EXERCICES – CHAPITRE 6

PRIMITIVES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

⋆ *application directe* ⋆⋆ *mise en œuvre* ⋆⋆⋆ *problème* ⋆⋆⋆⋆ *problème long, en autonomie*

Primitives et intégrales

EXERCICE 1 ⋆

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, en précisant un intervalle sur lequel on travaille.

(a) $x \mapsto 5x^3 - 3x + 7$

(b) $x \mapsto 2\cos x - 3\sin x$

(c) $x \mapsto \dfrac{5}{\sqrt{x}} + \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{x^3}$

(d) $x \mapsto \dfrac{x+5}{x^2}$

(e) $x \mapsto \mathrm{e}^{4x+3}$

(f) $x \mapsto \cos\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

(g) $x \mapsto (2x+1)^5$

(h) $x \mapsto \dfrac{3}{\sqrt{5x+1}}$

(i) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+9}$

(j) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

(k) $x \mapsto \mathrm{ch}(2x) + \mathrm{sh}\,\dfrac{x}{3}$

(l) $x \mapsto \tan^2 x$

EXERCICE 2 ⋆

Reconnaître une dérivée de fonction composée, et en déduire une primitive de chacune des fonctions suivantes sur un intervalle convenable.

(a) $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$

(b) $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{1+\mathrm{e}^{3x}}$

(c) $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$

(d) $x \mapsto \cos x \sin^2 x$

(e) $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$

(f) $x \mapsto 3x\sqrt{1+x^2}$

(g) $x \mapsto \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$

(h) $x \mapsto \dfrac{\cos(\ln x)}{x}$

(i) $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$

(j) $x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$

(k) $x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^4}$

(l) $x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^3}$

(m) $x \mapsto \dfrac{\sin(2x)}{1+\cos^2 x}$

(n) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}+x}$

(o) $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x+x}$

(p) $x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$

(q) $x \mapsto (3x-1)(3x^2-2x+3)^3$

(r) $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}$

EXERCICE 3 ⋆⋆

1. Un élève écrit : « une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est $x \mapsto -\frac{1}{x}$, donc $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \Big[-\frac{1}{x}\Big]_{-1}^{1} = -2$ ». Pourquoi ce résultat est-il absurde ? Où est l'erreur ?
2. Déterminer toutes les primitives de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$. Combien de constantes faut-il ?
3. Déterminer la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$ sur $]-1\,,1[$ qui s'annule en 0, puis les primitives de cette fonction sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

EXERCICE 4 ⋆⋆

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Justifier que les fonctions suivantes sont dérivables, et calculer leur dérivée.

(a) $G_1 : x \mapsto \displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$

(b) $G_2 : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t$

(c) $G_3 : x \mapsto \displaystyle\int_0^{x} f(t+x)\,\mathrm{d}t$

(d) $G_4 : x \mapsto \displaystyle\int_0^{x} (x-t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$

Indication : pour G_3, effectuer d'abord un changement de variable ; pour G_4, développer.

EXERCICE 5 ⋆⋆

Soit $a < b$ deux réels et $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ continue.

1. On suppose $f \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_a^b f = 0$. En étudiant une primitive de f, montrer que f est nulle.
2. Déterminer les fonctions f continues sur $[a\,,b]$ telles que $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b |f|$.
3. On suppose que $\displaystyle\int_\alpha^\beta f = 0$ pour tous α, β de $[a\,,b]$. Montrer que f est nulle.
4. Montrer que si $\displaystyle\int_a^b f^2 = 0$, alors $f = 0$. Cette conclusion subsiste-t-elle si l'on suppose seulement $\displaystyle\int_a^b f = 0$?

EXERCICE 6 ⋆⋆

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $T > 0$.

1. On suppose f T-périodique. Montrer que f admet une primitive T-périodique si et seulement si $\displaystyle\int_0^T f = 0$. Une primitive de $x \mapsto \cos^2 x$ peut-elle être périodique ?
2. On suppose que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t$ est constante. Montrer que f est T-périodique.

EXERCICE 7 ⋆⋆

On pose, pour $x \neq 0$, $\varphi(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$, et $\varphi(0) = 1$, de sorte que φ est continue sur $\mathbb{R}$; on pose ensuite, pour tout réel x, $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Étudier la parité de F.
2. Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$, et montrer que $F'(x) = \dfrac{\operatorname{sh}(2x) - \operatorname{sh} x}{x}$ pour $x \neq 0$.
3. En déduire les variations de F.

EXERCICE 8 ⋆⋆⋆

Encadrements d'intégrales.

1. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $1 - \dfrac{1}{n+1} \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n} \leqslant 1$.
2. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \displaystyle\int_0^1 \Big(\frac{1+t^2}{2}\Big)^n \mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{n+1}$.
3. En comparant $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ sur $[\mathrm{e}\,,\pi]$, montrer que $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{x} < \frac{\pi - \mathrm{e}}{\mathrm{e}}$, puis que $\pi^{\mathrm{e}} < \mathrm{e}^{\pi}$.

EXERCICE 9 ⋆⋆⋆

π est plus petit que $\frac{22}{7}$.

1. Vérifier que $x^4(1-x)^4 = (1+x^2)(x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4) - 4$.
2. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{22}{7} - \pi$, puis que $\pi < \dfrac{22}{7}$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x$, et en encadrant $\frac{1}{1+x^2}$ sur $[0\,,1]$, montrer que $\dfrac{1979}{630} \leqslant \pi \leqslant \dfrac{3959}{1260}$. Quelle précision obtient-on ainsi ?

Calcul de primitives et d'intégrales

EXERCICE 10 ⋆

Calculer les intégrales suivantes.

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} (1 - \cos 3x)\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan x\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x}$

(h) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, \cos x\,\mathrm{d}x$

EXERCICE 11 ⋆

Déterminer une primitive des fonctions rationnelles suivantes, sur un intervalle ne contenant aucune racine du dénominateur.

(a) $\dfrac{1}{x^2-7x+10}$ (b) $\dfrac{x+1}{x^2-7x+10}$ (c) $\dfrac{1}{x^2-6x+9}$ (d) $\dfrac{1}{x^2-x+1}$ (e) $\dfrac{1}{2x^2+x+1}$ (f) $\dfrac{1}{x^2+4x+5}$ (g) $\dfrac{x+4}{x^2+1}$ (h) $\dfrac{3x+2}{x^2+x+1}$ (i) $\dfrac{2x+1}{x^2+x-3}$

EXERCICE 12 ⋆⋆

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer des réels a, b, c, d tels que l'égalité indiquée soit vraie, puis en déduire une primitive sur l'intervalle indiqué.

(a) $\dfrac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2} = \dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+3}+\dfrac{c}{(x+3)^2}$ sur $]1\,,+\infty[$; on donnera la primitive qui s'annule en 2.

(b) $\dfrac{2x^2-3x+4}{(x-1)^2} = a+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{(x-1)^2}$ sur $]1\,,+\infty[$.

(c) $\dfrac{x}{(x^2-4)^2} = \dfrac{a}{(x-2)^2}+\dfrac{b}{(x+2)^2}$ sur $]2\,,+\infty[$; retrouver le résultat en reconnaissant une dérivée composée.

(d) $\dfrac{1}{1-x^4} = \dfrac{a}{1-x}+\dfrac{b}{1+x}+\dfrac{c}{1+x^2}$ sur $]-1\,,1[$.

EXERCICE 13 ⋆

Calculer les intégrales suivantes, en décomposant ou en mettant sous forme canonique.

(a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{t+1}{t(t^2-1)}\,\mathrm{d}t$ (b) $\displaystyle\int_3^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2}$ (c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5}$

EXERCICE 14 ⋆⋆

1. Déterminer une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{2x}\sin(3x)$ et de $x \mapsto \mathrm{ch}\,x\cos x$ de deux façons : à l'aide de l'exponentielle complexe, puis par deux intégrations par parties successives.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin(2x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-x}\sin^2 x\,\mathrm{d}x$.
3. Déterminer une primitive de $x \mapsto \sin^5 x$, de $x \mapsto \cos^4 x \sin^2 x$ et de $x \mapsto \cos(3x)\cos^3 x$.
4. Calculer la valeur moyenne $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos t\,\cos(2t)\,\cos(3t)\,\mathrm{d}t$.

EXERCICE 15 ⋆

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une ou de plusieurs intégrations par parties.

(a) $\displaystyle\int_0^1 t^2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$

(b) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t^2\ln t\,\mathrm{d}t$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi} t\sin(3t)\,\mathrm{d}t$

(d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$

(e) $\displaystyle\int_0^1 t^3\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$

(f) $\displaystyle\int_0^1 (\operatorname{Arcsin} x)^2\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x^2\operatorname{Arctan} x\,\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$

(i) $\displaystyle\int_0^1 x(\operatorname{Arctan} x)^2\,\mathrm{d}x$

EXERCICE 16 ⋆

Déterminer une primitive des fonctions suivantes à l'aide d'une intégration par parties.

(a) $x\mapsto \operatorname{Arctan} x$

(b) $x\mapsto \operatorname{Arcsin} x$

(c) $x\mapsto \ln(1+x^2)$

(d) $x\mapsto (x\ln x)^2$

(e) $x\mapsto \dfrac{x}{\cos^2 x}$

(f) $x\mapsto x\operatorname{ch} x$

(g) $x\mapsto x\sin^2 x$

(h) $x\mapsto x\operatorname{Arctan} x$

(i) $x\mapsto \sin(\ln x)$

EXERCICE 17 ⋆⋆

1. Calculer $I=\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$, puis en déduire habilement $J=\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin^2 x\,\mathrm{d}x$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x$.
3. Pour tout entier $n\geqslant 1$, déterminer une primitive de $x\mapsto(\ln x)^n$ sur $]0\,,+\infty[$, sous la forme $x\,P_n(\ln x)$, où l'on exprimera la suite de fonctions polynomiales (P_n) par une relation de récurrence, puis par une formule explicite.

EXERCICE 18 ⋆

Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué, ou d'un changement de variable bien choisi.

(a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t,\quad x=\sqrt{t}$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t,\quad x=\cos t$

(c) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{2t\ln t+t},\quad x=\ln t$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+\mathrm{e}^t},\quad x=\mathrm{e}^t$

(e) $\displaystyle\int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{t+1}\,\mathrm{d}t,\quad x=\sqrt{t}$

(f) $\displaystyle\int_{1/3}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}}$

(g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t$

(h) $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

(k) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^6+1}\,\mathrm{d}x$

(l) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^{\pi}} \sin(\ln t)\,\mathrm{d}t$

EXERCICE 19 ⋆⋆

Déterminer une primitive des fonctions suivantes à l'aide d'un changement de variable.

(a) $x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$, en posant $u = \mathrm{e}^x$

(b) $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + 1}$

(c) $x \mapsto \dfrac{1}{x + x(\ln x)^2}$

(d) $x \mapsto \cos\sqrt{x}$

(e) $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$, en posant $x = \sin t$

(f) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, en posant $x = \operatorname{sh} t$

(g) $x \mapsto \cos(2\ln x)$

(h) $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{(3+\mathrm{e}^x)\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}}$

EXERCICE 20 ⋆⋆

Calculer les intégrales suivantes.

(a) $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_0^1 x\operatorname{Arctan} x\,\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2\,\mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{Arcsin} x\,\mathrm{d}x$

(k) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,\mathrm{d}x$

(l) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x$

(m) $\displaystyle\int_0^{\pi^2/4} \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

(n) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,\mathrm{d}x$

(o) $\displaystyle\int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}}$

(p) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)}$

(q) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\,\mathrm{d}x$

(r) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^2 x\,\mathrm{d}x$

(s) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$

(t) $\displaystyle\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

(u) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^5\cos x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

EXERCICE 21 ⋆⋆

Symétries.

1. Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(a+b-x) = f(x)$ pour tout x. Montrer que

$$\int_a^b x\,f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

et interpréter.

2. En déduire $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$.

3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t+\sin t}\,\mathrm{d}t$, puis que ces intégrales valent $\dfrac{\pi}{4}$. En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}+t}$.

EXERCICE 22 ⋆⋆⋆

Règles de Bioche. Pour primitiver une fraction en $\cos x$ et $\sin x$, on cherche une symétrie de l'expression $f(x)\,\mathrm{d}x$: on pose $u = \cos x$ si elle est inchangée quand on remplace x par $-x$, $u = \sin x$ si elle l'est quand on remplace x par $\pi - x$, $u = \tan x$ si elle l'est quand on remplace x par $\pi + x$, et $t = \tan\frac{x}{2}$ en dernier recours.

1. Justifier, lorsque $t = \tan\frac{x}{2}$ avec $x \in]-\pi\,,\pi[$, les formules $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ et $\mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$.
2. Calculer, en choisissant chaque fois le changement de variable :

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}, \qquad \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{4-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}, \qquad \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + \tan x}.$$

EXERCICE 23 ⋆⋆⋆

Intégrales de Wallis. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer W_0, W_1 et W_2, puis montrer à l'aide du changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - u$ que
$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\,\mathrm{d}t.$$
2. Montrer que (W_n) est décroissante et à termes strictement positifs.
3. Par une intégration par parties, montrer que $(n+2)\,W_{n+2} = (n+1)\,W_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \cdot \dfrac{\pi}{2}$ et $W_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.
5. Montrer que la suite $\big((n+1)\,W_{n+1}W_n\big)$ est constante, et préciser sa valeur.
6. En utilisant la décroissance, montrer que $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$. Que suggère ce résultat lorsque n devient grand ?

EXERCICE 24 ⋆⋆⋆

Pour tous entiers naturels p et q, on pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $I_{p,q} = I_{q,p}$.
2. Montrer que $I_{p,q} = \dfrac{q}{p+1}\,I_{p+1,q-1}$ pour $q \geqslant 1$, puis que $I_{p,q} = \dfrac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$.
3. En développant $(1-t)^q$ par la formule du binôme, en déduire que
$$\sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1} = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}.$$
4. Vérifier ce résultat pour $p = 0$ et $q = 2$, puis retrouver la valeur de $\displaystyle\int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x$ de l'exercice 9.

EXERCICE 25 ⋆⋆⋆

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0, puis montrer que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ pour tout n.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. En déduire que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 + (-1)^N I_{N+1}$, puis que ces sommes s'approchent de $\ln 2$ quand N grandit, avec une erreur au plus $\frac{1}{N+2}$.
4. En adaptant la méthode à $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, montrer que $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \cdots + \dfrac{(-1)^N}{2N+1}$ s'approche de $\dfrac{\pi}{4}$.

EXERCICE 26 ⋆⋆⋆

Pour tous entiers naturels n et m, on pose $C_{n,m} = \displaystyle\int_0^\pi \cos^n x \cos(mx)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $2\cos x \cos(mx) = \cos\big((m+1)x\big) + \cos\big((m-1)x\big)$, et en déduire que, pour $m \geqslant 1$,
$$2C_{n+1,m} = C_{n,m+1} + C_{n,m-1}.$$
2. Montrer par récurrence sur n que $C_{n,m} = 0$ pour tous $m > n$.
3. En déduire que $C_{n,n} = \dfrac{\pi}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Retrouver ces résultats en linéarisant $\cos^n x$ par la formule du binôme appliquée à $\big(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\big)^n$, comme au chapitre 4.

Équations différentielles linéaires du premier ordre

EXERCICE 27 ⋆

Résoudre les équations suivantes, à coefficients constants, sur $\mathbb{R}$; pour les deux premières, on déterminera la solution qui vérifie la condition indiquée.

(a) $y' + 2y = -4,\ \ y(1) = -3$

(b) $2y' - 3y = 9,\ \ y(-1) = 1$

(c) $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$

(d) $7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$

(e) $y' + y = x\,\mathrm{e}^{-x}$

(f) $y' - 2y = \cos x + 2\sin x$

(g) $y' + y = (x^2 - 2x + 2)\,\mathrm{e}^{2x}$

(h) $y' - 2y = \mathrm{sh}\,x - 2x\,\mathrm{ch}\,x$

Indication : pour (c), (d) et (g), on cherchera une solution particulière de la forme d'un polynôme, éventuellement multiplié par l'exponentielle du second membre, en justifiant le degré choisi.

EXERCICE 28 ⋆

Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle indiqué.

(a) $y' + x^2 y = -x^2$, sur $\mathbb{R}$

(b) $y' + 2xy = \mathrm{e}^{x-x^2}$, sur $\mathbb{R}$

(c) $y' - \dfrac{x}{1+x^2}\, y = \dfrac{1}{1+x^2}$, sur $\mathbb{R}$

(d) $y' + y = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$, sur $\mathbb{R}$

(e) $y' - 2xy = -(2x-1)\,\mathrm{e}^x$, sur $\mathbb{R}$

(f) $y' - \dfrac{2}{t}\, y = t^2$, sur $]0\,,+\infty[$

(g) $y' + \dfrac{y}{t} = \dfrac{1}{t(1+t^2)}$, sur $]0\,,+\infty[$

(h) $y' - y\tan x = \dfrac{1}{\cos x}$, sur $]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}[$

EXERCICE 29 ⋆⋆

Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle indiqué, après les avoir mises sous forme normalisée.

(a) $2xy' - y = x$, sur $]0\,,+\infty[$

(b) $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$, sur $]-1\,,+\infty[$

(c) $\sqrt{1-x^2}\, y' - y = 1$, sur $]-1\,,1[$

(d) $y' \operatorname{ch} x - y \operatorname{sh} x = 1 + \operatorname{ch}^2 x$, sur $\mathbb{R}$

(e) $x\ln(x)\, y' - y = 3x^2(\ln x)^2$, sur $]0\,,1[$

(f) $xy' - 2y = x^3 \sin x$, sur $]0\,,+\infty[$

EXERCICE 30 ⋆⋆

1. Soit a, $b : I \to \mathbb{R}$ continues et $x_0 \in I$. Montrer que les tangentes en leur point d'abscisse x_0 aux courbes des solutions de $y' + a(x)y = b(x)$ sont toutes parallèles, ou toutes concourantes.
2. Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre dont les solutions sont exactement les fonctions $x \mapsto \dfrac{C+x}{1+x^2}$, $C \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer une équation de la forme $y'' + ay' + by = 0$ dont les solutions sont les fonctions $x \mapsto C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-x}$.

EXERCICE 31 ⋆⋆

Alcoolémie. On modélise le taux d'alcool dans le sang, en grammes par litre, t heures après l'absorption d'une boisson, par une fonction f telle que $f(0) = 0$ et $f'(t) + f(t) = a\,\mathrm{e}^{-t}$ pour $t \geqslant 0$, où $a > 0$ dépend de la quantité absorbée.

1. Déterminer f.
2. On prend $a = 5$. Étudier les variations de f et préciser le taux maximal et l'instant où il est atteint.
3. Montrer qu'il existe un unique instant $t_1 > 1$ à partir duquel le taux est inférieur à 0,5 g/L, et en donner une valeur approchée à la minute près.

EXERCICE 32 ⋆⋆⋆

Raccordements. On considère l'équation $(E) : xy' = 2y + x$, sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre (E) sur $]-\infty\,,0[$ et sur $]0\,,+\infty[$.
2. Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Que valent $y(0)$ et $y'(0)$? Montrer que y s'écrit $x \mapsto -x + C_1 x^2$ sur $]-\infty\,,0]$ et $x \mapsto -x + C_2 x^2$ sur $[0\,,+\infty[$. Réciproquement, ces fonctions sont-elles toutes solutions sur $\mathbb{R}$?
3. Combien (E) a-t-elle de solutions sur $\mathbb{R}$ telles que $y(0) = 0$? telles que $y(0) = 1$? Pourquoi cela ne contredit-il pas le théorème de Cauchy du cours ?
4. Résoudre de même $x^2 y' - y = 0$ sur $]-\infty\,,0[$, sur $]0\,,+\infty[$, puis sur $\mathbb{R}$. On admettra que $\dfrac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x^2}$ tend vers 0 quand x tend vers 0^+, ce que les croissances comparées du chapitre 5 permettent d'établir.

EXERCICE 33 ⋆⋆⋆

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes, en étudiant les raccordements.

(a) $xy' - y = x^2$

(b) $xy' + y = x^2$

(c) $\mathrm{sh}(x)\, y' - \mathrm{ch}(x)\, y = 1$

(d) $(x^2 - 1)\, y' = xy$

EXERCICE 34 ⋆⋆⋆

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant les conditions suivantes.

(a) $f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$ pour tout réel x.

(b) $f'(x) + f(x) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout réel x.

(c) $f'(x) + f(-x) = \mathrm{e}^x$ pour tout réel x. *On montrera que f est deux fois dérivable et vérifie une équation du second ordre.*

EXERCICE 35 ⋆⋆⋆

Comparaison de solutions. Soit $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues, A une primitive de a, et y, z deux fonctions dérivables telles que $y(0) = z(0)$ et, pour tout réel x,

$$y'(x) = a(x)\, y(x) + b(x) \qquad \text{et} \qquad z'(x) \leqslant a(x)\, z(x) + b(x).$$

1. En étudiant $x \mapsto (z(x) - y(x))\, \mathrm{e}^{-A(x)}$, montrer que $z(x) \leqslant y(x)$ pour tout $x \geqslant 0$.
2. Application : soit $g : [0\,,+\infty[\to \mathbb{R}$ dérivable telle que $g' \leqslant k\, g$, avec k réel. Montrer que $g(x) \leqslant g(0)\, \mathrm{e}^{kx}$ pour tout $x \geqslant 0$.
3. Que devient le résultat de la question 1 pour $x \leqslant 0$?

EXERCICE 36 ⋆⋆⋆

Deux équations non linéaires.

1. Soit y une solution de $y' = 1+y^2$ sur un intervalle I. En dérivant $\text{Arctan} \circ y$, montrer qu'il existe une constante c telle que $y(x) = \tan(x+c)$ sur I. En déduire que cette équation n'a aucune solution sur $\mathbb{R}$, et préciser la plus grande longueur possible de I.

2. On cherche les fonctions y dérivables et strictement positives sur $]0\,,+\infty[$ telles que

$$x^2 + y^2 - 2xy\,y' = 0.$$

En posant $z = y^2$, se ramener à une équation linéaire, puis conclure.

Équations du second ordre à coefficients constants

EXERCICE 37 ⋆

Déterminer les solutions réelles des équations homogènes suivantes, puis leurs solutions complexes.

(a) $y'' - 2y' - 3y = 0$
(b) $y'' - 2y' + y = 0$
(c) $y'' - 2y' + 5y = 0$
(d) $4y'' + 9y = 0$
(e) $y'' + y' + y = 0$
(f) $y'' - 4y = 0$

EXERCICE 38 ⋆

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes, en cherchant les solutions réelles.

(a) $y'' - 3y' + 2y = 1$
(b) $y'' + 4y' + 4y = \mathrm{e}^x$
(c) $y'' - y = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x$
(d) $y'' - 4y' + 3y = 3\mathrm{e}^{3x}$
(e) $y'' + y' + y = \cos x$
(f) $y'' + y' - 2y = \cos x$
(g) $y'' + 4y' + 4y = \mathrm{e}^{-2x} + 1$
(h) $y'' - y = \operatorname{ch} x$
(i) $y'' + 2y' + y = \operatorname{sh} x$
(j) $y'' + y' = x$

EXERCICE 39 ⋆⋆

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes, en cherchant les solutions réelles. Pour les seconds membres produits d'une exponentielle et d'un polynôme, on cherchera une solution de la forme $Q(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$, avec Q polynomial, en utilisant la proposition 8 du cours.

(a) $y'' - 2y' + y = \sin^2 x$
(b) $y'' + y' + y = \mathrm{e}^x \cos x$
(c) $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{2x} \sin(3x)$
(d) $y'' - 2y' + 5y = 4\mathrm{e}^x \cos(2x)$
(e) $y'' + y = \cos^3 x$
(f) $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$
(g) $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)\,\mathrm{e}^x$
(h) $y'' - 2y' + y = (x^2+1)\,\mathrm{e}^x$
(i) $y'' - y = x + 2\mathrm{e}^x + \cos x$
(j) $y'' + 4y = \cos(2x) + \sin x + \mathrm{e}^{2x}$

EXERCICE 40 ⋆

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

(a) $\begin{cases} y'' + 9y = x + 1 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y'' - 2y' + y = x \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} y'' + y = 3x^2 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2 \end{cases}$

EXERCICE 41 ⋆⋆

1. Soit α un réel. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' - (1+\alpha)\,y' + \alpha y = \mathrm{e}^{(1+\alpha)x}$, en discutant selon α.
2. Soit $\omega > 0$ et $\theta \geqslant 0$. Résoudre $y'' + \omega^2 y = \cos(\theta x)$, en distinguant les cas $\theta \neq \omega$ et $\theta = \omega$. Dans quel cas toutes les solutions sont-elles bornées ?

EXERCICE 42 ⋆⋆⋆

Soit a, b deux réels.

1. Déterminer à quelle condition sur (a, b) toutes les solutions réelles de $y'' + ay' + by = 0$ sont bornées sur $[0\,, +\infty[$. On discutera selon le signe du discriminant.
2. Même question pour des solutions bornées sur $\mathbb{R}$.
3. Lorsque $a > 0$ et $b > 0$, montrer que toutes les solutions tendent vers 0 en $+\infty$. Interpréter physiquement pour l'oscillateur amorti du cours.

EXERCICE 43 ⋆⋆⋆

Changements de variable. On résout des équations à coefficients non constants en se ramenant au cas constant.

1. Sur $]0\,, +\infty[$, on considère $(E_1) : x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$. Pour y deux fois dérivable sur $]0\,, +\infty[$, on pose $z(t) = y(\mathrm{e}^t)$ pour $t \in \mathbb{R}$. Montrer que y est solution de (E_1) si et seulement si $z'' - 4z' + 4z = 0$, puis résoudre (E_1).
2. Résoudre de même $x^2y'' + 3xy' + y = (x+1)^2$ sur $]0\,, +\infty[$.
3. Sur $]-1\,, 1[$, résoudre $(1-x^2)\,y'' - xy' + y = 0$ en posant $x = \sin t$, avec $t \in \left]-\frac{\pi}{2}\,, \frac{\pi}{2}\right[$.

EXERCICE 44 ⋆⋆⋆

Changements de fonction inconnue. Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle indiqué, à l'aide de la fonction auxiliaire proposée.

(a) $(1+x^2)\,y'' + 2xy' = 0$ sur $\mathbb{R}$, avec $u = (1+x^2)\,y'$.

(b) $(1+\mathrm{e}^x)\,y'' + y' - \mathrm{e}^x y = 0$ sur $\mathbb{R}$, avec $z = y' + y$.

(c) $y'' + 4xy' + (3+4x^2)\,y = 0$ sur $\mathbb{R}$, avec $z = \mathrm{e}^{x^2} y$.

(d) $xy'' + 2(x+1)\,y' + (x+2)\,y = 0$ sur $]0\,, +\infty[$, avec $z = xy$.

EXERCICE 45 ⋆⋆⋆

Variation des constantes au second ordre. On veut résoudre $(E) : y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$ sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

1. Soit λ, $\mu : I \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\lambda' \cos x + \mu' \sin x = 0$ sur I, et $y = \lambda \cos x + \mu \sin x$. Montrer que $y' = -\lambda \sin x + \mu \cos x$, puis que y est solution de (E) si et seulement si
$$-\lambda' \sin x + \mu' \cos x = \frac{1}{\cos x}.$$
2. Résoudre le système formé par ces deux conditions, d'inconnues λ' et μ', et en déduire une solution particulière de (E).
3. Résoudre (E), puis, par la même méthode, $y'' + y = \tan x$ sur I.

EXERCICE 46 ⋆⋆⋆

Systèmes différentiels.

1. Déterminer les couples (y, z) de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $y' - y = z$ et $z' + z = 3y$. On commencera par montrer que y est deux fois dérivable et vérifie une équation du second ordre.
2. Une particule chargée se déplace dans un champ magnétique uniforme ; ses coordonnées vérifient $x'' = \omega\, y'$, $y'' = -\omega\, x'$ et $z'' = 0$, avec $\omega > 0$. En posant $u = x' + \mathrm{i}y'$, montrer que $u' = -\mathrm{i}\omega u$, puis déterminer x, y et z en fonction des conditions initiales. Montrer que la trajectoire est une hélice, ou un cercle si $z'(0) = 0$.

EXERCICE 47 ⋆⋆⋆

1. Déterminer les fonctions à valeurs complexes solutions sur $\mathbb{R}$ de $y''' = y$. On pourra, pour une solution f, étudier $g = f + f' + f''$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $f'' + f \geqslant 0$. Pour x fixé, dériver la fonction
$$t \longmapsto f'(t) \sin(t - x) - f(t) \cos(t - x),$$
et en déduire que $f(x) + f(x + \pi) \geqslant 0$ pour tout réel x.

Exercices de synthèse

EXERCICE 48 ⋆⋆

Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

1. Toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ admet une primitive sur $\mathbb{R}$.
2. Si F et G sont deux primitives d'une même fonction sur $\mathbb{R}^*$, alors $F - G$ est constante.
3. Si f est continue et positive sur $[a, b]$, avec $a < b$, et si $\displaystyle\int_a^b f = 0$, alors f est nulle.
4. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -2$.
5. $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin t|\, \mathrm{d}t = 4$.
6. La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{x^2} \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t$ a pour dérivée $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^4}$.
7. Une solution de $y' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en un point est la fonction nulle.

8. L'équation $y'' + y = 0$ admet une solution non nulle telle que $y(0) = y(\pi) = 0$.
9. Toutes les solutions de $y'' + y = \cos x$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.
10. Si y_1 est solution de $y' + a(x)y = b_1(x)$ et y_2 de $y' + a(x)y = b_2(x)$, alors $y_1 + y_2$ est solution de $y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$.

EXERCICE 49 ⋆⋆

Une inégalité optimale. Soit $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f = 0$, et α, β deux réels tels que $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$ pour tout $x \in [0\,,1]$.

1. Montrer que $\alpha \leqslant 0 \leqslant \beta$. En étudiant le signe de $\big(\beta - f(x)\big)\big(f(x) - \alpha\big)$, montrer que
$$\int_0^1 f^2 \leqslant -\alpha\beta.$$
2. On prend $\alpha = -1$ et $\beta = 1$. Pour $h \in \left]0\,,\frac{1}{2}\right]$, on note f_h la fonction qui vaut 1 sur $\left[0\,,\frac{1}{2} - h\right]$, $\frac{1}{h}\left(\frac{1}{2} - x\right)$ sur $\left[\frac{1}{2} - h\,,\frac{1}{2} + h\right]$ et -1 sur $\left[\frac{1}{2} + h\,,1\right]$. Vérifier que f_h satisfait les hypothèses de l'énoncé, et calculer $\displaystyle\int_0^1 f_h^2$. Dans ce cas, la constante $-\alpha\beta$ de la question 1 peut-elle être remplacée par une constante plus petite ?
3. Soit $g : [0\,,1] \to [0\,,1]$ continue, et $m = \displaystyle\int_0^1 g$. Montrer que
$$\int_0^1 (g - m)^2 \leqslant m(1 - m) \leqslant \frac{1}{4}.$$

EXERCICE 50 ⋆⋆⋆

Équations intégrales. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues vérifiant, pour tout réel x :

(a) $f(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x t\, f(t)\,\mathrm{d}t$;

(b) $f(x) = \sin x + \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$;

(c) $f(x) + 1 = \displaystyle\int_0^{\pi - x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Indication : on justifiera d'abord que f est dérivable ; pour (c), on montrera que f est deux fois dérivable et que $f'' + f = 0$, puis l'on réinjectera les solutions trouvées dans l'équation.

EXERCICE 51 ⋆⋆⋆

Équations fonctionnelles de Cauchy.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tous réels x, y. Calculer $f(0)$, puis, en dérivant cette relation par rapport à x, montrer qu'il existe un réel a tel que $f(x) = ax$ pour tout réel x.
2. On suppose seulement que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et vérifie la même relation. Soit F une primitive de f.
   (a) En intégrant la relation par rapport à y entre 0 et 1, montrer que, pour tout réel x,
   $$f(x) = F(x + 1) - F(x) - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$
   (b) En déduire que f est dérivable, puis qu'elle est de la forme $x \mapsto ax$.

3. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, non identiquement nulle, telle que $g(x+y) = g(x)\,g(y)$ pour tous réels x, y. Montrer que g ne s'annule pas, puis qu'elle est strictement positive, et en déduire qu'il existe un réel a tel que $g(x) = \mathrm{e}^{ax}$ pour tout réel x.

4. Déterminer les fonctions $h :]0\,,+\infty[\to \mathbb{R}$ continues telles que $h(xy) = h(x) + h(y)$ pour tous réels x, y strictement positifs.

EXERCICE 52 ⋆⋆⋆

Coefficients d'un polynôme et moyennes sur un cercle. Soit $n \in \mathbb{N}$, a_0, …, a_n des nombres complexes, et P la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$.

1. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

2. Soit $r \geqslant 0$. Montrer que, pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$,
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}\,\mathrm{d}\theta = a_k r^k,$$
et interpréter le cas $k = 0$.

3. Montrer que $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|^2 \mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2$.

4. On suppose qu'il existe un réel M tel que $|P(z)| \leqslant M$ pour tout complexe z de module 1. Montrer que $|a_k| \leqslant M$ pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$. Lorsque $n \geqslant 1$ et $a_n = 1$, montrer qu'il existe un réel θ tel que $\left|P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|^2 \geqslant 1 + |a_0|^2$.

5. En appliquant la question 3 à $P(z) = (1+z)^n$, et à l'aide des intégrales de Wallis de l'exercice 23, montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

EXERCICE 53 ⋆⋆⋆

Théorème de comparaison de Sturm. Soit q_1, $q_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $q_1(x) < q_2(x)$ pour tout réel x, et y_1, $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que
$$y_1'' + q_1(x)\,y_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad y_2'' + q_2(x)\,y_2 = 0.$$
On suppose qu'il existe deux réels $a < b$ tels que $y_1(a) = y_1(b) = 0$, la fonction y_1 n'étant pas identiquement nulle sur $[a\,,b]$. On veut montrer que y_2 s'annule en au moins un point de $[a\,,b]$; on suppose par l'absurde qu'elle ne s'y annule pas.

1. Montrer que la fonction $\varphi = \dfrac{y_1}{y_2}\left(y_1' y_2 - y_1 y_2'\right)$ est dérivable sur $[a\,,b]$, et que
$$\varphi' = (q_2 - q_1)\,y_1^2 + \left(y_1' - \frac{y_1 y_2'}{y_2}\right)^2.$$

2. En déduire que φ est nulle sur $[a\,,b]$, puis aboutir à une contradiction.

3. Soit $\omega > 0$, $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et y une solution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + q(x)\,y = 0$.
   (a) On suppose $q(x) > \omega^2$ pour tout réel x. En appliquant ce qui précède avec une fonction y_1 bien choisie, montrer que y s'annule sur tout segment de longueur $\frac{\pi}{\omega}$.
   (b) On suppose $q(x) < \omega^2$ pour tout réel x, et l'on considère deux réels $a < b$ tels que $y(a) = y(b) = 0$, la fonction y n'étant pas identiquement nulle sur $[a\,,b]$. En choisissant $y_2(x) = \cos\left(\omega(x - \frac{a+b}{2})\right)$, montrer que $b - a \geqslant \frac{\pi}{\omega}$.

4. On ne sait pas résoudre explicitement l'équation $y''+(2+\cos x)\,y=0$. Soit y une de ses solutions sur $\mathbb{R}$. Montrer que y s'annule sur tout segment de longueur strictement supérieure à π, et que, si $y(a)=y(b)=0$ avec $a<b$, sans que y soit identiquement nulle sur $[a\,,b]$, alors $b-a\geqslant\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

EXERCICE 54 ⋆⋆⋆⋆

Oscillateur forcé et résonance. Soit $\xi>0$ et $\omega>0$. On étudie l'équation

$$(E_\omega):\quad y''+2\xi\,y'+y=\cos(\omega t).$$

1. Montrer que toutes les solutions de l'équation homogène tendent vers 0 en $+\infty$.
2. Déterminer une solution particulière de (E_ω) de la forme $t\mapsto \mathrm{Re}\left(c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right)$, avec $c\in\mathbb{C}$, et l'écrire sous la forme $A(\omega)\cos(\omega t-\varphi)$, avec $A(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2+4\xi^2\omega^2}}$.
3. En déduire que toute solution de (E_ω) est, pour t grand, très proche d'une oscillation d'amplitude $A(\omega)$: c'est le régime permanent.
4. Étudier la fonction $\omega\mapsto A(\omega)$ sur $]0\,,+\infty[$. Montrer qu'elle admet un maximum strictement supérieur à 1 si et seulement si $\xi<\frac{1}{\sqrt{2}}$, atteint en $\omega_r=\sqrt{1-2\xi^2}$, et calculer ce maximum.
5. Que se passe-t-il lorsque ξ tend vers 0 ? Comparer avec la résonance de l'équation $y''+y=\cos t$ étudiée dans le cours.

EXERCICE 55 ⋆⋆⋆⋆

Lemme de Gronwall.

1. Soit C un réel, et u, $v:[0\,,+\infty[\to\mathbb{R}$ continues, avec $v\geqslant 0$, telles que, pour tout $x\geqslant 0$,

$$u(x)\leqslant C+\int_0^x u(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Montrer que, pour tout $x\geqslant 0$,

$$u(x)\leqslant C\exp\Big(\int_0^x v(t)\,\mathrm{d}t\Big).$$

   On pourra introduire $W(x)=C+\displaystyle\int_0^x u\,v$ et s'inspirer de l'exercice 35.

2. En déduire qu'une fonction continue $f\geqslant 0$ sur $[0\,,+\infty[$ telle que $f(x)\leqslant K\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour un réel $K\geqslant 0$ et tout $x\geqslant 0$ est nulle.
3. Soit $k\geqslant 0$ et $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $|H(s)-H(s')|\leqslant k\,|s-s'|$ pour tous réels s, s'. Soit f, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,,+\infty[$ telles que $f'=H\circ f$ et $g'=H\circ g$. Montrer que $|f(x)-g(x)|\leqslant|f(0)-g(0)|\,\mathrm{e}^{kx}$ pour tout $x\geqslant 0$. Que peut-on en conclure lorsque $f(0)=g(0)$?