décimales de π, ce qui contraste avec la méthode de l'exercice 9.

EXERCICE 26 ⋆⋆⋆

1. On ajoute $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$, avec $a = mx$ et $b = x$:

$$\boxed{2\cos x \cos(mx) = \cos\big((m+1)x\big) + \cos\big((m-1)x\big)}$$

En multipliant par $\cos^n x$ et en intégrant sur $[0\,,\pi]$, on obtient, pour $m \geqslant 1$:

$$\boxed{2C_{n+1,m} = C_{n,m+1} + C_{n,m-1}}$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$: « $C_{n,m} = 0$ pour tout entier $m > n$ ».

Initialisation : Pour $m \geqslant 1$, $C_{0,m} = \big[\frac{\sin(mx)}{m}\big]_0^{\pi} = 0$.

Hérédité : Supposons $\mathcal{P}(n)$, et soit $m > n+1$. Alors $m \geqslant 1$, et les entiers $m+1$ et $m-1$ sont strictement supérieurs à n : la question 1 donne $2C_{n+1,m} = 0 + 0$.

Conclusion : $\boxed{C_{n,m} = 0 \text{ pour tous entiers } m > n}$.

3. La question 1, avec $m = n+1$, puis la question 2 donnent $2C_{n+1,n+1} = C_{n,n+2} + C_{n,n} = C_{n,n}$. La suite $(C_{n,n})$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$, et $C_{0,0} = \int_0^{\pi} \mathrm{d}x = \pi$.

$$\boxed{C_{n,n} = \frac{\pi}{2^n}}$$

4. La formule du binôme donne, comme au chapitre 4,

$$\cos^n x = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k-n)x} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos\big((2k-n)x\big),$$

la seconde égalité s'obtenant en prenant la partie réelle. Pour des entiers p et m, on a

$$\int_0^\pi \cos(px)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\pi \big(\cos((p+m)x)+\cos((p-m)x)\big)\,\mathrm{d}x,$$

qui vaut 0 si $p+m\neq 0$ et $p-m\neq 0$, et $\frac{\pi}{2}$ si une seule de ces deux quantités est nulle. Si $m>n$, tous les entiers $2k-n$ sont de valeur absolue au plus $n<m$, donc toutes les intégrales sont nulles. Si $m=n\geqslant 1$, seuls les termes $k=0$ et $k=n$ contribuent, chacun pour $\frac{\pi}{2}$, ce qui donne

$$C_{n,n} = \frac{1}{2^n}\Big(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{\pi}{2^n}. \quad \checkmark$$

Équations différentielles linéaires du premier ordre

EXERCICE 27 ⋆

Pour une équation $y'+ay=b(x)$ à coefficient a constant, les solutions de l'équation homogène sont les $\lambda\,\mathrm{e}^{-ax}$ (théorème 2), et l'on cherche une solution particulière de la forme du second membre (remarque du cours), puis l'on applique la proposition 7.

(a) La constante -2 est solution, d'où $y=-2+\lambda\,\mathrm{e}^{-2x}$. La condition $y(1)=-3$ donne $\lambda\,\mathrm{e}^{-2}=-1$.

$$\boxed{y(x) = -2-\mathrm{e}^{2-2x}}$$

(b) Sous forme normalisée, $y'-\frac{3}{2}y=\frac{9}{2}$; la constante -3 est solution, d'où $y=-3+\lambda\,\mathrm{e}^{3x/2}$, et $y(-1)=1$ donne $\lambda\,\mathrm{e}^{-3/2}=4$.

$$\boxed{y(x) = -3+4\,\mathrm{e}^{3(x+1)/2}}$$

(c) Comme le coefficient de y n'est pas nul, un polynôme de degré 2 convient : avec $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, on identifie $2\alpha=1$, $2\alpha+2\beta=-2$ et $\beta+2\gamma=3$.

$$\boxed{y(x) = \frac{x^2}{2}-\frac{3x}{2}+\frac{9}{4}+\lambda\,\mathrm{e}^{-2x}, \quad \lambda\in\mathbb{R}}$$

(d) On cherche un polynôme de degré 3 ; l'identification, en partant du terme de plus haut degré, donne successivement les coefficients 1, -13, 93 et -326.

$$\boxed{y(x) = x^3-13x^2+93x-326+\lambda\,\mathrm{e}^{-2x/7}, \quad \lambda\in\mathbb{R}}$$

(e) Ici e^{-x} est solution de l'équation homogène : on fait varier la constante, $y=\lambda(x)\,\mathrm{e}^{-x}$ avec $\lambda'(x)=x$.

$$\boxed{y(x) = \Big(\frac{x^2}{2}+\lambda\Big)\mathrm{e}^{-x}, \quad \lambda\in\mathbb{R}}$$

(f) On cherche $y=\alpha\cos x+\beta\sin x$: l'identification donne $\beta-2\alpha=1$ et $-\alpha-2\beta=2$, d'où $\alpha=-\frac{4}{5}$ et $\beta=-\frac{3}{5}$.

$$\boxed{y(x) = -\frac{4\cos x+3\sin x}{5}+\lambda\,\mathrm{e}^{2x}, \quad \lambda\in\mathbb{R}}$$

(g) On cherche $y = Q(x)\,\mathrm{e}^{2x}$: l'équation devient $Q' + 3Q = x^2 - 2x + 2$, et Q est de degré 2, avec $Q = \frac{1}{27}(9x^2 - 24x + 26)$.

$$\boxed{y(x) = \frac{9x^2 - 24x + 26}{27}\,\mathrm{e}^{2x} + \lambda\,\mathrm{e}^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

(h) On écrit le second membre avec des exponentielles :

$$\operatorname{sh} x - 2x \operatorname{ch} x = \Big(\frac{1}{2} - x\Big)\mathrm{e}^{x} - \Big(\frac{1}{2} + x\Big)\mathrm{e}^{-x},$$

et l'on traite les deux termes séparément (principe de superposition). Pour le premier, $y = Q\,\mathrm{e}^{x}$ donne $Q' - Q = \frac{1}{2} - x$, d'où $Q = x + \frac{1}{2}$; pour le second, $y = R\,\mathrm{e}^{-x}$ donne $R' - 3R = -\frac{1}{2} - x$, d'où $R = \frac{x}{3} + \frac{5}{18}$.

$$\boxed{y(x) = \Big(x + \frac{1}{2}\Big)\mathrm{e}^{x} + \Big(\frac{x}{3} + \frac{5}{18}\Big)\mathrm{e}^{-x} + \lambda\,\mathrm{e}^{2x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

Piège : en (e), chercher une solution de la forme $(\alpha x + \beta)\,\mathrm{e}^{-x}$ échoue, car le terme $\beta\,\mathrm{e}^{-x}$ est absorbé par l'équation homogène : il faut monter d'un degré, ce que la variation de la constante fait automatiquement.

EXERCICE 28 ⋆

On applique le théorème 2 pour l'équation homogène, puis la variation de la constante, sauf lorsqu'une solution particulière est évidente.

(a) Une primitive de x^2 est $\frac{x^3}{3}$, et la constante -1 est solution.

$$\boxed{y(x) = -1 + \lambda\,\mathrm{e}^{-x^3/3}, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

(b) L'équation homogène a pour solutions les $\lambda\,\mathrm{e}^{-x^2}$, et $\lambda'(x) = \mathrm{e}^{x-x^2}\mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^{x}$.

$$\boxed{y(x) = (\mathrm{e}^{x} + \lambda)\,\mathrm{e}^{-x^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

(c) Le coefficient de y admet la primitive $A(x) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$; les solutions homogènes sont donc les $\lambda\sqrt{1+x^2}$. On obtient $\lambda'(x) = (1+x^2)^{-3/2}$, que l'on primitive par le changement de variable $x = \tan\theta$:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{3/2}} = \int \cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \sin\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\boxed{y(x) = x + \lambda\sqrt{1+x^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

On aurait pu remarquer directement que $y = x$ est solution, puisque $1 - \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$.

(d) Avec $y = \lambda(x)\,\mathrm{e}^{-x}$, on obtient $\lambda'(x) = \frac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}$, de la forme $\frac{u'}{u}$.

$$\boxed{y(x) = \big(\ln(1+\mathrm{e}^{x}) + \lambda\big)\,\mathrm{e}^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

(e) L'équation homogène a pour solutions les $\lambda\,\mathrm{e}^{x^2}$, et $\lambda'(x) = (1-2x)\,\mathrm{e}^{x-x^2}$, qui est la dérivée de e^{x-x^2}.

$$\boxed{y(x) = \mathrm{e}^{x} + \lambda\,\mathrm{e}^{x^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

(f) Sur $]0\,,+\infty[$, $A(t) = -2\ln t$, les solutions homogènes sont les λt^2, et $\lambda'(t) = t^2 \cdot t^{-2} = 1$.

$$\boxed{y(t) = t^3 + \lambda t^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

(g) Ici $A(t) = \ln t$, les solutions homogènes sont les $\frac{\lambda}{t}$, et $\lambda'(t) = \frac{1}{t(1+t^2)} \cdot t = \frac{1}{1+t^2}$.

$$\boxed{y(t) = \frac{\operatorname{Arctan} t + \lambda}{t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

(h) Une primitive de $-\tan$ est $\ln(\cos x)$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc les solutions homogènes sont les $\frac{\lambda}{\cos x}$, et $\lambda'(x) = \frac{1}{\cos x} \cdot \cos x = 1$.

$$\boxed{y(x) = \frac{x + \lambda}{\cos x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

EXERCICE 29 ⋆⋆

Sur chaque intervalle indiqué, le coefficient de y' ne s'annule pas : on divise par lui.

(a) $y' - \frac{1}{2x} y = \frac{1}{2}$. Les solutions homogènes sont les $\lambda\sqrt{x}$, et $y = x$ est solution évidente.

$$\boxed{y(x) = x + \lambda\sqrt{x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

(b) Le premier membre est la dérivée de $(1+x)\, y$. En primitivant, avec la primitive $(1+x)\ln(1+x) - x$ de $\ln(1+x)$, on obtient $(1+x)\, y = (1+x)\ln(1+x) + \lambda$.

$$\boxed{y(x) = \ln(1+x) + \frac{\lambda}{1+x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

(c) $y' - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Une primitive du coefficient est $-\operatorname{Arcsin} x$, et la constante -1 est solution.

$$\boxed{y(x) = -1 + \lambda\, \mathrm{e}^{\operatorname{Arcsin} x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

(d) $y' - \operatorname{th}(x)\, y = \frac{1+\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{ch} x}$. Une primitive de $-\operatorname{th}$ est $-\ln(\operatorname{ch} x)$, les solutions homogènes sont les $\lambda \operatorname{ch} x$, et $\lambda'(x) = \frac{1+\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} + 1$, de primitive $\operatorname{th} x + x$.

$$\boxed{y(x) = \operatorname{sh} x + (x + \lambda) \operatorname{ch} x, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

(e) Sur $]0\,, 1[$, $x \ln x \neq 0$, et $y' - \frac{1}{x \ln x} y = 3x \ln x$. Une primitive de $\frac{1}{x \ln x}$ est $\ln|\ln x|$, donc les solutions homogènes sont les $\lambda \ln x$; avec $y = \lambda(x) \ln x$, l'équation devient $\lambda' \ln x = 3x \ln x$, soit $\lambda' = 3x$.

$$\boxed{y(x) = \left(\frac{3x^2}{2} + \lambda\right) \ln x, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

(f) $y' - \frac{2}{x} y = x^2 \sin x$. Les solutions homogènes sont les λx^2, et $\lambda'(x) = \sin x$.

$$\boxed{y(x) = (\lambda - \cos x)\, x^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

EXERCICE 30 ⋆⋆

1. Notons $a_0 = a(x_0)$ et $b_0 = b(x_0)$. D'après le théorème 3, pour tout réel y_0, une solution prend la valeur y_0 en x_0 ; sa dérivée en x_0 vaut $b_0 - a_0 y_0$, et sa tangente a pour équation

$$Y = y_0 + (b_0 - a_0 y_0)(X - x_0) = y_0(1 - a_0(X - x_0)) + b_0(X - x_0).$$

Si $a_0 = 0$, toutes les tangentes ont la pente b_0 : elles sont parallèles. Si $a_0 \neq 0$, pour $X = x_0 + \frac{1}{a_0}$, le terme en y_0 disparaît et $Y = \frac{b_0}{a_0}$, quel que soit y_0.

$$\boxed{\text{si } a(x_0) \neq 0, \text{ toutes les tangentes passent par } \left(x_0 + \frac{1}{a(x_0)}, \frac{b(x_0)}{a(x_0)}\right)}$$

2. Si $y = \frac{C+x}{1+x^2}$, alors $(1+x^2)\,y = C + x$, et en dérivant, $2x\,y + (1+x^2)\,y' = 1$. Réciproquement, cette équation, mise sous forme normalisée, a pour solutions homogènes les $\frac{C}{1+x^2}$ et pour solution particulière $\frac{x}{1+x^2}$: ses solutions sont exactement les fonctions données.

$$\boxed{y' + \frac{2x}{1+x^2}\,y = \frac{1}{1+x^2}}$$

3. D'après le théorème 5, il suffit que 2 et -1 soient les racines de l'équation caractéristique, qui est donc $(r-2)(r+1) = r^2 - r - 2 = 0$.

$$\boxed{y'' - y' - 2y = 0}$$

EXERCICE 31 ⋆⋆

1. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est solution de l'équation homogène : on fait varier la constante en posant $f(t) = \lambda(t)\,\mathrm{e}^{-t}$, ce qui donne $\lambda'(t) = a$. Les solutions sont les $(at + c)\,\mathrm{e}^{-t}$, et $f(0) = 0$ impose $c = 0$.

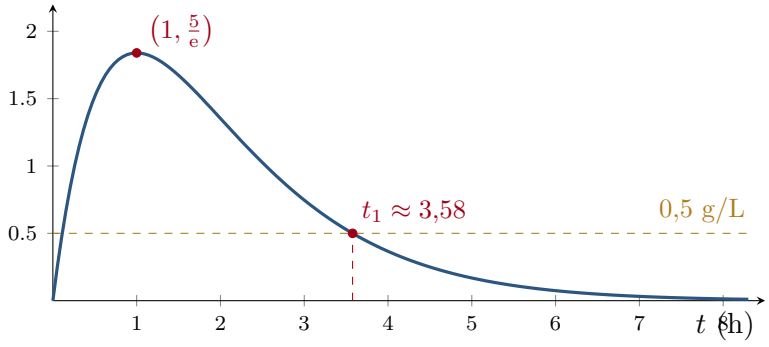
$$\boxed{f(t) = a\,t\,\mathrm{e}^{-t}}$$

2. Pour $a = 5$, on a $f'(t) = 5(1-t)\,\mathrm{e}^{-t}$, du signe de $1 - t$: f est croissante sur $[0\,,1]$ et décroissante sur $[1\,,+\infty[$.

$$\boxed{\text{taux maximal } f(1) = \frac{5}{\mathrm{e}} \approx 1{,}84 \text{ g/L, atteint au bout d'une heure}}$$

3. Sur $]1\,,+\infty[$, la fonction f est dérivable et strictement décroissante ; elle tend vers $\frac{5}{\mathrm{e}}$ en 1 et vers 0 en $+\infty$, par croissances comparées (chapitre 5). D'après le théorème 2 du chapitre 5, elle réalise une bijection de $]1\,,+\infty[$ sur $]0\,,\frac{5}{\mathrm{e}}[$, qui contient 0,5. Il existe donc un unique $t_1 > 1$ tel que $f(t_1) = 0{,}5$, et $f(t) < 0{,}5$ pour $t > t_1$ par décroissance. La résolution numérique de $t\,\mathrm{e}^{-t} = 0{,}1$ donne $t_1 \approx 3{,}577$ h, soit, puisque $0{,}577 \times 60 \approx 34{,}6$:

$$\boxed{t_1 \approx 3 \text{ h } 35 \text{ min}}$$



Le taux monte vite pendant la première heure, puis décroît lentement : il faut plus de deux heures et demie après le pic pour repasser sous le seuil de 0,5 g/L.

EXERCICE 32 ⋆⋆⋆

1. Sur chacun des intervalles $]-\infty\,,0[$ et $]0\,,+\infty[$, l'équation s'écrit $y' - \frac{2}{x}\,y = 1$. Les solutions homogènes sont les λx^2, puisque $\mathrm{e}^{2\ln|x|} = x^2$, et $y = -x$ est solution évidente.

$$\boxed{y(x) = -x + \lambda x^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \text{ sur chacun des deux intervalles}}$$

2. En $x = 0$, l'équation donne $0 = 2y(0) + 0$, donc $\boxed{y(0) = 0}$. D'après la question 1, il existe des constantes C_1 et C_2 telles que $y(x) = -x + C_1x^2$ pour $x < 0$ et $y(x) = -x + C_2x^2$ pour $x > 0$; ces formules restent vraies en 0, puisque $y(0) = 0$. Le taux d'accroissement $\frac{y(x)-y(0)}{x}$ vaut $-1 + C_ix$, qui tend vers -1 : $\boxed{y'(0) = -1}$.

Réciproquement, une telle fonction est dérivable sur $]-\infty\,,0[$ et sur $]0\,,+\infty[$, où elle vérifie (E) ; le calcul précédent montre qu'elle est dérivable en 0, avec $y'(0) = -1$, et (E) est vérifiée en 0 puisque $0 \times (-1) = 2 \times 0 + 0$.

$$\boxed{\text{les solutions sur } \mathbb{R} \text{ sont les } x \mapsto \begin{cases} -x + C_1x^2 & (x \leqslant 0) \\ -x + C_2x^2 & (x \geqslant 0) \end{cases}, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2}$$

3. Toutes les solutions vérifient $y(0) = 0$: il y en a une infinité, dépendant de deux constantes, et aucune ne vérifie $y(0) = 1$.

$$\boxed{y(0) = 0 : \text{ une infinité} \qquad y(0) = 1 : \text{ aucune}}$$

Le théorème de Cauchy du cours porte sur une équation $y' + a(x)\,y = b(x)$ à coefficients continus sur un intervalle. Pour mettre (E) sous cette forme, il faut diviser par x, ce qui est impossible sur un intervalle contenant 0 : le théorème ne s'applique pas.

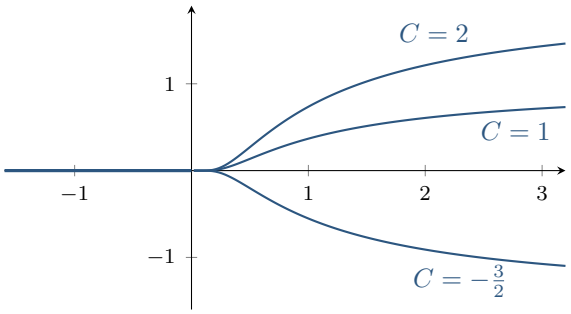
4. Sur $]0\,,+\infty[$ ou $]-\infty\,,0[$, l'équation s'écrit $y' - \frac{1}{x^2}\,y = 0$; une primitive de $-\frac{1}{x^2}$ est $\frac{1}{x}$, d'où les solutions $\lambda\,\mathrm{e}^{-1/x}$ sur chacun des deux intervalles. Soit maintenant y une solution sur $\mathbb{R}$. En 0, l'équation donne $y(0) = 0$. Pour $x < 0$, on a $y(x) = C_1\mathrm{e}^{-1/x}$, et $\mathrm{e}^{-1/x}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0^- : la continuité en 0 impose $C_1 = 0$. Pour $x > 0$, $y(x) = C_2\mathrm{e}^{-1/x}$ tend vers 0, et le taux d'accroissement vérifie

$$\frac{C_2\mathrm{e}^{-1/x}}{x} = C_2\,x \cdot \frac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x^2} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0.$$

La fonction est donc dérivable en 0, de dérivée nulle, et l'équation est vérifiée en 0. Réciproquement, ces fonctions conviennent.

$$\boxed{\text{les solutions sur } \mathbb{R} \text{ sont les } x \mapsto \begin{cases} 0 & (x \leqslant 0) \\ C\,\mathrm{e}^{-1/x} & (x > 0) \end{cases}, \quad C \in \mathbb{R}}$$

Toutes s'annulent en 0 et sont nulles à gauche, mais elles diffèrent à droite : là encore, la condition $y(0) = 0$ ne détermine pas la solution.



Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $x^2y' = y$ partent toutes de la demi-droite nulle à gauche de 0, puis se séparent en 0 en quittant l'axe avec une tangente horizontale : la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-1/x}$ est si plate en 0^+ que le raccordement se fait sans angle.

EXERCICE 33 ⋆⋆⋆

La méthode est celle de l'exercice 32 : on résout sur les intervalles où le coefficient de y' ne s'annule pas, puis on cherche à quelles conditions les morceaux se recollent en une fonction dérivable vérifiant l'équation aux points singuliers.

(a) Sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$, $y'-\frac{1}{x}y=x$: les solutions homogènes sont les λx, et $\lambda'=1$, d'où $y=x^2+C_ix$. Une solution sur $\mathbb{R}$ vérifie $y(0)=0$, et ses dérivées à gauche et à droite en 0 valent C_1 et C_2 : elle n'est dérivable que si $C_1=C_2$. Réciproquement, x^2+Cx est solution sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{y(x)=x^2+Cx,\quad C\in\mathbb{R}}$$

(b) Le premier membre est $(xy)'$: sur chaque demi-droite, $xy=\frac{x^3}{3}+C_i$, soit $y=\frac{x^2}{3}+\frac{C_i}{x}$. Une solution sur $\mathbb{R}$ est continue en 0, donc bornée au voisinage de 0, ce qui impose $C_1=C_2=0$.

$$\boxed{y(x)=\frac{x^2}{3}\text{ : solution unique}}$$

(c) Sur chaque demi-droite, $\operatorname{sh}x\neq 0$ et $y'-\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}y=\frac{1}{\operatorname{sh}x}$. Les solutions homogènes sont les $\lambda\operatorname{sh}x$, et $\lambda'(x)=\frac{1}{\operatorname{sh}^2x}$, dont une primitive est $-\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}$, comme on le vérifie en dérivant ; d'où $y=-\operatorname{ch}x+C_i\operatorname{sh}x$. En 0, l'équation donne $-y(0)=1$: les deux morceaux tendent bien vers -1. Les dérivées à gauche et à droite en 0 sont celles de $-\operatorname{ch}+C_i\operatorname{sh}$, soit C_1 et C_2 : il faut $C_1=C_2$.

$$\boxed{y(x)=-\operatorname{ch}x+C\operatorname{sh}x,\quad C\in\mathbb{R}}$$

(d) Les points singuliers sont -1 et 1. Sur chacun des trois intervalles, $y'=\frac{x}{x^2-1}y$, et une primitive du coefficient est $\frac{1}{2}\ln|x^2-1|$: $y=C_i\sqrt{|x^2-1|}$. Une solution sur $\mathbb{R}$ vérifie $y(\pm1)=0$. En 1, le taux d'accroissement à droite vaut

$$\frac{C\sqrt{x^2-1}}{x-1}=C\sqrt{\frac{x+1}{x-1}},$$

qui tend vers l'infini si $C\neq 0$; il en est de même à gauche de 1 et des deux côtés de -1. Toutes les constantes sont nulles.

$$\boxed{y=0\text{ : solution unique}}$$

À retenir : selon l'équation, le raccordement peut ajouter des solutions (exercice 32), en conserver le nombre (a) et (c), ou en éliminer (b) et (d) ; il faut chaque fois mener l'étude, sans présumer du résultat.

EXERCICE 34 ⋆⋆⋆

(a) Le second membre $k=f(0)+f(1)$ est une constante : f est solution de $y'+y=k$, donc $f(x)=k+C\,\mathrm{e}^{-x}$. Il reste à écrire que $k=f(0)+f(1)=2k+C(1+\mathrm{e}^{-1})$, soit $C=-\frac{k\,\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}$. Réciproquement, ces fonctions conviennent.

$$\boxed{f(x)=k\Big(1-\frac{\mathrm{e}^{1-x}}{\mathrm{e}+1}\Big),\quad k\in\mathbb{R}}$$

(b) De même, avec $m=\int_0^1 f$, on a $f(x)=m+C\,\mathrm{e}^{-x}$, et la condition s'écrit $m=m+C(1-\mathrm{e}^{-1})$, d'où $C=0$. Réciproquement, toute fonction constante $f=m$ vérifie $f'+f=m=\int_0^1 f$.

$$\boxed{\text{les fonctions constantes}}$$

(c) La relation donne $f'(x)=\mathrm{e}^x-f(-x)$: le second membre est dérivable, donc f est deux fois dérivable, et $f''(x)=\mathrm{e}^x+f'(-x)$. En appliquant la relation en $-x$, $f'(-x)=\mathrm{e}^{-x}-f(x)$, d'où

$$f''+f=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}=2\operatorname{ch}x.$$

La fonction ch est solution particulière, puisque $\mathrm{ch}'' = \mathrm{ch}$, et le théorème 5 donne

$$f(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + \mathrm{ch}\, x.$$

On réinjecte dans la relation de départ :

$$f'(x) + f(-x) = (-\lambda \sin x + \mu \cos x + \mathrm{sh}\, x) + (\lambda \cos x - \mu \sin x + \mathrm{ch}\, x),$$

c'est-à-dire $f'(x) + f(-x) = (\lambda + \mu)(\cos x - \sin x) + \mathrm{e}^x$, ce qui impose $\mu = -\lambda$.

$$\boxed{f(x) = \lambda(\cos x - \sin x) + \mathrm{ch}\, x, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

Piège : en (c), l'équation du second ordre n'est qu'une conséquence de la relation donnée ; toutes ses solutions ne conviennent pas, et l'étape de réinjection, qui élimine une constante, est indispensable.

EXERCICE 35 ⋆⋆⋆

1. Posons $\varphi(x) = (z(x) - y(x))\,\mathrm{e}^{-A(x)}$. Elle est dérivable, et

$$\varphi'(x) = (z' - y' - a(z-y))\,\mathrm{e}^{-A} = (z' - az - b)\,\mathrm{e}^{-A} - (y' - ay - b)\,\mathrm{e}^{-A} = (z' - az - b)\,\mathrm{e}^{-A} \leqslant 0.$$

La fonction φ est donc décroissante, et $\varphi(0) = 0$: pour $x \geqslant 0$, $\varphi(x) \leqslant 0$, et comme $\mathrm{e}^{-A(x)} > 0$:

$$\boxed{z(x) \leqslant y(x) \text{ pour tout } x \geqslant 0}$$

2. La fonction $y : x \mapsto g(0)\,\mathrm{e}^{kx}$ vérifie $y' = ky$ et $y(0) = g(0)$. Le raisonnement de la question 1, mené sur $[0\,,+\infty[$ avec $a = k$, $b = 0$ et $z = g$, donne :

$$\boxed{g(x) \leqslant g(0)\,\mathrm{e}^{kx} \text{ pour tout } x \geqslant 0}$$

3. Pour $x \leqslant 0$, la décroissance de φ donne $\varphi(x) \geqslant \varphi(0) = 0$: l'inégalité s'inverse.

$$\boxed{z(x) \geqslant y(x) \text{ pour tout } x \leqslant 0}$$

Une sous-solution reste sous la solution dans le futur, et au-dessus dans le passé ; cette comparaison servira à l'exercice 55.

EXERCICE 36 ⋆⋆⋆

1. La fonction $\mathrm{Arctan} \circ y$ est dérivable sur I, de dérivée $\frac{y'}{1+y^2} = 1$: il existe une constante c telle que $\mathrm{Arctan}(y(x)) = x + c$ pour tout $x \in I$. Comme Arctan prend ses valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[$, on a $x + c$ dans cet intervalle, et en composant par tan :

$$\boxed{y(x) = \tan(x+c), \qquad I \subset \left]-\frac{\pi}{2} - c\,, \frac{\pi}{2} - c\right[}$$

L'intervalle I est donc de longueur au plus π : il n'existe aucune solution sur $\mathbb{R}$. La longueur π est atteinte, par exemple par tan sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[$.

$$\boxed{\text{aucune solution sur } \mathbb{R}\,;\ \text{longueur maximale de } I : \pi}$$

Ce phénomène d'« explosion en temps fini » est impossible pour une équation linéaire, dont les solutions sont définies sur tout l'intervalle où les coefficients sont continus (théorème 3).

2. Si y est dérivable et strictement positive, $z = y^2$ l'est aussi, avec $z' = 2y\,y'$; réciproquement, si z est dérivable et strictement positive, $y = \sqrt{z}$ est dérivable. L'équation devient

$$x^2 + z - x\,z' = 0, \qquad \text{soit} \qquad z' - \frac{1}{x}\,z = x \quad \text{sur }]0\,,+\infty[,$$

dont les solutions sont les $z(x) = x^2 + Cx$, comme à l'exercice 33 (a). Il faut enfin $z(x) = x(x+C) > 0$ pour tout $x > 0$, c'est-à-dire $C \geqslant 0$: si $C < 0$, z est négative sur $]0\,,-C]$.

$$\boxed{y(x) = \sqrt{x^2 + Cx}, \quad C \geqslant 0}$$

EXERCICE 37 ⋆

On résout l'équation caractéristique, puis on applique le théorème 5 pour les solutions réelles et le théorème 4 pour les solutions complexes ; les constantes λ, μ sont réelles dans le premier cas, complexes dans le second.

(a) $r^2-2r-3=(r-3)(r+1)$: les deux écritures coïncident.

$$\boxed{y(x)=\lambda\,\mathrm{e}^{3x}+\mu\,\mathrm{e}^{-x}}$$

(b) $r^2-2r+1=(r-1)^2$, racine double 1.

$$\boxed{y(x)=(\lambda+\mu x)\,\mathrm{e}^{x}}$$

(c) $\Delta=-16$, racines $1\pm 2\mathrm{i}$.

$$\boxed{\text{réelles : } \mathrm{e}^{x}\big(\lambda\cos(2x)+\mu\sin(2x)\big) \qquad \text{complexes : } \lambda\,\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})x}+\mu\,\mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})x}}$$

(d) $4r^2+9=0$ a pour racines $\pm\frac{3}{2}\mathrm{i}$.

$$\boxed{\text{réelles : } \lambda\cos\frac{3x}{2}+\mu\sin\frac{3x}{2} \qquad \text{complexes : } \lambda\,\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x/2}+\mu\,\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x/2}}$$

(e) $\Delta=-3$, racines $-\frac{1}{2}\pm\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, c'est-à-dire j et j^2 (chapitre 4).

$$\boxed{\text{réelles : } \mathrm{e}^{-x/2}\Big(\lambda\cos\frac{\sqrt{3}\,x}{2}+\mu\sin\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\Big) \qquad \text{complexes : } \lambda\,\mathrm{e}^{jx}+\mu\,\mathrm{e}^{j^2x}}$$

(f) $r^2-4=(r-2)(r+2)$.

$$\boxed{y(x)=\lambda\,\mathrm{e}^{2x}+\mu\,\mathrm{e}^{-2x},\ \text{que l'on peut aussi écrire } \alpha\,\mathrm{ch}(2x)+\beta\,\mathrm{sh}(2x)}$$

EXERCICE 38 ⋆

Dans chaque cas, on donne les racines caractéristiques, une solution particulière obtenue par la proposition 10 ou par la méthode qui la suit, puis la solution générale, avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

(a) Racines 1 et 2 ; la constante $\frac{1}{2}$ est solution.

$$\boxed{y(x)=\lambda\,\mathrm{e}^{x}+\mu\,\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{2}}$$

(b) Racine double -2 ; 1 n'est pas racine et $P(1)=9$.

$$\boxed{y(x)=(\lambda+\mu x)\,\mathrm{e}^{-2x}+\frac{\mathrm{e}^{x}}{9}}$$

(c) Racines 1 et -1. Pour e^{2x}, $P(2)=3$; pour $-\mathrm{e}^{x}$, 1 est racine simple et $P'(1)=2$; on superpose.

$$\boxed{y(x)=\lambda\,\mathrm{e}^{x}+\mu\,\mathrm{e}^{-x}+\frac{\mathrm{e}^{2x}}{3}-\frac{x\,\mathrm{e}^{x}}{2}}$$

(d) Racines 1 et 3 ; 3 est racine simple, $P'(3)=2$.

$$\boxed{y(x)=\lambda\,\mathrm{e}^{x}+\mu\,\mathrm{e}^{3x}+\frac{3}{2}\,x\,\mathrm{e}^{3x}}$$

(e) Racines $-\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$. Pour $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, $P(\mathrm{i}) = -1 + \mathrm{i} + 1 = \mathrm{i}$, et $\mathrm{Re}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\mathrm{i}} = \sin x$.

$$\boxed{y(x) = \mathrm{e}^{-x/2}\Big(\lambda \cos\frac{\sqrt{3}\,x}{2} + \mu \sin\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\Big) + \sin x}$$

(f) Racines 1 et -2. On a $P(\mathrm{i}) = -3 + \mathrm{i}$, et $\mathrm{Re}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{-3+\mathrm{i}} = \mathrm{Re}\,\frac{(-3-\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{10}$.

$$\boxed{y(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{x} + \mu\,\mathrm{e}^{-2x} + \frac{\sin x - 3\cos x}{10}}$$

(g) Racine double -2 : pour e^{-2x}, la proposition 10 donne $\frac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}$; pour la constante 1, on trouve $\frac{1}{4}$.

$$\boxed{y(x) = \Big(\lambda + \mu x + \frac{x^2}{2}\Big)\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{4}}$$

(h) Racines ± 1, toutes deux simples, et $\mathrm{ch}\,x = \frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}$. Les solutions particulières de $y'' - y = \frac{\mathrm{e}^{x}}{2}$ et $y'' - y = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$ sont $\frac{x\,\mathrm{e}^{x}}{4}$ et $-\frac{x\,\mathrm{e}^{-x}}{4}$, puisque $P'(\pm 1) = \pm 2$; leur somme est $\frac{x}{2}\,\mathrm{sh}\,x$.

$$\boxed{y(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{x} + \mu\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{x}{2}\,\mathrm{sh}\,x}$$

(i) Racine double -1. Pour $\frac{\mathrm{e}^{x}}{2}$, $P(1) = 4$; pour $-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$, la racine est double, d'où $-\frac{x^2}{4}\,\mathrm{e}^{-x}$.

$$\boxed{y(x) = \Big(\lambda + \mu x - \frac{x^2}{4}\Big)\mathrm{e}^{-x} + \frac{\mathrm{e}^{x}}{8}}$$

(j) Racines 0 et -1 ; comme $b = 0$ et $a \neq 0$, on cherche un polynôme de degré 2, et l'identification donne $\frac{x^2}{2} - x$.

$$\boxed{y(x) = \lambda + \mu\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{x^2}{2} - x}$$

Piège : en (h) et en (i), on écrit souvent la solution particulière en remplaçant ch ou sh par lui-même, ce qui ne marche pas puisque e^{x} ou e^{-x} est solution de l'équation homogène ; il faut revenir aux exponentielles et traiter chaque terme selon sa propre position par rapport aux racines.

EXERCICE 39 ⋆⋆

Pour les seconds membres trigonométriques, on passe par l'exponentielle complexe ; pour les produits $Q\,\mathrm{e}^{\lambda x}$, la proposition 8 transforme l'équation en $Q'' + P'(\lambda)\,Q' + P(\lambda)\,Q =$ (polynôme). Les constantes λ et μ décrivent $\mathbb{R}$.

(a) Racine double 1. On écrit $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$. La constante $\frac{1}{2}$ convient pour le premier terme. Pour le second, $P(2\mathrm{i}) = (2\mathrm{i}-1)^2 = -3 - 4\mathrm{i}$, et

$$\mathrm{Re}\Big(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}{-3-4\mathrm{i}}\Big) = \mathrm{Re}\,\frac{(3-4\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}{50} = \frac{3\cos(2x) + 4\sin(2x)}{50}.$$

$$\boxed{y(x) = (\lambda + \mu x)\,\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{2} + \frac{3\cos(2x) + 4\sin(2x)}{50}}$$

(b) On a $P(1+\mathrm{i}) = 2\mathrm{i} + 1 + \mathrm{i} + 1 = 2 + 3\mathrm{i}$, et $\mathrm{Re}\,\frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}}{2+3\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{x}}{13}(2\cos x + 3\sin x)$.

$$\boxed{y(x) = \mathrm{e}^{-x/2}\Big(\lambda \cos\frac{\sqrt{3}\,x}{2} + \mu \sin\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\Big) + \frac{\mathrm{e}^{x}}{13}(2\cos x + 3\sin x)}$$

(c) Racines 1 et 2. On a $P(2+3\mathrm{i}) = -9+3\mathrm{i}$, et $\operatorname{Im}\frac{\mathrm{e}^{(2+3\mathrm{i})x}}{-9+3\mathrm{i}} = \operatorname{Im}\frac{(-9-3\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{(2+3\mathrm{i})x}}{90}$.

$$\boxed{y(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{x} + \mu\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{\mathrm{e}^{2x}}{30}\big(3\sin(3x) + \cos(3x)\big)}$$

(d) Racines $1 \pm 2\mathrm{i}$: le nombre $1+2\mathrm{i}$ est racine simple, avec $P'(1+2\mathrm{i}) = 4\mathrm{i}$. La proposition 10 donne la solution $\frac{4}{4\mathrm{i}}\,x\,\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})x} = -\mathrm{i}x\,\mathrm{e}^{x}\big(\cos(2x) + \mathrm{i}\sin(2x)\big)$, de partie réelle $x\,\mathrm{e}^{x}\sin(2x)$.

$$\boxed{y(x) = \mathrm{e}^{x}\big(\lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x)\big) + x\,\mathrm{e}^{x}\sin(2x)}$$

(e) On linéarise : $\cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos(3x)$. Le nombre i est racine simple, avec $P'(\mathrm{i}) = 2\mathrm{i}$: la partie réelle de $\frac{3}{4}\cdot\frac{x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$ est $\frac{3}{8}\,x\sin x$. Pour le second terme, $P(3\mathrm{i}) = -8$.

$$\boxed{y(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x + \frac{3}{8}\,x\sin x - \frac{\cos(3x)}{32}}$$

(f) Les racines sont 1 et 3, donc -1 n'est pas racine ; on a $P(-1) = 8$ et $P'(-1) = -6$. L'équation en Q est $Q'' - 6Q' + 8Q = 2x+1$, et Q est de degré 1 :

$$Q(x) = \frac{x}{4} + \frac{5}{16}.$$

$$\boxed{y(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{x} + \mu\,\mathrm{e}^{3x} + \Big(\frac{x}{4} + \frac{5}{16}\Big)\mathrm{e}^{-x}}$$

(g) Ici 1 est racine simple : $P(1) = 0$ et $P'(1) = -2$. L'équation en Q est $Q'' - 2Q' = 2x+1$; Q' doit être de degré 1, donc Q de degré 2, et l'on trouve $Q = -\frac{x^2}{2} - x$.

$$\boxed{y(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{x} + \mu\,\mathrm{e}^{3x} - \Big(\frac{x^2}{2} + x\Big)\mathrm{e}^{x}}$$

(h) Ici 1 est racine double : $P(1) = P'(1) = 0$, et l'équation en Q se réduit à $Q'' = x^2+1$. On primitive deux fois.

$$\boxed{y(x) = (\lambda + \mu x)\,\mathrm{e}^{x} + \Big(\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2}\Big)\mathrm{e}^{x}}$$

(i) Racines ± 1. On traite séparément les trois termes, par le principe de superposition (proposition 9) : $-x$ est solution pour le second membre x ; pour $2\mathrm{e}^{x}$, 1 est racine simple et $P'(1) = 2$, d'où $x\,\mathrm{e}^{x}$; pour $\cos x$, $P(\mathrm{i}) = -2$, d'où $-\frac{\cos x}{2}$.

$$\boxed{y(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{x} + \mu\,\mathrm{e}^{-x} - x + x\,\mathrm{e}^{x} - \frac{\cos x}{2}}$$

(j) Racines $\pm 2\mathrm{i}$. Pour $\cos(2x)$, $2\mathrm{i}$ est racine simple, $P'(2\mathrm{i}) = 4\mathrm{i}$, et $\operatorname{Re}\frac{x\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}{4\mathrm{i}} = \frac{x\sin(2x)}{4}$; pour $\sin x$, $P(\mathrm{i}) = 3$; pour e^{2x}, $P(2) = 8$.

$$\boxed{y(x) = \lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x) + \frac{x\sin(2x)}{4} + \frac{\sin x}{3} + \frac{\mathrm{e}^{2x}}{8}}$$

À retenir : dans (i) et (j), chaque terme du second membre se traite avec sa propre méthode, et un seul d'entre eux est en résonance. L'erreur la plus répandue est de chercher une solution particulière unique de la forme « $\alpha x + \beta\,\mathrm{e}^{x} + \gamma\cos x$ », qui échoue à cause du terme résonant.

EXERCICE 40 ⋆

D'après le théorème 6, chaque problème a une unique solution ; on la cherche parmi les solutions générales.

(a) La fonction $\frac{x+1}{9}$ est solution particulière, d'où $y = \frac{x+1}{9} + \lambda\cos(3x) + \mu\sin(3x)$. Les conditions donnent $\frac{1}{9} + \lambda = 0$ et $\frac{1}{9} + 3\mu = 0$.

$$\boxed{y(x) = \frac{x + 1 - \cos(3x)}{9} - \frac{\sin(3x)}{27}}$$

(b) La fonction $x + 2$ est solution particulière, d'où $y = x + 2 + (\lambda + \mu x)\,\mathrm{e}^x$. Les conditions donnent $2 + \lambda = 0$ et $1 + \lambda + \mu = 0$.

$$\boxed{y(x) = x + 2 + (x - 2)\,\mathrm{e}^x}$$

(c) La fonction $3x^2 - 6$ est solution particulière, d'où $y = 3x^2 - 6 + \lambda\cos x + \mu\sin x$. Les conditions donnent $\lambda - 6 = 1$ et $\mu = 2$.

$$\boxed{y(x) = 3x^2 - 6 + 7\cos x + 2\sin x}$$

EXERCICE 41 ⋆⋆

1. Le polynôme caractéristique se factorise : $P(r) = (r-1)(r-\alpha)$. Le nombre $1 + \alpha$ n'est jamais égal à α, et il est égal à 1 si et seulement si $\alpha = 0$. D'où trois cas, les constantes λ, μ décrivant $\mathbb{R}$.

- Si $\alpha \notin \{0, 1\}$, les racines 1 et α sont distinctes, et $P(1 + \alpha) = \alpha \neq 0$:

$$\boxed{y(x) = \lambda\,\mathrm{e}^x + \mu\,\mathrm{e}^{\alpha x} + \frac{\mathrm{e}^{(1+\alpha)x}}{\alpha}}$$

- Si $\alpha = 1$, la racine 1 est double, et $P(2) = 1$:

$$\boxed{y(x) = (\lambda + \mu x)\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}}$$

- Si $\alpha = 0$, le second membre est e^x, avec 1 racine simple et $P'(1) = 1$:

$$\boxed{y(x) = \lambda + \mu\,\mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x}$$

2. Les racines sont $\pm\mathrm{i}\omega$, et les solutions homogènes sont les $\lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x)$, toutes bornées. Si $\theta \neq \omega$, alors $\mathrm{i}\theta$ n'est pas racine et $P(\mathrm{i}\theta) = \omega^2 - \theta^2$:

$$\boxed{\theta \neq \omega : \quad y(x) = \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x) + \frac{\cos(\theta x)}{\omega^2 - \theta^2}}$$

Si $\theta = \omega$, alors $\mathrm{i}\omega$ est racine simple, $P'(\mathrm{i}\omega) = 2\mathrm{i}\omega$, et $\mathrm{Re}\,\frac{x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}}{2\mathrm{i}\omega} = \frac{x\sin(\omega x)}{2\omega}$:

$$\boxed{\theta = \omega : \quad y(x) = \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x) + \frac{x\sin(\omega x)}{2\omega}}$$

Dans ce second cas, aucune solution n'est bornée : aux points $x_k = \frac{(4k+1)\pi}{2\omega}$, la solution vaut $\mu + \frac{x_k}{2\omega}$, qui tend vers $+\infty$ avec k.

$$\boxed{\text{toutes les solutions sont bornées si et seulement si } \theta \neq \omega}$$

C'est la résonance du cours : une excitation à la pulsation propre de l'oscillateur produit des oscillations d'amplitude non bornée.

EXERCICE 42 ⋆⋆⋆

On utilise trois faits, tirés des croissances comparées du chapitre 5 : pour r réel, $x \mapsto \mathrm{e}^{rx}$ est bornée sur $[0\,,+\infty[$ si et seulement si $r \leqslant 0$; $x \mapsto x\,\mathrm{e}^{rx}$ l'est si et seulement si $r < 0$; et $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x)$, avec $\beta \neq 0$, l'est si et seulement si $\alpha \leqslant 0$, comme on le voit aux points $x = \frac{2k\pi}{\beta}$.

1. On note $\Delta = a^2 - 4b$, et l'on prend successivement chaque fonction de base, en annulant l'autre constante.

- Si $\Delta > 0$, les racines réelles r_1 et r_2 doivent être négatives ; comme $r_1 + r_2 = -a$ et $r_1 r_2 = b$, cela équivaut à $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$.
- Si $\Delta = 0$, la racine double $-\frac{a}{2}$ doit être strictement négative, à cause du terme $x\,\mathrm{e}^{r_0 x}$: $a > 0$.
- Si $\Delta < 0$, la partie réelle $-\frac{a}{2}$ des racines doit être négative : $a \geqslant 0$, et alors $b > \frac{a^2}{4} \geqslant 0$.

Les trois cas se résument en une seule condition, le point $(0,0)$ étant exclu par le deuxième cas, puisque $y'' = 0$ a pour solution $x \mapsto x$.

$$\boxed{a \geqslant 0, \quad b \geqslant 0, \quad (a,b) \neq (0,0)}$$

2. Une fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{rx}$, avec r réel, n'est bornée sur $\mathbb{R}$ que si $r = 0$. Si $\Delta > 0$, les deux racines distinctes ne peuvent être nulles toutes les deux ; si $\Delta = 0$, la fonction $x \mapsto x\,\mathrm{e}^{r_0 x}$ n'est jamais bornée sur $\mathbb{R}$; si $\Delta < 0$, il faut et il suffit que la partie réelle $-\frac{a}{2}$ soit nulle.

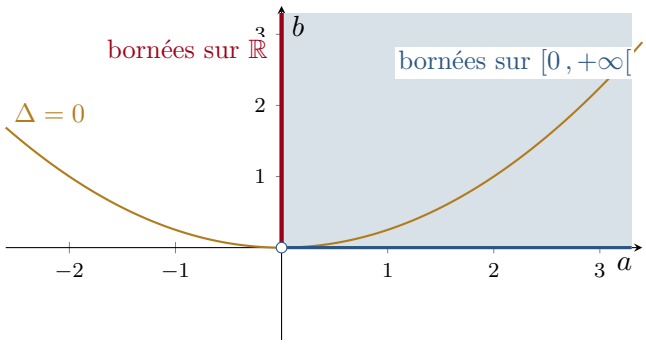
$$\boxed{a = 0 \text{ et } b > 0}$$

Les solutions sont alors les oscillations $\lambda\cos(\sqrt{b}\,x) + \mu\sin(\sqrt{b}\,x)$.

3. Si $a > 0$ et $b > 0$: lorsque $\Delta > 0$, les racines ont un produit positif et une somme négative, donc sont strictement négatives ; lorsque $\Delta = 0$, la racine double $-\frac{a}{2}$ est strictement négative, et $x\,\mathrm{e}^{r_0 x}$ tend vers 0 par croissances comparées ; lorsque $\Delta < 0$, on a $|y(x)| \leqslant (|\lambda| + |\mu|)\,\mathrm{e}^{-ax/2}$.

$$\boxed{\text{toute solution tend vers 0 en } +\infty}$$

Pour l'oscillateur amorti $y'' + 2\xi y' + y = 0$ du cours, on a $a = 2\xi > 0$ et $b = 1 > 0$: quel que soit le régime, pseudo-périodique, critique ou apériodique, le système revient à sa position d'équilibre.



Le quart de plan bleuté, bords compris mais origine exclue, rassemble les couples (a,b) pour lesquels toutes les solutions sont bornées sur $[0\,,+\infty[$; seule la demi-droite $a = 0$, $b > 0$, en carmin, donne des solutions bornées sur $\mathbb{R}$. La parabole $b = \frac{a^2}{4}$ sépare les régimes oscillant, au-dessus, et non oscillant, au-dessous.

EXERCICE 43 ⋆⋆⋆

1. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^t$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0\,,+\infty[$, de réciproque ln ; ainsi y est deux fois dérivable sur $]0\,,+\infty[$ si et seulement si $z = y \circ \exp$ l'est sur $\mathbb{R}$. En dérivant la composée :

$$z'(t) = \mathrm{e}^t\, y'(\mathrm{e}^t), \qquad z''(t) = \mathrm{e}^t\, y'(\mathrm{e}^t) + \mathrm{e}^{2t}\, y''(\mathrm{e}^t).$$

Avec $x = \mathrm{e}^t$, on obtient $x\, y'(x) = z'(t)$ et $x^2 y''(x) = z''(t) - z'(t)$, d'où

$$x^2 y''(x) - 3x\, y'(x) + 4y(x) = z''(t) - 4z'(t) + 4z(t).$$

Comme x décrit $]0\,,+\infty[$ quand t décrit $\mathbb{R}$, y est solution de (E_1) si et seulement si $z'' - 4z' + 4z = 0$. Cette équation a la racine double 2 : $z(t) = (\lambda + \mu t)\,\mathrm{e}^{2t}$, et l'on revient à $y(x) = z(\ln x)$.

$$\boxed{y(x) = (\lambda + \mu \ln x)\, x^2, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}$$

2. Le même calcul transforme l'équation en $z'' - z' + 3z' + z = (\mathrm{e}^t + 1)^2$, soit

$$z'' + 2z' + z = \mathrm{e}^{2t} + 2\mathrm{e}^t + 1.$$

La racine caractéristique est -1, double ; on superpose les solutions particulières $\frac{\mathrm{e}^{2t}}{9}$, $\frac{2\mathrm{e}^t}{4}$ et 1, puis l'on revient à x.

$$\boxed{y(x) = \frac{\lambda + \mu \ln x}{x} + \frac{x^2}{9} + \frac{x}{2} + 1, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}$$

3. La fonction sin est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}[$ sur $]-1\,,1[$, de réciproque Arcsin, dérivable (chapitre 5). Avec $z(t) = y(\sin t)$, on a

$$z'(t) = \cos t\; y'(\sin t), \qquad z''(t) = -\sin t\; y'(\sin t) + \cos^2 t\; y''(\sin t),$$

et, avec $x = \sin t$, $(1-x^2)\, y'' - x\, y' + y = z'' + z$. Donc y est solution si et seulement si $z = \lambda \cos t + \mu \sin t$, et $\cos t = \sqrt{1 - x^2}$ puisque $\cos t > 0$.

$$\boxed{y(x) = \lambda\sqrt{1 - x^2} + \mu x, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}$$

EXERCICE 44 ⋆⋆⋆

(a) On a $u' = 2x\, y' + (1+x^2)\, y''$: l'équation s'écrit $u' = 0$, donc u est une constante C, et $y' = \frac{C}{1+x^2}$.

$$\boxed{y(x) = C \operatorname{Arctan} x + D, \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2}$$

(b) On a $z' = y'' + y'$, et l'on regroupe les termes de l'équation :

$$(1 + \mathrm{e}^x)\, y'' + y' - \mathrm{e}^x y = (1 + \mathrm{e}^x)(y'' + y') - \mathrm{e}^x (y' + y) = (1 + \mathrm{e}^x)\, z' - \mathrm{e}^x z.$$

L'équation équivaut donc à $z' = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\, z$, d'où $z = C(1 + \mathrm{e}^x)$. Il reste à résoudre $y' + y = C + C\,\mathrm{e}^x$, dont une solution particulière est $C + \frac{C}{2}\mathrm{e}^x$.

$$\boxed{y(x) = C\Big(1 + \frac{\mathrm{e}^x}{2}\Big) + D\,\mathrm{e}^{-x}, \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2}$$

(c) On écrit $y = z\,\mathrm{e}^{-x^2}$; alors $y' = (z' - 2xz)\,\mathrm{e}^{-x^2}$ et $y'' = \big(z'' - 4xz' + (4x^2 - 2)\, z\big)\,\mathrm{e}^{-x^2}$. En reportant, les termes en z' et en $x^2 z$ se compensent :

$$y'' + 4x\, y' + (3 + 4x^2)\, y = (z'' + z)\,\mathrm{e}^{-x^2}.$$

$$\boxed{y(x) = \mathrm{e}^{-x^2}(\lambda \cos x + \mu \sin x), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}$$

(d) On a $z' = y + x\, y'$ et $z'' = 2y' + x\, y''$; l'équation s'écrit $(x\, y'' + 2y') + 2(x\, y' + y) + x\, y = z'' + 2z' + z = 0$. La racine -1 est double, donc $z = (\lambda + \mu x)\,\mathrm{e}^{-x}$.

$$\boxed{y(x) = \Big(\frac{\lambda}{x} + \mu\Big)\mathrm{e}^{-x}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}$$

EXERCICE 45 ⋆⋆⋆

1. En dérivant $y = \lambda\cos x + \mu\sin x$ et en utilisant l'hypothèse $\lambda'\cos x + \mu'\sin x = 0$:

$$y' = \underbrace{\lambda'\cos x + \mu'\sin x}_{=0} - \lambda\sin x + \mu\cos x = -\lambda\sin x + \mu\cos x.$$

On dérive encore, ce qui suppose λ et μ dérivables : $y'' = -\lambda'\sin x + \mu'\cos x - \lambda\cos x - \mu\sin x$, d'où $y'' + y = -\lambda'\sin x + \mu'\cos x$.

$$\boxed{y \text{ est solution de } (E) \iff -\lambda'\sin x + \mu'\cos x = \frac{1}{\cos x}}$$

2. On multiplie la première équation par $\cos x$ et la seconde par $-\sin x$, puis on ajoute ; et de même avec $\sin x$ et $\cos x$. Comme $\cos^2 + \sin^2 = 1$, on obtient

$$\lambda' = -\frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \mu' = 1, \qquad \text{d'où} \qquad \lambda = \ln(\cos x), \quad \mu = x.$$

$$\boxed{y_p(x) = \cos x\,\ln(\cos x) + x\sin x}$$

3. D'après la proposition 9, les solutions de (E) sur I sont :

$$\boxed{y(x) = \cos x\,\ln(\cos x) + x\sin x + A\cos x + B\sin x, \quad (A,B)\in\mathbb{R}^2}$$

Pour le second membre $\tan x$, le même système donne $\lambda' = -\sin x\tan x = \cos x - \frac{1}{\cos x}$ et $\mu' = \sin x$. Une primitive de $\frac{1}{\cos x}$ sur I s'obtient par la règle de Bioche de l'exercice 22, avec $u = \sin x$: c'est $\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$. Ainsi $\lambda = \sin x - \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$ et $\mu = -\cos x$, et les termes $\sin x\cos x$ se compensent dans $\lambda\cos x + \mu\sin x$.

$$\boxed{y(x) = -\frac{\cos x}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + A\cos x + B\sin x, \quad (A,B)\in\mathbb{R}^2}$$

À retenir : la condition $\lambda'\cos x + \mu'\sin x = 0$ est un choix, qui rend y' aussi simple que si λ et μ étaient constantes ; elle transforme une équation en deux inconnues en un système, et la méthode s'applique à tout second membre continu, là où la proposition 10 ne traite que les exponentielles.

EXERCICE 46 ⋆⋆⋆

1. La première relation donne $y' = y + z$, qui est dérivable : y est deux fois dérivable, et

$$y'' = y' + z' = y' + 3y - z = y' + 3y - (y' - y) = 4y.$$

D'où $y = \lambda\,\mathrm{e}^{2x} + \mu\,\mathrm{e}^{-2x}$, puis $z = y' - y = \lambda\,\mathrm{e}^{2x} - 3\mu\,\mathrm{e}^{-2x}$. Réciproquement, on vérifie que

$$z' + z = 3\lambda\,\mathrm{e}^{2x} + 3\mu\,\mathrm{e}^{-2x} = 3y.$$

$$\boxed{(y,z) = (\lambda\,\mathrm{e}^{2x} + \mu\,\mathrm{e}^{-2x},\ \lambda\,\mathrm{e}^{2x} - 3\mu\,\mathrm{e}^{-2x}), \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2}$$

2. En dérivant $u = x' + \mathrm{i}y'$:

$$u' = x'' + \mathrm{i}y'' = \omega y' - \mathrm{i}\omega x' = -\mathrm{i}\omega(x' + \mathrm{i}y') = -\mathrm{i}\omega u.$$

D'après le théorème 2, $u(t) = u_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$, avec $u_0 = x'(0) + \mathrm{i}y'(0)$. En primitivant, avec $w = x + \mathrm{i}y$ et $w_0 = w(0)$:

$$w(t) = w_0 + \frac{u_0}{-\mathrm{i}\omega}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} - 1) = c + \frac{\mathrm{i}u_0}{\omega}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \qquad c = w_0 - \frac{\mathrm{i}u_0}{\omega}.$$

Enfin $z'' = 0$ donne $z(t) = z(0) + z'(0)\,t$.

$$\boxed{x(t) + \mathrm{i}y(t) = c + \frac{\mathrm{i}u_0}{\omega}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \qquad z(t) = z(0) + z'(0)\,t}$$

Si $u_0 \neq 0$, le point (x,y) parcourt à vitesse angulaire constante ω le cercle de centre c et de rayon $\frac{|u_0|}{\omega}$, pendant que z varie linéairement : la trajectoire est une hélice d'axe vertical, de pas $\frac{2\pi z'(0)}{\omega}$, et un cercle si $z'(0) = 0$. Si $u_0 = 0$, la particule se déplace en ligne droite le long du champ.

EXERCICE 47 ⋆⋆⋆

1. Soit f une solution, trois fois dérivable. La fonction $g = f + f' + f''$ vérifie

$$g' = f' + f'' + f''' = f' + f'' + f = g,$$

donc $g = C\,\mathrm{e}^x$, avec $C \in \mathbb{C}$. Ainsi f est solution de $f'' + f' + f = C\,\mathrm{e}^x$, dont les racines caractéristiques sont j et $j^2 = \overline{j}$, et une solution particulière est $\frac{C}{3}\,\mathrm{e}^x$, puisque $P(1) = 3$. Réciproquement, $x \mapsto \mathrm{e}^{rx}$ est solution dès que $r^3 = 1$, et c'est le cas pour 1, j et j^2.

$$\boxed{f(x) = \alpha\,\mathrm{e}^x + \beta\,\mathrm{e}^{jx} + \gamma\,\mathrm{e}^{j^2 x}, \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3}$$

On retrouve les trois racines cubiques de l'unité : l'équation caractéristique d'une équation d'ordre 3 est de degré 3.

2. Posons $\varphi(t) = f'(t)\sin(t-x) - f(t)\cos(t-x)$. En dérivant, les termes en $f'(t)\cos(t-x)$ se compensent :

$$\varphi'(t) = f''(t)\sin(t-x) + f(t)\sin(t-x) = (f''(t) + f(t))\sin(t-x).$$

Sur $[x\,, x+\pi]$, on a $\sin(t-x) \geqslant 0$, donc $\varphi' \geqslant 0$ et $\varphi(x+\pi) \geqslant \varphi(x)$. Or $\varphi(x) = -f(x)$ et $\varphi(x+\pi) = -f(x+\pi)\cos\pi = f(x+\pi)$.

$$\boxed{f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0 \text{ pour tout réel } x}$$

Par exemple, pour $f = \sin$, on a $f'' + f = 0$ et $\sin x + \sin(x+\pi) = 0$: l'inégalité est une égalité.

Exercices de synthèse

EXERCICE 48 ⋆⋆

1. **Vraie**. C'est le théorème 1 du cours, appliqué à l'intervalle $\mathbb{R}$.
2. **Fausse**. L'ensemble $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle : la fonction égale à $\ln|x|$ sur $]-\infty\,, 0[$ et à $\ln x + 1$ sur $]0\,, +\infty[$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$, et sa différence avec $\ln|\cdot|$ n'est pas constante (exercice 3).
3. **Vraie**. C'est l'exercice 5, question 1 : la primitive nulle en a est croissante, nulle en a et en b, donc nulle, et sa dérivée f aussi.
4. **Fausse**. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ n'est pas continue sur $[-1\,, 1]$: l'intégrale n'est pas définie, et le calcul formel donne un nombre négatif pour une fonction positive (exercice 3).
5. **Vraie**. La fonction $|\sin|$ est π-périodique, d'où $\int_0^{2\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = 2 \times 2 = 4$.
6. **Fausse**. Si G est une primitive de $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$, la fonction vaut $G(x^2) - G(0)$, de dérivée $2x\,\mathrm{e}^{-x^4}$ (exercice 4).
7. **Vraie**. Les solutions sont les $\lambda\,\mathrm{e}^{-x}$, et $\lambda\,\mathrm{e}^{-x_0} = 0$ impose $\lambda = 0$ (remarque du cours après le théorème 2).
8. **Vraie**. La fonction sin est solution, non nulle, et s'annule en 0 et en π : un problème avec deux conditions en deux points distincts n'est pas un problème de Cauchy, et l'unicité n'a pas à s'appliquer.
9. **Fausse**. La solution particulière $x \mapsto \frac{x\sin x}{2}$ n'est pas bornée, et les solutions homogènes le sont : aucune solution n'est bornée (exercice 41).
10. **Vraie**. C'est le principe de superposition (proposition 7).

EXERCICE 49 ⋆⋆

1. On intègre l'encadrement $\alpha \leqslant f \leqslant \beta$ sur $[0\,,1]$, segment de longueur 1 : la croissance de l'intégrale (proposition 2 (iii)) donne $\alpha \leqslant \int_0^1 f \leqslant \beta$, c'est-à-dire

$$\boxed{\alpha \leqslant 0 \leqslant \beta}.$$

Pour tout $x \in [0\,,1]$, les deux facteurs $\beta - f(x)$ et $f(x) - \alpha$ sont positifs, donc leur produit aussi. En développant, on obtient une fonction continue et positive :

$$(\beta - f)(f - \alpha) = (\alpha + \beta)\, f - f^2 - \alpha\beta \geqslant 0.$$

Son intégrale est donc positive ; comme $\int_0^1 f = 0$, elle vaut $-\int_0^1 f^2 - \alpha\beta$, d'où

$$\boxed{\int_0^1 f^2 \leqslant -\alpha\beta}.$$

L'hypothèse $\int_0^1 f = 0$ sert exactement à faire disparaître le terme $(\alpha + \beta)\, f$, sur lequel on n'aurait aucun contrôle.

2. Les trois expressions se raccordent : en $\frac{1}{2} - h$, la formule du milieu vaut $\frac{1}{h} \cdot h = 1$, et en $\frac{1}{2} + h$, elle vaut -1 ; la fonction f_h est donc continue. Sur le segment du milieu, $\left|\frac{1}{2} - x\right| \leqslant h$, donc f_h est à valeurs dans $[-1\,,1]$. Les deux paliers, de même longueur $\frac{1}{2} - h$, ont des intégrales opposées, et il reste

$$\int_0^1 f_h = \frac{1}{h}\Big[-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2} - x\Big)^2\Big]_{1/2-h}^{1/2+h} = \frac{1}{h}\Big(-\frac{h^2}{2} + \frac{h^2}{2}\Big) = 0.$$

Pour le carré, les deux paliers donnent chacun $\frac{1}{2} - h$, et le segment du milieu

$$\frac{1}{h^2}\Big[-\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2} - x\Big)^3\Big]_{1/2-h}^{1/2+h} = \frac{1}{h^2}\Big(\frac{h^3}{3} + \frac{h^3}{3}\Big) = \frac{2h}{3}.$$

$$\boxed{\int_0^1 f_h^2 = 1 - 2h + \frac{2h}{3} = 1 - \frac{4h}{3}}$$

Supposons qu'un réel $c < 1$ vérifie $\int_0^1 f^2 \leqslant c$ pour toute fonction f satisfaisant les hypothèses avec $\alpha = -1$ et $\beta = 1$. Le choix $h = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{3(1-c)}{8}\right)$ donne $\frac{4h}{3} \leqslant \frac{1-c}{2}$, donc

$$\int_0^1 f_h^2 \geqslant 1 - \frac{1-c}{2} = \frac{1+c}{2} > c,$$

ce qui est contradictoire.

$$\boxed{\text{non : la constante } -\alpha\beta = 1 \text{ ne peut pas être diminuée}}$$

La borne n'est pourtant jamais atteinte : l'égalité imposerait, d'après l'exercice 5, que $(1 - f)(f + 1)$ soit nulle, donc que f ne prenne que les valeurs 1 et -1 ; le théorème des valeurs intermédiaires du chapitre 8 montrera qu'une fonction continue sur un segment ne peut pas sauter ainsi d'une valeur à l'autre, et f serait constante, ce qui est incompatible avec $\int_0^1 f = 0$. Les fonctions f_h approchent cette situation idéale en passant de 1 à -1 de plus en plus vite.

3. La fonction $f = g - m$ est continue, d'intégrale $m - m = 0$, et vérifie $-m \leqslant f \leqslant 1 - m$, puisque $0 \leqslant g \leqslant 1$. La question 1, avec $\alpha = -m$ et $\beta = 1 - m$, donne $\int_0^1 (g - m)^2 \leqslant m(1 - m)$, et la forme canonique $m(1 - m) = \frac{1}{4} - \left(m - \frac{1}{2}\right)^2$ donne la seconde inégalité.

$$\boxed{\int_0^1 (g - m)^2 \leqslant m(1 - m) \leqslant \frac{1}{4}}$$

L'intégrale $\int_0^1 (g-m)^2$ mesure la dispersion des valeurs de g autour de leur moyenne m : pour une fonction à valeurs dans $[0\,,1]$, elle ne dépasse jamais $\frac{1}{4}$, et elle n'approche cette valeur que si m est proche de $\frac{1}{2}$ et si g passe presque tout son temps près de 0 et de 1, comme à la question 2. Le chapitre 21 retrouvera la même borne pour la variance d'une variable aléatoire à valeurs dans $[0\,,1]$.
À retenir : pour exploiter un encadrement $\alpha \leqslant f \leqslant \beta$, on intègre le produit $(\beta - f)(f - \alpha)$, positif, qui fait apparaître f^2 ; c'est l'inégalité ponctuelle, et non une majoration grossière de f^2 par $\max(\alpha^2, \beta^2)$, qui donne la constante optimale.

EXERCICE 50 ⋆⋆⋆

Dans les trois cas, le second membre est une intégrale dont la borne dépend de x : comme f est continue, il est dérivable (proposition 2), donc f l'est aussi. On en tire une équation différentielle et une condition initiale, puis l'on vérifie la réciproque.

(a) En dérivant, $f'(x) = x\,f(x)$, et $f(0) = 1$. Le théorème 2 donne $f(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{x^2/2}$, et $\lambda = 1$. Réciproquement, $1 + \int_0^x t\,\mathrm{e}^{t^2/2}\,\mathrm{d}t = 1 + \mathrm{e}^{x^2/2} - 1 = \mathrm{e}^{x^2/2}$.

$$\boxed{f(x) = \mathrm{e}^{x^2/2}}$$

(b) En dérivant, $f' = \cos x + f$, et $f(0) = 0$. Réciproquement, une fonction vérifiant ces deux conditions satisfait $f(x) = f(0) + \int_0^x f' = \sin x + \int_0^x f$: l'équation intégrale équivaut au problème de Cauchy. On cherche une solution particulière $\alpha\cos x + \beta \sin x$ de $y' - y = \cos x$, ce qui donne $\beta - \alpha = 1$ et $\alpha + \beta = 0$, puis on ajuste la constante.

$$\boxed{f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \sin x - \cos x}{2}}$$

(c) Le second membre est dérivable, de dérivée $-f(\pi - x)$: ainsi $f'(x) = -f(\pi - x)$, ce qui montre que f' est dérivable, et

$$f''(x) = f'(\pi - x) = -f(\pi - (\pi - x)) = -f(x).$$

D'après le théorème 5, $f = \lambda\cos + \mu\sin$. On réinjecte dans $f'(x) = -f(\pi - x)$: le premier membre vaut $-\lambda\sin x + \mu\cos x$, le second $\lambda\cos x - \mu\sin x$, d'où $\mu = \lambda$. Enfin, l'équation en $x = \pi$ donne $f(\pi) + 1 = 0$, soit $-\lambda + 1 = 0$. Réciproquement, les deux membres de l'équation ont alors la même dérivée et la même valeur en π, donc sont égaux.

$$\boxed{f(x) = \cos x + \sin x}$$

On le vérifie : $\int_0^{\pi - x} (\cos t + \sin t)\,\mathrm{d}t = \big[\sin t - \cos t\big]_0^{\pi - x} = \sin x + \cos x + 1$. ✓
Piège : en (c), l'équation $f'' + f = 0$ n'est qu'une conséquence ; sans les deux réinjections, on trouverait une famille à deux paramètres, alors qu'une seule fonction convient.

EXERCICE 51 ⋆⋆⋆

1. Avec $x = y = 0$, la relation donne $f(0) = 2f(0)$, donc $\boxed{f(0) = 0}$. Fixons y et dérivons les deux membres par rapport à x ; la fonction $x \mapsto f(x + y)$ a pour dérivée $x \mapsto f'(x + y)$, et le terme $f(y)$ est constant :

$$f'(x + y) = f'(x) \quad \text{pour tous réels } x, y, \qquad \text{donc} \qquad f'(y) = f'(0) \text{ en prenant } x = 0.$$

Avec $a = f'(0)$, la fonction $x \mapsto f(x) - ax$ a une dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$: elle est constante (théorème 1 du chapitre 5), égale à sa valeur $f(0) = 0$ en 0.

$$\boxed{f(x) = ax, \quad a = f'(0)}$$

Réciproquement, $a(x + y) = ax + ay$: ces fonctions conviennent.

2.(a) Fixons x. Les deux membres de $f(x+y) = f(x) + f(y)$ sont des fonctions continues de y, que l'on intègre entre 0 et 1. À gauche, le changement de variable $t = x + y$ (proposition 5) donne

$$\int_0^1 f(x+y)\,\mathrm{d}y = \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x+1) - F(x),$$

et à droite, $f(x)$ ne dépend pas de y, d'où $f(x) + \int_0^1 f$.

$$\boxed{f(x) = F(x+1) - F(x) - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t}$$

(b) La primitive F est dérivable, donc le second membre l'est : f est dérivable, et la relation, appliquée avec $y = 1$, donne

$$f'(x) = f(x+1) - f(x) = f(1).$$

La question 1 s'applique alors.

$$\boxed{f(x) = f(1)\,x \text{ pour tout réel } x}$$

L'intégration a *régularisé* la fonction : partant d'une fonction seulement continue, on l'a écrite à l'aide de sa primitive, qui est dérivable. Cauchy avait résolu ce problème pour les fonctions continues dans son *Cours d'analyse* de 1821, par une autre méthode, qui passe par les valeurs rationnelles et que le chapitre 7 permettra de reprendre ; sans hypothèse de continuité, Hamel a montré en 1905 qu'il existe d'autres solutions, dont la construction utilise l'axiome du choix.

3. Si g s'annulait en un réel x_0, on aurait, pour tout réel x,

$$g(x) = g\big(x_0 + (x - x_0)\big) = g(x_0)\,g(x - x_0) = 0,$$

ce qui est exclu. Pour tout réel x, on a ensuite $g(x) = g\big(\frac{x}{2}\big)^2$, en appliquant la relation à $\frac{x}{2}$ et $\frac{x}{2}$: c'est le carré d'un réel non nul.

$$\boxed{g(x) > 0 \text{ pour tout réel } x}$$

La fonction $k = \ln \circ g$ est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$, et elle vérifie, pour tous réels x, y,

$$k(x+y) = \ln\big(g(x)\,g(y)\big) = k(x) + k(y).$$

D'après la question 2, $k(x) = ax$ avec $a = k(1)$, et l'on compose par exp.

$$\boxed{g(x) = \mathrm{e}^{ax}, \quad a = \ln g(1)}$$

Réciproquement, $\mathrm{e}^{a(x+y)} = \mathrm{e}^{ax}\mathrm{e}^{ay}$. La fonction nulle, exclue par l'énoncé, est la seule autre solution continue.

4. La fonction $k : t \mapsto h(\mathrm{e}^t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et $k(s+t) = h(\mathrm{e}^s\mathrm{e}^t) = k(s)+k(t)$. D'après la question 2, $k(t) = at$ avec $a = k(1) = h(\mathrm{e})$, et, pour tout $x > 0$, $h(x) = k(\ln x) = a \ln x$. Réciproquement, $a\ln(xy) = a\ln x + a\ln y$.

$$\boxed{h = a\ln, \quad a \in \mathbb{R}}$$

Piège : à la question 2, on ne peut pas dériver la relation comme à la question 1, puisque f n'est pas supposée dérivable ; c'est tout l'intérêt de l'intégration, qui prouve d'abord la dérivabilité.
À retenir : les fonctions $x \mapsto ax$, exp et ln sont caractérisées, parmi les fonctions continues, par la manière dont elles transforment sommes et produits ; le chapitre 11 dira que ce sont des morphismes de groupes, de $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même, de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(]0\,, +\infty[, \times)$ et de $(]0\,, +\infty[, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.

EXERCICE 52 ⋆⋆⋆

1. Pour $m \neq 0$, la fonction $\theta \mapsto \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}}{\mathrm{i}m}$ est une primitive de $\theta \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}$ (tableau des primitives usuelles, avec $\lambda = \mathrm{i}m \in \mathbb{C}^*$), et elle prend la même valeur en 0 et en 2π, puisque $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}m\pi} = 1$. Pour $m = 0$, on intègre la constante 1.

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi \text{ si } m = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0 \text{ si } m \neq 0}$$

2. On développe, pour tout réel θ :

$$P(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta} = \sum_{j=0}^{n} a_j r^j\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(j-k)\theta}.$$

Par linéarité (proposition 2 (ii)) et d'après la question 1, seul le terme d'indice $j = k$ a une intégrale non nulle, égale à $2\pi\,a_k r^k$.

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}\,\mathrm{d}\theta = a_k r^k}$$

Pour $k = 0$, l'égalité s'écrit $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta = a_0 = P(0)$: la valeur de P au centre d'un cercle est la moyenne de ses valeurs sur ce cercle, quel que soit le rayon. Par exemple, pour $P(z) = z^2$, les valeurs $r^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$ décrivent deux fois un cercle centré en 0, et leur moyenne est bien $0 = P(0)$.

3. Pour θ réel, le conjugué de $P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ est $\sum_{l=0}^{n} \overline{a_l}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\theta}$, puisque $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$. Le module au carré est donc une somme double :

$$\left|P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|^2 = P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\overline{P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} a_k\overline{a_l}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-l)\theta}.$$

D'après la question 1, seuls les termes tels que $k = l$ ont une intégrale non nulle, et celle du terme d'indice (k,k) vaut $2\pi\,|a_k|^2$.

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|^2\,\mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2}$$

4. La fonction $\theta \mapsto |P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^2$ est réelle, continue, et majorée par M^2 ; par croissance de l'intégrale, la question 3 donne $\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 \leqslant M^2$, et chaque terme de cette somme de réels positifs est inférieur à la somme.

$$\boxed{|a_k| \leqslant M \text{ pour tout } k \in [\![0\,;n]\!]}$$

Supposons maintenant $n \geqslant 1$ et $a_n = 1$, et raisonnons par l'absurde : si $|P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^2 < 1 + |a_0|^2$ pour tout réel θ, la fonction $\theta \mapsto 1 + |a_0|^2 - |P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^2$ est continue, positive et non nulle sur $[0\,,2\pi]$, et son intégrale est strictement positive (exercice 5). La question 3 donnerait alors

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 < 1 + |a_0|^2,$$

alors que cette somme contient les deux termes distincts $|a_0|^2$ et $|a_n|^2 = 1$.

$$\boxed{\text{il existe } \theta \in \mathbb{R} \text{ tel que } \left|P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|^2 \geqslant 1 + |a_0|^2}$$

Ainsi, une fonction polynomiale de coefficient dominant 1 ne peut pas être uniformément petite sur le cercle unité : son module y atteint au moins 1. L'exemple $P(z) = z^n$, de module constant égal à 1 sur le cercle, montre que cette borne est la meilleure possible. Sur le segment $[-1\,,1]$, la situation est différente : $x \mapsto x^2 - \frac{1}{2}$ y est majorée par $\frac{1}{2}$ en valeur absolue.

5. La formule du binôme du chapitre 3 donne $(1+z)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k$, donc $a_k = \binom{n}{k}$. Par la technique de l'angle moitié du chapitre 4,

$$1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}) = 2\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}, \qquad \text{donc} \qquad \left|P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|^2 = 4^n \cos^{2n}\frac{\theta}{2}.$$

La question 3, puis le changement de variable $\theta = 2u$, donnent

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \frac{4^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{4^n}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^{2n} u\,\mathrm{d}u.$$

Sur $\left[\frac{\pi}{2}\,,\pi\right]$, le changement de variable $u = \pi - v$ et l'égalité $\cos^{2n}(\pi - v) = \cos^{2n} v$ montrent que la seconde moitié de l'intégrale est égale à la première ; d'après l'exercice 23, question 1, on a donc $\int_0^{\pi} \cos^{2n} u\,\mathrm{d}u = 2W_{2n}$. La formule de W_{2n} (exercice 23, question 4) donne enfin

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \frac{2\cdot 4^n}{\pi} W_{2n} = \frac{2\cdot 4^n}{\pi}\cdot\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}}$$

Pour $n = 2$, on vérifie que $1 + 4 + 1 = 6 = \binom{4}{2}$. ✓ Cette identité de dénombrement, que la formule de Vandermonde de la feuille du chapitre 3 établit en comptant des parties, sort ici d'un calcul d'intégrales où le nombre π apparaît puis disparaît.

À retenir : la question 1 dit que les fonctions $\theta \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}$ se comportent, pour l'intégrale sur une période, comme une famille de vecteurs deux à deux orthogonaux ; les questions 2 et 3 en sont les conséquences, comme le calcul des coordonnées et du carré de la norme d'un vecteur dans une base orthonormée. Le chapitre 19, consacré aux espaces préhilbertiens, donnera un sens précis à cette analogie.

EXERCICE 53 ⋆⋆⋆

1. Les fonctions y_1, y_2, y_1' et y_2' sont dérivables, et y_2 ne s'annule pas sur $[a\,,b]$; par les règles de dérivation des sommes, produits et quotients du chapitre 5, la fonction

$$\varphi = y_1 y_1' - \frac{y_1^2\, y_2'}{y_2}$$

est dérivable sur $[a\,,b]$. On dérive chaque terme :

$$\varphi' = y_1'^2 + y_1 y_1'' - \frac{2y_1 y_1' y_2'}{y_2} - \frac{y_1^2\, y_2''}{y_2} + \frac{y_1^2\, y_2'^2}{y_2^2}.$$

On remplace y_1'' par $-q_1 y_1$ et y_2'' par $-q_2 y_2$; les termes restants forment le carré $\left(y_1' - \frac{y_1 y_2'}{y_2}\right)^2$.

$$\boxed{\varphi' = (q_2 - q_1)\, y_1^2 + \left(y_1' - \frac{y_1 y_2'}{y_2}\right)^2}$$

2. Les deux termes de φ' sont positifs, puisque $q_2 - q_1 > 0$: la fonction φ est croissante sur le segment $[a\,,b]$ (théorème 1 du chapitre 5). Elle contient le facteur y_1, donc $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, et pour tout $x \in [a\,,b]$, $0 = \varphi(a) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi(b) = 0$. Ainsi φ est nulle sur $[a\,,b]$, et sa dérivée aussi. Une somme de deux réels positifs n'est nulle que si chacun l'est : $(q_2 - q_1)\, y_1^2 = 0$ sur $[a\,,b]$, et comme $q_2 - q_1$ ne s'annule pas, y_1 est nulle sur $[a\,,b]$, contrairement à l'hypothèse.

$$\boxed{y_2 \text{ s'annule en au moins un point de } [a\,,b]}$$

Le raisonnement est celui de l'exercice 5 : une fonction croissante qui prend la même valeur aux deux extrémités d'un segment y est constante.

3.(a) Soit $[c\,,c+\frac{\pi}{\omega}]$ un segment de longueur $\frac{\pi}{\omega}$. La fonction $y_1 : x \mapsto \sin\big(\omega(x-c)\big)$ est solution de $y''+\omega^2 y=0$, et l'on a $q_1=\omega^2<q$; elle s'annule en c et en $c+\frac{\pi}{\omega}$, et vaut 1 au milieu de ce segment. La question 2, avec $q_2=q$ et $y_2=y$, donne :

$$\boxed{y \text{ s'annule sur tout segment de longueur } \frac{\pi}{\omega}}$$

(b) La fonction y_2 proposée est solution de $y''+\omega^2 y=0$, et $q<\omega^2$; on applique la question 2 avec $y_1=y$, $q_1=q$ et $q_2=\omega^2$. Si l'on avait $b-a<\frac{\pi}{\omega}$, on aurait, pour tout $x\in[a\,,b]$,

$$\Big|\omega\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)\Big| \leqslant \frac{\omega(b-a)}{2} < \frac{\pi}{2},$$

donc $y_2(x)>0$: la fonction y_2 ne s'annulerait pas sur $[a\,,b]$, ce que la question 2 interdit.

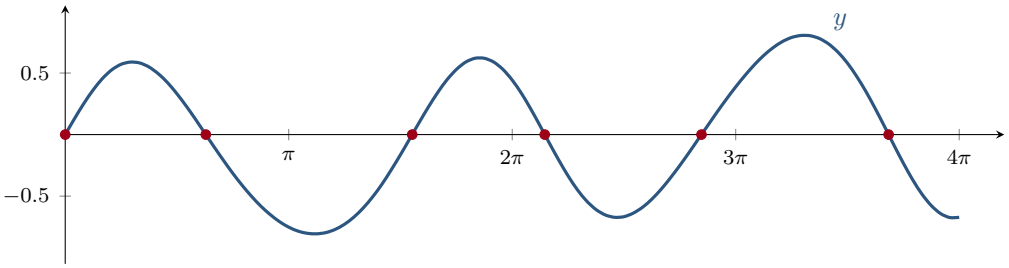
$$\boxed{b-a \geqslant \frac{\pi}{\omega}}$$

4. Ici $q(x)=2+\cos x$ vérifie $1\leqslant q(x)\leqslant 3$ pour tout réel x. Soit un segment de longueur $L>\pi$; avec $\omega=\frac{\pi}{L}<1$, on a $q(x)\geqslant 1>\omega^2$, et la question 3 (a) montre que y s'annule sur ce segment.

$$\boxed{y \text{ s'annule sur tout segment de longueur strictement supérieure à } \pi}$$

Soit ensuite $a<b$ comme dans l'énoncé, et supposons $b-a<\frac{\pi}{\sqrt{3}}$, c'est-à-dire $\frac{\pi}{b-a}>\sqrt{3}$. On choisit un réel ω tel que $\sqrt{3}<\omega<\frac{\pi}{b-a}$; alors $q(x)\leqslant 3<\omega^2$, et la question 3 (b) donne $b-a\geqslant\frac{\pi}{\omega}>b-a$, ce qui est absurde.

$$\boxed{b-a \geqslant \frac{\pi}{\sqrt{3}}}$$



La figure représente, d'après des valeurs approchées obtenues numériquement, la solution telle que $y(0)=0$ et $y'(0)=1$, et ses zéros en carmin. Les écarts entre zéros consécutifs valent environ 1,98 ; 2,90 ; 1,86 ; 2,20 et 2,63 : ils restent bien compris entre $\frac{\pi}{\sqrt{3}}\approx 1{,}81$ et π, sans que l'on ait jamais écrit la solution.

À retenir : plus le coefficient q est grand, plus les solutions de $y''+q(x)\,y=0$ oscillent vite ; en comparant à l'oscillateur harmonique $y''+\omega^2 y=0$, dont les zéros sont espacés de $\frac{\pi}{\omega}$, on encadre l'écart entre les zéros d'équations que l'on ne sait pas résoudre. Ce théorème de comparaison est dû à Sturm, qui l'a publié en 1836 dans le premier volume du *Journal de mathématiques pures et appliquées* ; la fonction φ de la question 1 est connue sous le nom d'identité de Picone.

Piège : l'hypothèse que y_1 n'est pas identiquement nulle sur $[a\,,b]$ ne peut pas être omise, puisque la fonction nulle est solution de toute équation $y''+q_1(x)\,y=0$. Pour une équation à coefficients constants, le théorème 6 montrerait qu'une solution nulle sur un segment est nulle partout, puisqu'elle y vérifie $y(x_0)=y'(x_0)=0$; pour des coefficients variables, ce résultat d'unicité n'est pas encore disponible, et c'est pourquoi l'hypothèse figure dans l'énoncé.

EXERCICE 54 ⋆⋆⋆⋆

1. L'équation caractéristique $r^2+2\xi r+1=0$ a pour discriminant $4(\xi^2-1)$. C'est le cas $a=2\xi>0$ et $b=1>0$ de l'exercice 42, question 3.

$$\boxed{\text{toute solution de l'équation homogène tend vers 0 en } +\infty}$$

2. Le nombre $\mathrm{i}\omega$ n'est pas racine, puisque $P(\mathrm{i}\omega)=1-\omega^2+2\mathrm{i}\xi\omega$ a une partie imaginaire non nulle. La proposition 10 donne la solution $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{P(\mathrm{i}\omega)}$ de l'équation de second membre $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, dont la partie réelle est solution de (E_ω). On écrit $P(\mathrm{i}\omega)=\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ sous forme exponentielle, avec $\rho=|P(\mathrm{i}\omega)|>0$:

$$\rho=\sqrt{(1-\omega^2)^2+4\xi^2\omega^2},\qquad c=\frac{1}{P(\mathrm{i}\omega)}=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{\rho},\qquad \mathrm{Re}\left(c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right)=\frac{\cos(\omega t-\varphi)}{\rho}.$$

$$\boxed{y_p(t)=A(\omega)\cos(\omega t-\varphi),\qquad A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2+4\xi^2\omega^2}}}$$

Le déphasage φ est un argument de $P(\mathrm{i}\omega)$, que l'on peut choisir dans $]0\,,\pi[$ puisque $\mathrm{Im}\,P(\mathrm{i}\omega)>0$: la réponse est en retard sur l'excitation.

3. D'après la proposition 9, toute solution s'écrit $y=y_p+y_h$, où y_h est solution de l'équation homogène. D'après la question 1, $y(t)-A(\omega)\cos(\omega t-\varphi)=y_h(t)$ tend vers 0.

$$\boxed{\text{l'écart entre toute solution et le régime permanent tend vers 0}}$$

Les conditions initiales n'influencent que le régime transitoire y_h, qui s'efface.

4. La fonction $\omega\mapsto\omega^2$ est strictement croissante sur $]0\,,+\infty[$; on étudie donc, pour $u>0$,

$$h(u)=(1-u)^2+4\xi^2u=u^2+(4\xi^2-2)\,u+1,\qquad h'(u)=2(u-(1-2\xi^2)),$$

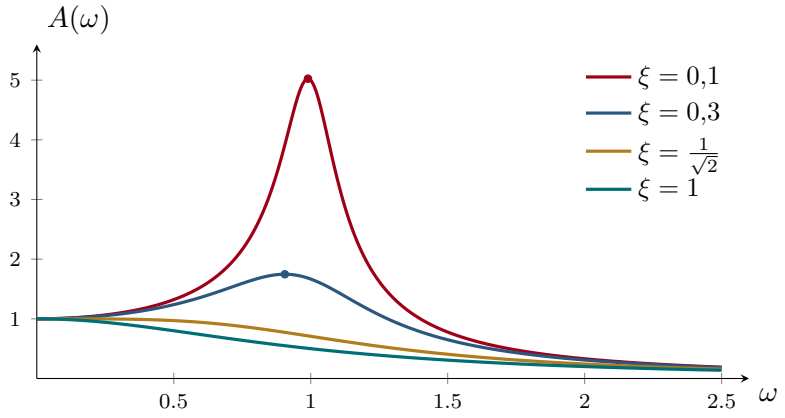
et A varie en sens contraire de h.

- Si $\xi\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$, alors $1-2\xi^2\leqslant 0$, h est strictement croissante sur $]0\,,+\infty[$, et A est strictement décroissante ; elle tend vers 1 en 0, donc $A(\omega)<1$ pour tout $\omega>0$: pas de maximum.
- Si $\xi<\frac{1}{\sqrt{2}}$, la fonction h est minimale en $u_0=1-2\xi^2>0$, avec

$$h(u_0)=4\xi^4+4\xi^2(1-2\xi^2)=4\xi^2(1-\xi^2).$$

Le maximum de A est atteint en $\omega_r=\sqrt{u_0}$, et il est strictement supérieur à 1, car $1-4\xi^2(1-\xi^2)$ vaut $(1-2\xi^2)^2>0$.

$$\boxed{\xi<\frac{1}{\sqrt{2}}:\quad \omega_r=\sqrt{1-2\xi^2},\qquad A(\omega_r)=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}>1}$$



Pour un faible amortissement, la courbe de réponse présente un pic très marqué près de la pulsation propre $\omega = 1$; il s'aplatit quand ξ augmente et disparaît à partir de $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, la courbe devenant alors décroissante.

5. Quand ξ tend vers 0, la pulsation de résonance ω_r tend vers 1, et $A(\omega_r) \sim \frac{1}{2\xi}$ tend vers $+\infty$. À la limite $\xi = 0$, on retrouve l'équation $y'' + y = \cos t$ du cours, dont la solution particulière $\frac{t \sin t}{2}$ n'est pas bornée : l'amortissement, si petit soit-il, limite l'amplitude du régime permanent, mais la rend d'autant plus grande qu'il est faible.

EXERCICE 55 ⋆⋆⋆⋆

1. La fonction W est dérivable, de dérivée $u\,v$ (proposition 2), et l'hypothèse s'écrit $u \leqslant W$. Comme $v \geqslant 0$, on obtient $W' = u\,v \leqslant W\,v$. Notons $V(x) = \int_0^x v$; comme à l'exercice 35, on étudie

$$(W\,\mathrm{e}^{-V})' = (W' - v\,W)\,\mathrm{e}^{-V} \leqslant 0.$$

La fonction $W\,\mathrm{e}^{-V}$ est décroissante sur $[0\,,+\infty[$, et vaut C en 0 : pour $x \geqslant 0$, $W(x) \leqslant C\,\mathrm{e}^{V(x)}$, et donc :

$$\boxed{u(x) \leqslant W(x) \leqslant C \exp\Big(\int_0^x v(t)\,\mathrm{d}t\Big)}$$

2. On applique la question 1 avec $u = f$, $C = 0$ et $v = K$: pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant 0$. Comme $f \geqslant 0$:

$$\boxed{f = 0}$$

3. La fonction $f - g$ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc $f(x) - g(x) = f(0) - g(0) + \int_0^x (H(f(t)) - H(g(t)))\,\mathrm{d}t$. Par l'inégalité triangulaire (proposition 2 (iv)) et l'hypothèse sur H :

$$|f(x) - g(x)| \leqslant |f(0) - g(0)| + \int_0^x k\,|f(t) - g(t)|\,\mathrm{d}t.$$

La question 1, avec $u = |f - g|$, qui est continue, $C = |f(0) - g(0)|$ et $v = k$, donne :

$$\boxed{|f(x) - g(x)| \leqslant |f(0) - g(0)|\,\mathrm{e}^{kx}}$$

Si $f(0) = g(0)$, on obtient $f = g$ sur $[0\,,+\infty[$: le problème de Cauchy $y' = H(y)$, $y(0) = y_0$, a au plus une solution. Ce résultat d'unicité s'applique à des équations non linéaires, comme celles de l'exercice 36 ; la condition imposée à H exprime que H est « lipschitzienne », notion que l'inégalité des accroissements finis du chapitre 9 rendra naturelle.
À retenir : l'inégalité obtenue dit aussi que deux solutions partant de valeurs proches restent proches, avec un écart qui croît au plus exponentiellement : c'est la stabilité par rapport aux conditions initiales.