CORRIGÉ – CHAPITRE 7

NOMBRES RÉELS ET SUITES NUMÉRIQUES

⋆ *application directe* ⋆⋆ *mise en œuvre* ⋆⋆⋆ *problème* ⋆⋆⋆⋆ *problème long, en autonomie*

Nombres réels et borne supérieure

EXERCICE 1 ⋆

Dans chaque cas, on exhibe un majorant, puis une suite d'éléments de la partie qui tend vers lui : d'après la proposition 13 du cours, c'est la borne supérieure. Elle est un maximum si et seulement si elle appartient à la partie.

(a) On a $\frac{1}{n} \leqslant 1$, avec égalité pour $n = 1$, et $\frac{1}{n} > 0$, avec $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$$\boxed{\sup A = \max A = 1 \qquad \inf A = 0, \text{ pas de minimum}}$$

(b) Pour n pair, $(-1)^n + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \leqslant \frac{3}{2}$, avec égalité pour $n = 2$; pour n impair, $-1 + \frac{1}{n} \leqslant 0$. Tous les éléments sont strictement supérieurs à -1, et $-1 + \frac{1}{2k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} -1$.

$$\boxed{\sup B = \max B = \frac{3}{2} \qquad \inf B = -1, \text{ pas de minimum}}$$

(c) Si $x^2 < 3$, alors $|x| < \sqrt{3}$. Les valeurs décimales approchées par défaut d_n de $\sqrt{3}$ sont des rationnels positifs, distincts de $\sqrt{3}$ qui est irrationnel (même démonstration que pour $\sqrt{2}$), donc $d_n^2 < 3$ et $d_n \in C$; et $d_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{3}$. Par symétrie de C, on traite la borne inférieure.

$$\boxed{\sup C = \sqrt{3}, \quad \inf C = -\sqrt{3}, \text{ ni maximum ni minimum}}$$

(d) On a $0 < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leqslant 2$, avec égalité pour $p = q = 1$, et $\frac{2}{n} \in D$ tend vers 0.

$$\boxed{\sup D = \max D = 2 \qquad \inf D = 0, \text{ pas de minimum}}$$

(e) Le trinôme $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ est strictement négatif exactement entre ses racines : $E =]1\,,2[$.

$$\boxed{\sup E = 2, \quad \inf E = 1, \text{ ni maximum ni minimum}}$$

(f) Les éléments d'indice pair valent $\frac{n}{n+1} \in [0\,,1[$ et tendent vers 1 ; ceux d'indice impair valent $-\frac{n}{n+1} \in]-1\,,0[$ et tendent vers -1.

$$\boxed{\sup F = 1, \quad \inf F = -1, \text{ ni maximum ni minimum}}$$

Piège : en (c), il ne suffit pas de dire « $\sqrt{3}$ est un majorant » ; c'est la suite (d_n) d'éléments de C qui prouve qu'aucun majorant plus petit n'existe.

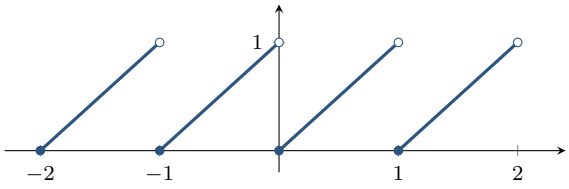
EXERCICE 2 ⋆⋆

On utilise la caractérisation de $\lfloor x \rfloor$ comme l'unique entier k tel que $k \leqslant x < k+1$, et sa conséquence : $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

(a) En ajoutant m à l'encadrement $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$, on obtient $\lfloor x \rfloor + m \leqslant x + m < \lfloor x \rfloor + m + 1$, et $\lfloor x \rfloor + m$ est entier.

$$\boxed{\lfloor x + m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m}$$

Avec $m = 1$, la fonction $\varphi : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ vérifie $\varphi(x+1) = \varphi(x)$: elle est 1-périodique, à valeurs dans $[0\,,1[$, et vaut x sur $[0\,,1[$.



La courbe est une « dent de scie » : chaque segment contient son extrémité gauche, sur l'axe, mais pas son extrémité droite, à hauteur 1.

(b) L'entier $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ est inférieur ou égal à $x + y$, donc à $\lfloor x + y \rfloor$, qui est le plus grand entier ayant cette propriété. Par ailleurs, $x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$, donc l'entier $\lfloor x + y \rfloor$ est au plus $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

$$\boxed{\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1}$$

Le cas $x = y = 0$ donne l'égalité à gauche, et le cas $x = y = \frac{1}{2}$ l'égalité à droite, puisqu'alors $\lfloor x+y \rfloor = 1$.

(c) Si $x \in \mathbb{Z}$, on a $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = x - x = 0$. Sinon, $\lfloor x \rfloor < x < \lfloor x \rfloor + 1$, d'où $-\lfloor x \rfloor - 1 < -x < -\lfloor x \rfloor$, et $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$.

$$\boxed{\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = 0 \text{ si } x \in \mathbb{Z}, \quad -1 \text{ sinon}}$$

(d) Notons $k = \lfloor x \rfloor$. Alors $kn \leqslant nx < kn + n$, et comme kn et $kn + n$ sont entiers,

$$kn \leqslant \lfloor nx \rfloor \leqslant kn + n - 1.$$

En divisant par n :

$$k \leqslant \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} < k + 1, \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor}.$$

(e) Écrivons $x = k + t$, avec $k = \lfloor x \rfloor$ et $t \in [0\,,1[$. Si $t < \frac{1}{2}$, alors $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = k$ et $\lfloor 2x \rfloor = 2k + \lfloor 2t \rfloor = 2k$. Si $t \geqslant \frac{1}{2}$, alors $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = k + 1$ et $\lfloor 2x \rfloor = 2k + 1$. Dans les deux cas :

$$\boxed{\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor}$$

EXERCICE 3 ⋆⋆

Toutes les bornes existent d'après le théorème 1, les parties considérées étant non vides et bornées. On utilise la caractérisation par ε (proposition 2).

(a) Le réel $\sup B$ majore B, donc A : il est supérieur au plus petit majorant de A. De même, $\inf B$ minore A.

$$\boxed{\sup A \leqslant \sup B, \qquad \inf A \geqslant \inf B}$$

(b) Le réel $M = \max(\sup A, \sup B)$ majore $A \cup B$. Réciproquement, un majorant de $A \cup B$ majore A et B, donc il est supérieur à $\sup A$ et à $\sup B$, donc à M.

$$\boxed{\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)}$$

(c) Le réel $S = \sup A + \sup B$ majore $A + B$. Soit $\varepsilon > 0$; il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $a > \sup A - \frac{\varepsilon}{2}$ et $b > \sup B - \frac{\varepsilon}{2}$, d'où $a + b > S - \varepsilon$.

$$\boxed{\sup(A + B) = \sup A + \sup B}$$

(d) Le réel $\lambda \sup A$ majore λA puisque $\lambda > 0$; et si $a > \sup A - \frac{\varepsilon}{\lambda}$, alors $\lambda a > \lambda \sup A - \varepsilon$. Enfin, m minore A si et seulement si $-m$ majore $-A$: le plus petit majorant de $-A$ est l'opposé du plus grand minorant de A.

$$\boxed{\sup(\lambda A) = \lambda \sup A, \qquad \sup(-A) = -\inf A}$$

L'intersection $A \cap B$ peut être vide ; lorsqu'elle ne l'est pas, (a) donne $\sup(A \cap B) \leqslant \min(\sup A, \sup B)$, et l'inégalité peut être stricte : avec $A = \{0, 2\}$ et $B = \{0, 1\}$, on a $\sup(A \cap B) = 0 < 1$. Pour les produits, avec $A = B = \{-2, 1\}$, on obtient $\{ab\} = \{4, -2, 1\}$, de borne supérieure 4, alors que $\sup A \cdot \sup B = 1$: la formule ne vaut que pour des parties de réels positifs.

EXERCICE 4 ⋆

1. Si $r + x$ était rationnel, $x = (r + x) - r$ le serait ; si rx l'était, $x = \frac{rx}{r}$ aussi, puisque $r \neq 0$.

$\boxed{r + x \text{ et } rx \text{ sont irrationnels}}$

2. Non : $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ et $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ sont rationnels, alors que $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ est irrationnel d'après la question 1.

$$\boxed{\text{la somme et le produit de deux irrationnels peuvent être rationnels ou non}}$$

3. Supposons $\sqrt{6} = \frac{p}{q}$, fraction irréductible. Alors $p^2 = 6q^2$ est pair, donc p est pair : $p = 2p'$, et $3q^2 = 2p'^2$. Ainsi $3q^2$ est pair, donc q^2 l'est, et q aussi : p et q ont le facteur commun 2, ce qui est absurde. Si maintenant $\sqrt{2} + \sqrt{3} = r$ était rationnel, on aurait $r^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, d'où $\sqrt{6} = \frac{r^2 - 5}{2} \in \mathbb{Q}$.

$$\boxed{\sqrt{6} \text{ et } \sqrt{2} + \sqrt{3} \text{ sont irrationnels}}$$

4. Le quotient est strictement positif. S'il valait $\frac{p}{q}$, avec p et q entiers naturels non nuls, on aurait $q \ln 2 = p \ln 3$, soit $2^q = 3^p$ en composant par l'exponentielle : un nombre pair égal à un nombre impair.

$$\boxed{\frac{\ln 2}{\ln 3} \notin \mathbb{Q}}$$

EXERCICE 5 ⋆⋆⋆

Toutes les bornes existent, puisque f est bornée. Notons $S = \sup_{(x,y)} f(x,y)$.

1. Pour tout x, le réel S majore $\{f(x,y) \mid y \in Y\}$, donc $\sup_y f(x,y) \leqslant S$, puis $\sup_x \sup_y f \leqslant S$. Réciproquement, pour tout couple (x,y), on a $f(x,y) \leqslant \sup_{y'} f(x,y') \leqslant \sup_{x'} \sup_{y'} f(x',y')$: ce dernier réel majore f, donc il est supérieur à S. L'autre ordre se traite de même.

$$\boxed{\sup_x \sup_y f(x,y) = \sup_y \sup_x f(x,y) = \sup_{(x,y)} f(x,y)}$$

2. Pour tous x et y, on a $\inf_{y'} f(x,y') \leqslant f(x,y) \leqslant \sup_{x'} f(x',y)$. Fixons y : le réel $\sup_{x'} f(x',y)$ majore donc tous les $\inf_{y'} f(x,y')$, d'où $\sup_x \inf_{y'} f \leqslant \sup_{x'} f(x',y)$. Le membre de gauche minore ainsi tous ces réels, donc leur borne inférieure.

$$\boxed{\sup_x \inf_y f(x,y) \leqslant \inf_y \sup_x f(x,y)}$$

3. Pour tout $x \in \{0,1\}$, $\inf_y |x-y| = 0$ (prendre $y = x$) ; pour tout y, $\sup_x |x-y| = 1$ (prendre $x = 1-y$).

$$\boxed{\sup_x \inf_y f = 0 < 1 = \inf_y \sup_x f}$$

À retenir : on peut toujours échanger deux sup, ou deux inf, mais pas un sup et un inf. C'est la même règle que pour les quantificateurs au chapitre 1 : on échange deux $\forall$, mais pas un $\forall$ et un $\exists$.

EXERCICE 6 ⋆⋆⋆

1. Pour $g = p + q\sqrt{2}$ et $g' = p' + q'\sqrt{2}$ dans G, on a $g + g' = (p+p') + (q+q')\sqrt{2}$ et $gg' = (pp' + 2qq') + (pq' + p'q)\sqrt{2}$, qui sont dans G ; de même $-g \in G$. Enfin $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$, puisque $1{,}96 < 2 < 2{,}25$.

$$\boxed{G \text{ est stable par } +, \times \text{ et passage à l'opposé ; } \ 0{,}4 < u < 0{,}5}$$

2. Par récurrence, $u^0 = 1 \in G$ et $u^{n+1} = u \cdot u^n \in G$. De plus $0 < u^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$, qui tend vers 0 (proposition 9).

$$\boxed{u^n \in G \quad \text{et} \quad u^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

3. Soit n tel que $u^n < b - a$, et $k = \lfloor a/u^n \rfloor + 1 \in \mathbb{Z}$. Alors $k - 1 \leqslant \frac{a}{u^n} < k$, d'où

$$a < k\,u^n \leqslant a + u^n < b,$$

et $k\,u^n \in G$, comme somme de $|k|$ éléments égaux à $\pm u^n$. $\boxed{G \text{ est dense dans } \mathbb{R}}$

4. Un élément $p + q\sqrt{2}$ est rationnel si et seulement si $q = 0$, d'après l'exercice 4 : les éléments rationnels de G sont les entiers. En appliquant la question 3 à des sous-intervalles disjoints de $]a\,,b[$, on trouve une infinité d'éléments de G dans $]a\,,b[$, alors que cet intervalle ne contient qu'un nombre fini d'entiers.

$$\boxed{G \setminus \mathbb{Q} \text{ est dense dans } \mathbb{R}}$$

L'exercice 54 généralisera ce résultat à $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ pour tout irrationnel α, par une méthode différente.

EXERCICE 7 ⋆⋆

1. On encadre 2 entre deux carrés consécutifs à chaque précision :

$$1{,}4^2 = 1{,}96, \quad 1{,}41^2 = 1{,}9881, \quad 1{,}414^2 = 1{,}999\,396, \quad 1{,}4142^2 = 1{,}999\,961\,64,$$

$$1{,}5^2 = 2{,}25, \quad 1{,}42^2 = 2{,}0164, \quad 1{,}415^2 = 2{,}002\,225, \quad 1{,}4143^2 = 2{,}000\,244\,49,$$

et $1 \leqslant 2 < 4$ au rang 0.

$$\boxed{d_0 = 1, \quad d_1 = 1{,}4, \quad d_2 = 1{,}41, \quad d_3 = 1{,}414, \quad d_4 = 1{,}4142}$$

2. On construit (r_n) par récurrence, à l'aide de la densité de $\mathbb{Q}$ (théorème 2) : on choisit un rationnel r_0 dans $]x-1\,,x[$, puis, une fois r_n construit, un rationnel r_{n+1} appartenant à l'intervalle non vide

$$\left]\max\left(r_n, x - \frac{1}{n+2}\right), x\right[.$$

La suite est strictement croissante, et $x - \frac{1}{n+1} < r_n < x$ donne $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ par encadrement. On procède de même au-dessus de x avec des irrationnels, denses eux aussi.

$$\boxed{\text{tout réel est limite d'une suite strictement monotone de rationnels ou d'irrationnels}}$$

3. Si $r \in A$, alors $r^2 < 2$ et $r > 0$, donc $r < \sqrt{2}$: $\sqrt{2}$ majore A. Les d_n sont des rationnels positifs, inférieurs ou égaux à $\sqrt{2}$ et distincts de lui, donc $d_n^2 < 2$ et $d_n \in A$; et $d_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{2}$. La proposition 13 donne :

$$\boxed{\sup A = \sqrt{2}}$$

On retrouve la coupure de l'introduction du cours : la classe A n'a pas de plus grand élément, et sa borne supérieure n'est pas rationnelle.

LIMITES : DÉFINITIONS ET CALCULS

EXERCICE 8 ⋆

On factorise le terme prépondérant, on multiplie par la quantité conjuguée pour les différences de racines, et l'on utilise les croissances comparées (théorème 7). On utilise plusieurs fois le fait que $\sqrt{1+h_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ lorsque $h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ avec $h_n \geqslant -1$, qui découle de $\left|\sqrt{1+h}-1\right| = \frac{|h|}{\sqrt{1+h}+1} \leqslant |h|$.

- **(a)** $\dfrac{n^2+3n}{2n^2-1} = \dfrac{1+3/n}{2-1/n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{\dfrac{1}{2}}$
- **(b)** $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{0}$
- **(c)** $\sqrt{n^2+n}-n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \dfrac{1}{\sqrt{1+1/n}+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{\dfrac{1}{2}}$
- **(d)** $\dfrac{3^n+(-2)^n}{3^n-(-2)^n} = \dfrac{1+(-2/3)^n}{1-(-2/3)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{1}$, puisque $|-\frac{2}{3}| < 1$.
- **(e)** $\left|\dfrac{n+(-1)^n}{n^2+1}\right| \leqslant \dfrac{n+1}{n^2} \leqslant \dfrac{2}{n}$ pour $n \geqslant 1$, d'où la limite $\boxed{0}$.
- **(f)** $\dfrac{\ln n+1}{n+4} = \dfrac{\frac{\ln n}{n}+\frac{1}{n}}{1+\frac{4}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{0}$, par le théorème 7.
- **(g)** Pour $n \geqslant 1$, $n^4+1 \leqslant 2n^4$, donc $\dfrac{\mathrm{e}^n+n^2}{n^4+1} \geqslant \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{e}^n}{n^4}$, qui tend vers $+\infty$ comme inverse d'une suite positive de limite nulle : limite $\boxed{+\infty}$.

- **(h)** $0 \leqslant \dfrac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n} \leqslant \dfrac{\sqrt{n}}{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, d'où la limite $\boxed{0}$.
- **(i)** $\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n} = \dfrac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}} = \dfrac{2}{\sqrt{1+1/n}+\sqrt{1-1/n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{1}$
- **(j)** $\left|\dfrac{\cos n}{n+1}\right| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, d'où la limite $\boxed{0}$ (proposition 8).
- **(k)** Le numérateur est au moins $n-1$ et le dénominateur au plus 3 : $u_n \geqslant \dfrac{n-1}{3}$, limite $\boxed{+\infty}$.
- **(l)** $\dfrac{n^3\,2^n}{n!} = \dfrac{n^3}{(3/2)^n} \cdot \dfrac{3^n}{n!}$, produit de deux suites de limite nulle (théorème 7), et $\dfrac{3^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: limite $\boxed{0}$.

Piège : en (k), le quotient de deux suites qui oscillent n'a pas de raison d'osciller ; on ne conclut à la divergence qu'après avoir comparé les termes.

EXERCICE 9 ⋆

1. On a $\left|\dfrac{3n-1}{n+2} - 3\right| = \dfrac{7}{n+2} < \dfrac{7}{n}$ pour $n \geqslant 1$. Soit $\varepsilon > 0$, et $N = \lfloor\frac{7}{\varepsilon}\rfloor + 1 > \frac{7}{\varepsilon}$. Pour $n \geqslant N$, $|u_n - 3| < \frac{7}{n} \leqslant \frac{7}{N} < \varepsilon$.

$$\boxed{N = \left\lfloor\frac{7}{\varepsilon}\right\rfloor + 1 \text{ convient ; pour } \varepsilon = 10^{-2},\ N = 701}$$

Le plus petit rang convenable est en fait 698, puisque $\frac{7}{n+2} \leqslant 10^{-2}$ équivaut à $n \geqslant 698$: la définition demande *un* rang, pas le meilleur.

2. Pour $n \geqslant 1$, $n+1 \leqslant 2n$, donc $\frac{n^2}{n+1} \geqslant \frac{n}{2}$. Pour $A > 0$, le rang $N = \lfloor 2A\rfloor + 1$ convient : pour $n \geqslant N$, $\frac{n^2}{n+1} \geqslant \frac{n}{2} > A$. $\boxed{\dfrac{n^2}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$

3. La négation de $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ est $\exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N,\ |u_n - \ell| > \varepsilon$. Soit ℓ un réel. Comme $|1-\ell| + |-1-\ell| \geqslant |1-(-1)| = 2$, l'un des deux nombres $|1-\ell|$, $|-1-\ell|$ est au moins $1 > \frac{1}{2}$. Or tout rang N est suivi d'indices pairs et impairs : il existe $n \geqslant N$ tel que $|u_n - \ell| > \frac{1}{2}$.

$$\boxed{((-1)^n) \text{ ne converge vers aucun réel}}$$

4. La négation de $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ est $\exists A \in \mathbb{R},\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N,\ u_n < A$. Ici $u_n = 0$ pour n impair, donc $A = 1$ convient ; et $u_{2n} = 4n$ n'est pas majorée.

$$\boxed{(u_n) \text{ n'est pas majorée, mais ne tend pas vers } +\infty}$$

EXERCICE 10 ⋆⋆

1. La somme de deux suites convergentes converge (théorème 4). La somme d'une suite convergente (u_n) et d'une suite divergente (v_n) diverge : sinon $v_n = (u_n + v_n) - u_n$ convergerait. La somme de deux suites divergentes peut converger, $(-1)^n + (-1)^{n+1} = 0$, ou diverger, $(-1)^n + (-1)^n = 2(-1)^n$.

$$\boxed{\text{C} + \text{C} = \text{C} ;\ \text{C} + \text{D} = \text{D} ;\ \text{D} + \text{D} : \text{on ne peut rien dire}}$$

2. Le produit de deux suites convergentes converge. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \neq 0$ et si (v_n) diverge, $(u_n v_n)$ diverge, sinon $v_n = \frac{u_n v_n}{u_n}$ convergerait, u_n étant non nul à partir d'un certain rang. Si $\ell = 0$, tout est possible : $\frac{1}{n} \cdot n = 1$ converge, $\frac{1}{n} \cdot n^2 = n$ diverge. Deux suites divergentes : $(-1)^n \cdot (-1)^n = 1$ converge, $n \cdot n$ diverge.

$$\boxed{\text{C} \times \text{C} = \text{C} ;\ \text{C (limite non nulle)} \times \text{D} = \text{D} ;\ \text{sinon on ne peut rien dire}}$$

3. On a $u_n = \frac{1}{2}((u_n+v_n)+(u_n-v_n))$ et $v_n = \frac{1}{2}((u_n+v_n)-(u_n-v_n))$: les deux suites convergent. En revanche, la convergence de la somme et du produit ne suffit pas : avec $(u_n, v_n) = (1,0)$ pour n pair et $(0,1)$ pour n impair, on a $u_n+v_n = 1$ et $u_n v_n = 0$, alors que les deux suites divergent.

$$\boxed{u_n \pm v_n \text{ convergent } \implies u_n, v_n \text{ convergent ; faux avec somme et produit}}$$

La somme et le produit déterminent la paire $\{u_n, v_n\}$, comme ensemble des racines du trinôme

$$X^2 - (u_n+v_n)X + u_n v_n,$$

mais pas l'ordre des deux racines : c'est ce que l'exemple exploite.

EXERCICE 11 ⋆⋆

1. La proposition 1 du cours donne $\big||u_n|-|\ell|\big| \leqslant |u_n-\ell|$, d'où $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\ell|$ par la proposition 8. La réciproque est fausse : $|(-1)^n| = 1$ converge, $((-1)^n)$ non. Pour $\ell = 0$, en revanche, $|u_n-0| = \big||u_n|-0\big|$: les deux énoncés sont identiques.

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \implies |u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\ell|, \text{ réciproque fausse sauf pour } \ell = 0}$$

2. Selon que $a \geqslant b$ ou $a < b$, on vérifie :

$$\boxed{\max(a,b) = \frac{a+b+|a-b|}{2} \qquad \min(a,b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}}$$

Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$, la question 1 et le théorème 4 donnent la convergence de ces expressions.

$$\boxed{\max(u_n,v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \max(\ell,\ell') \qquad \min(u_n,v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \min(\ell,\ell')}$$

EXERCICE 12 ⋆⋆

(a) La somme se calcule (chapitre 3) : $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2n^2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n}$, de limite $\boxed{\dfrac{1}{2}}$.

(b) Chacun des n termes est compris entre $\frac{n}{n^2+n}$ et $\frac{n}{n^2+1}$:

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant \frac{n^2}{n^2+1}, \qquad \text{d'où la limite } \boxed{1} \text{ par encadrement.}$$

(c) On somme les encadrements $kx - 1 < \lfloor kx \rfloor \leqslant kx$:

$$x\,\frac{n(n+1)}{2} - n < \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor \leqslant x\,\frac{n(n+1)}{2},$$

et, en divisant par n^2, les deux bornes tendent vers $\frac{x}{2}$: limite $\boxed{\dfrac{x}{2}}$.

(d) Pour $n \geqslant 2$, on isole les deux derniers termes et l'on majore les $n-2$ autres par $(n-2)!$:

$$1 \leqslant u_n \leqslant 1 + \frac{1}{n} + \frac{(n-2)\,(n-2)!}{n!} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n(n-1)} \leqslant 1 + \frac{2}{n},$$

d'où la limite $\boxed{1}$: la somme des factorielles est « dominée » par la dernière.

(e) Pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, le quotient $\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n-k}{k+1}$ est supérieur ou égal à 1 si et seulement si $k \leqslant \frac{n-1}{2}$: les coefficients croissent puis décroissent, et pour $2 \leqslant k \leqslant n-2$, $\binom{n}{k} \geqslant \binom{n}{2}$. Pour $n \geqslant 4$, en isolant les termes $k \in \{0,1,n-1,n\}$:

$$2 \leqslant u_n \leqslant 2 + \frac{2}{n} + (n-3)\,\frac{2}{n(n-1)} \leqslant 2 + \frac{4}{n},$$

d'où la limite $\boxed{2}$. Numériquement, $u_{60} \approx 2{,}0345$.

(f) Les n termes sont compris entre $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ et $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, d'où

$$\frac{1}{\sqrt{1+1/n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}}, \qquad \text{et la limite } \boxed{1}.$$

À retenir : pour une somme de n termes, on encadre chaque terme par le plus petit et le plus grand, puis l'on multiplie par n. Cela ne marche que si ces deux bornes, multipliées par n, ont la même limite ; sinon, comme en (d) et (e), il faut isoler les termes prépondérants.

EXERCICE 13 ⋆⋆

1. Comme $0 \leqslant v_n \leqslant 1$ et $u_n \geqslant 0$, on a $u_n v_n \leqslant u_n \leqslant 1$, et l'encadrement donne $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$; de même pour v_n. $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,\ v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$

2. On a $6 - u_n v_n \geqslant 6 - 2u_n = 2(3-u_n) \geqslant 0$, donc $0 \leqslant 3 - u_n \leqslant \frac{1}{2}(6 - u_n v_n)$, qui tend vers 0. De même, $6 - u_n v_n \geqslant 3(2 - v_n) \geqslant 0$.

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3, \qquad v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2}$$

3. Comme $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, on a $u_n^2 \leqslant u_n$, d'où $\frac{u_n+u_n^2}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$, et l'encadrement donne $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$.
L'idée commune est qu'un produit ou une moyenne ne peut atteindre sa valeur maximale que si chaque facteur atteint la sienne ; les bornes imposées transforment cette remarque en encadrement.

EXERCICE 14 ⋆⋆⋆

1. Si $\ell < 1$, posons $k = \frac{1+\ell}{2} \in]\ell\,, 1[$. Avec $\varepsilon = k - \ell$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k$ à partir d'un certain rang, et la proposition 10 du cours donne $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$.

2. Si $\ell > 1$ est réel, posons $k = \frac{1+\ell}{2} > 1$; si $\ell = +\infty$, posons $k = 2$. Dans les deux cas, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant k$ pour $n \geqslant N$, d'où $u_n \geqslant u_N\, k^{n-N}$, qui tend vers $+\infty$ (proposition 9). $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$

3. Les suites $u_n = \frac{1}{n}$, $u_n = 1$ et $u_n = n$ vérifient $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, et tendent respectivement vers 0, 1 et $+\infty$.

$$\boxed{\ell = 1 : \text{ cas douteux}}$$

4. On calcule chaque fois la limite du quotient de deux termes consécutifs.

- $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1{,}01}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{1{,}01} < 1$: $\boxed{\dfrac{n^{10}}{1{,}01^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$, bien que $u_{1000} \approx 4{,}8 \times 10^{25}$ soit encore énorme.
- $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: $\boxed{\dfrac{a^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$
- $\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4$; le quotient tend donc vers $\frac{4}{5} < 1$ dans le premier cas et vers $\frac{4}{3} > 1$ dans le second :

$$\boxed{\binom{2n}{n}\frac{1}{5^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \binom{2n}{n}\frac{1}{3^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$$

Le coefficient central $\binom{2n}{n}$ croît donc à peu près comme 4^n ; le chapitre 10 donnera un résultat plus précis.

EXERCICE 15 ⋆⋆

1. Une suite stationnaire converge vers sa valeur finale. Réciproquement, si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, il existe N tel que $|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{3}$ pour $n \geqslant N$; alors $|u_n - u_m| \leqslant \frac{2}{3} < 1$ pour n, $m \geqslant N$, et deux entiers aussi proches sont égaux.

$$\boxed{\text{une suite d'entiers converge si et seulement si elle est stationnaire}}$$

2. Si $\ell \notin \mathbb{Z}$, notons $k = \lfloor \ell \rfloor$, de sorte que $k < \ell < k+1$. Avec $\varepsilon = \frac{1}{2}\min(\ell - k, k+1-\ell)$, on a $u_n \in]k\,,k+1[$ à partir d'un certain rang, donc $\lfloor u_n \rfloor = k$. Si $\ell \in \mathbb{Z}$, les suites $\ell + \frac{1}{n+1}$, $\ell - \frac{1}{n+1}$ et $\ell + \frac{(-1)^n}{n+1}$ ont pour parties entières ℓ, $\ell - 1$, et alternativement ℓ et $\ell - 1$.

$$\boxed{\ell \notin \mathbb{Z} : \lfloor u_n \rfloor \to \lfloor \ell \rfloor \qquad \ell \in \mathbb{Z} : \text{ limite } \ell,\ \ell - 1,\ \text{ou divergence}}$$

3. Soit A un réel. Les indices n tels que $u_n \leqslant A$ ont des images deux à deux distinctes dans l'ensemble fini $\mathbb{N} \cap [0\,,A]$: ils sont en nombre fini. Au-delà du plus grand d'entre eux, on a $u_n > A$. $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$

La question 2 montre que la partie entière n'est pas continue aux entiers ; le chapitre 8 donnera un nom à ce phénomène.

EXERCICE 16 ⋆⋆⋆

1. Par récurrence sur n, à l'aide de $\sin(2t) = 2\sin t \cos t$. Pour $n = 1$, $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \sin x$. Si la formule est vraie au rang n, alors

$$P_{n+1} \cdot 2^{n+1} \sin\frac{x}{2^{n+1}} = P_n \cdot 2^n \cdot 2\sin\frac{x}{2^{n+1}}\cos\frac{x}{2^{n+1}} = P_n \cdot 2^n \sin\frac{x}{2^n} = \sin x.$$

$$\boxed{P_n \cdot 2^n \sin\frac{x}{2^n} = \sin x}$$

2. Avec $t = \frac{x}{2^n} > 0$, l'encadrement multiplié par 2^n donne

$$x - \frac{x^3}{6\cdot 4^n} \leqslant 2^n \sin\frac{x}{2^n} \leqslant x,$$

d'où $2^n \sin\frac{x}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \neq 0$. Comme $\sin\frac{x}{2^n} > 0$, on peut diviser, et le théorème 4 donne :

$$\boxed{P_n = \frac{\sin x}{2^n \sin(x/2^n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\sin x}{x}}$$

3. Pour $x = \frac{\pi}{2}$, la limite vaut $\frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$. Les facteurs sont $c_k = \cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$, avec $c_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, et la formule $\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$, avec $\cos\frac{\theta}{2} > 0$, donne $2c_{k+1} = \sqrt{2+2c_k}$. Ainsi $2c_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $2c_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, et ainsi de suite.

$$\boxed{\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots}$$

Avec dix facteurs, on obtient 0,636 620 0, contre $\frac{2}{\pi} \approx 0{,}636\,619\,8$: l'erreur est de l'ordre de $\frac{x^2}{6\cdot 4^n}$, comme le montre l'encadrement de la question 2. Cette formule, publiée par Viète en 1593, est la première expression de π par un produit infini dans les mathématiques européennes.

EXERCICE 17 ⋆

On étudie le signe de $u_{n+1}-u_n$, ou la position du quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1 pour les suites positives.

(a) Pour $n \geqslant p$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)!\,(n-p)!}{(n+1-p)!\,n!} = \dfrac{n+1}{n+1-p} \geqslant 1$.

$$\boxed{\text{croissante, constante si } p=0}$$

Pour $p \geqslant 1$, la formule de Pascal donne $u_{n+1}-u_n = \binom{n}{p-1} \geqslant 1$, donc $u_n \geqslant u_p + (n-p)$: la suite tend vers $+\infty$, et ne converge que si $p=0$.

(b) On calcule la différence :

$$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0.$$

$$\boxed{\text{strictement décroissante, minorée par 0 : convergente}}$$

Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, sa limite est celle de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, dont on obtient ainsi une seconde preuve de convergence.

(c) On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{2} \geqslant 1$ pour $n \geqslant 1$, avec égalité seulement pour $n=1$.

$$\boxed{\text{croissante à partir du rang 1, et } u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$$

La limite résulte de l'exercice 14, le quotient tendant vers $+\infty$.

(d) On calcule la différence, puis l'on reconnaît un logarithme :

$$u_{n+1}-u_n = \ln(n+1) - (n+1)\ln(n+1) + n\ln n = -n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0.$$

$$\boxed{\text{strictement décroissante, et } u_n = \ln\frac{n!}{n^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty}$$

La limite vient de $\frac{n!}{n^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (théorème 7) : la suite diverge.

(e) On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2n+2}{2n+3} < 1$. $\boxed{\text{strictement décroissante et positive : convergente}}$

Sa limite est nulle. En effet, $\frac{2k}{2k+1} \leqslant \frac{2k+1}{2k+2}$, puisque $2k(2k+2) = 4k^2+4k < (2k+1)^2$, donc

$$u_n^2 \leqslant \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k+2} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+2} = \frac{1}{n+1},$$

par télescopage, d'où $0 < u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

(f) Par récurrence, $u_n > 0$ pour tout n, et

$$u_{n+1}-u_n = \frac{3u_n^2 - u_n - 4u_n^2}{1+4u_n} = -\frac{u_n(u_n+1)}{1+4u_n} < 0.$$

$$\boxed{\text{strictement décroissante et positive : convergente}}$$

La limite est nulle : $\frac{3u_n}{1+4u_n} < \frac{3}{4}$, donc $u_{n+1} \leqslant \frac{3}{4}u_n$ et $u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n u_0$.

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. C'est une somme géométrique (chapitre 3) :

$$S_n = \frac{1-3^{-(n+1)}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\Big(1-\frac{1}{3^{n+1}}\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{\frac{3}{2}}.$$

2. On change d'indice $k = j+1$:

$$T_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{3^k} = \sum_{j=0}^{n} \frac{j+1}{3^{j+1}} = \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{n}\frac{j}{3^j} + \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{3^j} = \boxed{\frac{T_n+S_n}{3}}.$$

3. La suite (T_n) est croissante, comme somme de termes positifs, et $S_n \leqslant \frac{3}{2}$. Donc

$$T_n \leqslant T_{n+1} = \frac{T_n+S_n}{3} \leqslant \frac{T_n}{3}+\frac{1}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad T_n \leqslant \frac{3}{4}.$$

Croissante et majorée, elle converge vers un réel t (théorème 8), et le passage à la limite dans la relation de la question 2 donne $t = \frac{t+3/2}{3}$.

$$\boxed{T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{3}{4}}$$

Il fallait d'abord établir la convergence : la relation $t = \frac{t+3/2}{3}$ n'a de sens qu'une fois la limite t connue pour exister.

EXERCICE 19 ⋆⋆

(a) On a $u_n = H_{2n} - H_n$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$, avec $H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. On calcule les différences :

$$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2} > 0,$$

$$v_{n+1}-v_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}-\frac{1}{n(n+1)} < 0,$$

puisque $(2n+1)(2n+2) > n(n+1)$. Enfin $v_n - u_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$$\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes}}$$

L'exercice 21 montrera que leur limite commune est $\ln 2$.

(b) On note $\Sigma_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$, et l'on utilise $\sqrt{m+1}-\sqrt{m} = \frac{1}{\sqrt{m+1}+\sqrt{m}}$:

$$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} > 0, \qquad v_{n+1}-v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < 0,$$

puisque $\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1} > 2\sqrt{n+1} > \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$. Enfin $v_n - u_n = 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$$\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes}}$$

Leur limite commune c vaut environ $-1{,}46$. Comme (v_n) est bornée, $\frac{\Sigma_n}{\sqrt{n}} = 2 + \frac{v_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{2}$: la somme croît comme $2\sqrt{n}$, ce que la comparaison avec $\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ rendra naturel au chapitre 20.

EXERCICE 20 ⋆⋆

1. On calcule les différences de deux termes de même parité :

$$S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leqslant 0, \qquad S_{2n+3} - S_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+3} \geqslant 0,$$

et $S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Les suites (S_{2n}), décroissante, et (S_{2n+1}), croissante, sont adjacentes ; elles convergent vers un même réel S, et la proposition 11 du cours donne $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$.

$$\boxed{(S_n) \text{ converge}}$$

2. D'après le théorème 9, $S_{2m+1} \leqslant S \leqslant S_{2m+2} \leqslant S_{2m}$ pour tout m : le réel S est toujours compris entre deux sommes consécutives S_n et S_{n+1}, dont la différence vaut a_{n+1} en valeur absolue.

$$\boxed{|S - S_n| \leqslant a_{n+1}}$$

3. Avec $a_k = \frac{1}{2k+1}$, qui décroît vers 0, il suffit que $\frac{1}{2n+3} \leqslant 10^{-3}$, soit $n \geqslant 498{,}5$.

$$\boxed{n = 499, \text{ soit } 500 \text{ termes}}$$

La convergence est lente, ce qui explique que l'on n'utilise pas cette série pour calculer π ; la formule de Viète (exercice 16) gagne près d'un chiffre exact par facteur.

EXERCICE 21 ⋆⋆⋆

1. Avec $t = 1 + x > 0$, l'inégalité $\ln t \leqslant t - 1$ donne $\ln(1 + x) \leqslant x$. Avec $t = \frac{1}{1+x}$, elle donne $-\ln(1 + x) \leqslant \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}$.

$$\boxed{\frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x}$$

2. Avec $x = \frac{1}{n}$, la minoration donne $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n+1}$, et avec $x = \frac{1}{n+1}$, la majoration donne $\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n+1}$. D'où

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant 0, \qquad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \geqslant 0,$$

et $0 \leqslant u_n - v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$.

$$\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes}}$$

Avec $H_{10} \approx 2{,}928\,97$, on obtient $v_{10} = H_{10} - \ln 11 \approx 0{,}5311$ et $u_{10} = H_{10} - \ln 10 \approx 0{,}6264$.

$$\boxed{0{,}531 \leqslant \gamma \leqslant 0{,}627}$$

La valeur exacte est $\gamma \approx 0{,}5772$; on ne sait toujours pas si ce nombre est rationnel.

3. Comme $u_n \geqslant \gamma$, on a $H_n \geqslant \ln n + \gamma \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Et $\frac{H_n}{\ln n} = 1 + \frac{u_n}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, puisque (u_n) est bornée.

$$\boxed{H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \qquad \frac{H_n}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$$

4. On a $H_{2n} - H_n = (u_{2n} + \ln 2n) - (u_n + \ln n) = u_{2n} - u_n + \ln 2$, et (u_{2n}), extraite de (u_n), tend vers γ.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = H_{2n} - H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2}$$

EXERCICE 22 ⋆⋆⋆

1. La suite (u_n) croît strictement, puisque l'on ajoute $\frac{1}{(n+1)!} > 0$, et le calcul du cours donne $v_{n+1}-v_n = -\frac{1}{n(n+1)\,(n+1)!} < 0$. Pour tout $n \geqslant 1$, le théorème 9 donne alors $u_n < u_{n+1} \leqslant \ell \leqslant v_{n+1} < v_n$.

$$\boxed{u_n < \ell < v_n}$$

2. Au rang $n = q$, on multiplie l'encadrement par $q \cdot q!$:

$$q \cdot q!\, u_q < p \cdot q! < q \cdot q!\, u_q + 1.$$

Or $q!\, u_q = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!}$ est un entier, de même que $p \cdot q!$: on aurait un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs.

$$\boxed{\ell \notin \mathbb{Q}}$$

3. On calcule $u_6 = \frac{1957}{720} \approx 2{,}718\,056$ et $v_6 = u_6 + \frac{1}{4320} = \frac{11\,743}{4320} \approx 2{,}718\,287$.

$$\boxed{2{,}718\,05 < \ell < 2{,}718\,29 \text{ : trois décimales exactes, } \ell \approx 2{,}718}$$

L'argument repose sur la vitesse de convergence : l'écart $v_q - u_q = \frac{1}{q \cdot q!}$ est trop petit pour laisser passer une fraction de dénominateur q. C'est l'idée de nombreuses preuves d'irrationalité.

EXERCICE 23 ⋆⋆

1. Par récurrence, u_n et v_n sont strictement positifs, ce qui permet de définir les termes suivants, et

$$u_{n+1}v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \cdot \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n} = u_nv_n = \cdots = u_0v_0.$$

$$\boxed{u_nv_n = x}$$

2. En réduisant au même dénominateur :

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n + v_n)^2 - 4u_nv_n}{2(u_n + v_n)} = \boxed{\frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}} \geqslant 0.$$

Donc $u_n \geqslant v_n$ pour tout n, ce qui est aussi vrai au rang 0 puisque $x > 1$. Ainsi $u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \leqslant 0$, et $v_n = \frac{x}{u_n}$ croît. Enfin, comme $u_n - v_n \leqslant u_n + v_n$, on a $u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(u_n - v_n)$, d'où

$$0 \leqslant u_n - v_n \leqslant \frac{x-1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Les suites sont adjacentes ; leur limite $\ell > 0$ vérifie $\ell^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} u_nv_n = x$.

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{x}, \quad v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{x}}$$

3. Comme $u_n + v_n \geqslant 2\sqrt{u_nv_n} = 2\sqrt{x} > 2$, la question 2 donne $0 \leqslant u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}(u_n - v_n)^2$. Pour $x = 2$, on part de $u_0 - v_0 = 1$:

$$u_1 - v_1 \leqslant \frac{1}{4}, \quad u_2 - v_2 \leqslant \frac{1}{4^3}, \quad u_3 - v_3 \leqslant \frac{1}{4^7}, \quad u_4 - v_4 \leqslant \frac{1}{4^{15}} \approx 9{,}3 \times 10^{-10}.$$

$$\boxed{0 \leqslant u_4 - \sqrt{2} \leqslant 10^{-9}}$$

L'erreur est élevée au carré à chaque étape : le nombre de décimales exactes double environ à chaque itération. On parle de convergence *quadratique*. En réalité, $u_4 - \sqrt{2} \approx 1{,}6 \times 10^{-12}$.

4. Pour $x = 2$, on a $v_n = \frac{2}{u_n}$, d'où $\boxed{u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)}$. On retrouve la méthode attribuée à Héron d'Alexandrie : on remplace une approximation u de $\sqrt{2}$ par la moyenne de u et de $\frac{2}{u}$, qui l'encadrent.

EXERCICE 24 ⋆⋆⋆

1. On a $\frac{s+t}{2} - \sqrt{st} = \frac{1}{2}(\sqrt{s} - \sqrt{t})^2 \geqslant 0$. Par récurrence, u_n et v_n sont strictement positifs, et la racine carrée a un sens ; la première inégalité donne $v_{n+1} \leqslant u_{n+1}$.

$$\boxed{\sqrt{st} \leqslant \frac{s+t}{2}, \qquad v_n \leqslant u_n \text{ pour tout } n}$$

2. Comme $v_n \leqslant u_n$, on a $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \leqslant u_n$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geqslant \sqrt{v_n^2} = v_n$. De plus

$$0 \leqslant u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant u_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2},$$

d'où $u_n - v_n \leqslant \frac{a-b}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$$\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes}}$$

3. D'après la question 1, $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2$, et $\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n} = \frac{u_n - v_n}{\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}}$. Comme $u_n \geqslant v_n \geqslant b$, on a $(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n})^2 \geqslant 4b$.

$$\boxed{u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n})^2} \leqslant \frac{(u_n - v_n)^2}{8b}}$$

Pour $a = 2$ et $b = 1$, on calcule $u_1 - v_1 = \frac{3}{2} - \sqrt{2} \approx 0{,}0858$, puis la majoration donne $u_2 - v_2 \leqslant 9{,}2 \times 10^{-4}$, $u_3 - v_3 \leqslant 1{,}1 \times 10^{-7}$ et $u_4 - v_4 \leqslant 1{,}4 \times 10^{-15}$.

$$\boxed{\text{quatre étapes suffisent : } M(2,1) \approx 1{,}456\,791\,031}$$

La moyenne arithmético-géométrique, étudiée par Lagrange puis par Gauss, converge quadratiquement comme la méthode de Héron ; elle intervient aujourd'hui dans les algorithmes qui calculent π avec un très grand nombre de décimales.

Suites extraites et théorème de Bolzano-Weierstrass

EXERCICE 25 ⋆

On applique la méthode du cours : on extrait deux suites de limites différentes (proposition 11).

(a) $u_{2n} = \frac{2n}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $u_{2n+1} = -\frac{2n+1}{2n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$. $\boxed{\text{divergente}}$

(b) $u_{8n} = \frac{1}{8n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $u_{8n+2} = 1 + \frac{1}{8n+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. $\boxed{\text{divergente}}$

(c) $u_{2n} = 2n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $u_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. $\boxed{\text{divergente, non bornée, sans limite infinie}}$

(d) Soit T une période et i, j deux indices tels que $u_i \neq u_j$. Les suites extraites $(u_{i+kT})_k$ et $(u_{j+kT})_k$ sont constantes, égales à u_i et à u_j. $\boxed{\text{divergente}}$

La suite (c) montre qu'une suite non majorée peut ne pas tendre vers $+\infty$: il faut que *tous* les termes finissent par dépasser A, pas seulement certains.

EXERCICE 26 ⋆⋆

1. Notons a, b, c les limites de (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}). La suite (u_{6n}) est extraite de (u_{2n}) et de (u_{3n}), donc $a = c$. La suite (u_{6n+3}) est extraite de (u_{3n}), car $6n + 3 = 3(2n + 1)$, et de (u_{2n+1}), car $6n + 3$ est impair : donc $b = c$. Ainsi $a = b$, et la proposition 11 (ii) conclut.

$$\boxed{(u_n) \text{ converge}}$$

2. On a $u_{2n+1} - u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} b - a$, et cette suite est extraite de $(u_{n+1} - u_n)$, qui tend vers 0 : donc $a = b$. $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$

3. Soit ℓ et ℓ' les limites. La suite (u_{2n}) tend vers ℓ et vers ℓ' ; la suite $(-u_{2n+1})$ tend vers $-\ell$ et vers ℓ'. Donc $\ell = \ell' = -\ell$. $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

EXERCICE 27 ⋆⋆

1. Soit $(u_{\varphi(n)})$ majorée par M. Pour tout n, on a $\varphi(n) \geqslant n$, donc $u_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant M$ par croissance : (u_n) est majorée, et elle converge (théorème 8). $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$

2. Une suite convergente est bornée : la question 1 montre que (u_n) converge vers un réel ℓ', et la suite extraite converge vers ℓ' et vers ℓ, d'où $\ell' = \ell$. $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell}$

3. Oui : si (u_n) était majorée, elle convergerait et toutes ses suites extraites aussi ; elle n'est donc pas majorée, et le théorème 8 donne $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$.

Pour une suite monotone, une seule suite extraite suffit donc à connaître le comportement de toute la suite.

EXERCICE 28 ⋆⋆⋆

1. Les formules d'addition du chapitre 4 donnent :

$$\boxed{\cos\big((n+1)\theta\big) + \cos\big((n-1)\theta\big) = 2\cos(n\theta)\cos\theta \qquad \cos\big((n+1)\theta\big) = \cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta}$$

2. Les suites $\big(\cos((n\pm1)\theta)\big)$ tendent aussi vers ℓ, et le passage à la limite dans la première formule donne $2\ell = 2\ell\cos\theta$. Comme $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, $\cos\theta \neq 1$, donc $\ell = 0$. La seconde formule, avec $\sin\theta \neq 0$, donne alors

$$\sin(n\theta) = \frac{\cos(n\theta)\cos\theta - \cos\big((n+1)\theta\big)}{\sin\theta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

d'où $\cos^2(n\theta) + \sin^2(n\theta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors que cette somme vaut 1. $\boxed{\big(\cos(n\theta)\big) \text{ diverge}}$

3. De même, $\sin\big((n+1)\theta\big) + \sin\big((n-1)\theta\big) = 2\sin(n\theta)\cos\theta$ impose une limite nulle à $\big(\sin(n\theta)\big)$, puis la formule

$$\sin\big((n+1)\theta\big) = \sin(n\theta)\cos\theta + \cos(n\theta)\sin\theta$$

donne $\cos(n\theta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: même contradiction. $\boxed{\big(\sin(n\theta)\big) \text{ diverge}}$

4. Si $\theta = k\pi$, on a $\sin(n\theta) = 0$ et $\cos(n\theta) = (-1)^{kn}$: cette suite est constante si k est pair, et égale à $\big((-1)^n\big)$, divergente, si k est impair.

Il est remarquable que l'on démontre la divergence sans rien savoir de la répartition des valeurs $\cos(n\theta)$; l'exercice 54 montrera que, pour $\theta = 1$, elles remplissent tout le segment $[-1\,,1]$.

EXERCICE 29 ⋆⋆⋆

1. Pour k, $k' \geqslant 2$, la suite $(u_{kk'n})_n$ est extraite de $(u_{kn})_n$, avec l'extractrice $n \mapsto k'n$, et de $(u_{k'n})_n$. Elle tend donc vers ℓ_k et vers $\ell_{k'}$. $\boxed{\ell_k = \ell_{k'}}$

2. Pour $k \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$, l'entier kn n'est pas premier, donc $u_{kn} = 0$: $\boxed{u_{kn} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$. En revanche, si $p_0 < p_1 < \cdots$ désigne la suite des nombres premiers, infinie d'après le chapitre 1, la suite extraite (u_{p_m}) est constante égale à 1, alors que (u_{2n}) tend vers 0. $\boxed{(u_n) \text{ diverge}}$

3. $\boxed{\text{Non}}$: une infinité de suites extraites convergentes, de même limite, ne suffit pas, dès qu'elles laissent échapper une suite d'indices, ici les nombres premiers. La proposition 11 (ii) du cours fonctionne parce que les indices pairs et impairs *recouvrent* tout $\mathbb{N}$.

EXERCICE 30 ⋆⋆⋆

1. Rangeons les pics par ordre croissant : $n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$. Comme n_k est un pic et $n_{k+1} > n_k$, on a $u_{n_{k+1}} < u_{n_k}$. $\boxed{(u_{n_k}) \text{ est strictement décroissante}}$

2. Soit n_0 un entier strictement supérieur à tous les pics. Il n'est pas un pic : il existe $n_1 > n_0$ tel que $u_{n_1} \geqslant u_{n_0}$. L'entier n_1, supérieur à n_0, n'est pas non plus un pic, et l'on recommence. $\boxed{(u_{n_k}) \text{ est croissante}}$

3. Dans les deux cas, (u_n) a une suite extraite monotone. Si (u_n) est bornée, cette suite extraite est monotone et bornée, donc convergente (théorème 8). $\boxed{\text{c'est le théorème de Bolzano-Weierstrass}}$
Cette preuve remplace la dichotomie du cours par un argument purement combinatoire ; le résultat « toute suite réelle a une suite extraite monotone » est plus fort que le théorème, puisqu'il ne suppose pas la suite bornée.

EXERCICE 31 ⋆⋆

1. On construit l'extractrice par récurrence. Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe $\varphi(0)$ tel que $u_{\varphi(0)} > 0$. Si $\varphi(n)$ est construit, le réel $\max(n+1, u_0, \ldots, u_{\varphi(n)})$ ne majore pas la suite : il existe k tel que u_k le dépasse, et nécessairement $k > \varphi(n)$. On pose $\varphi(n+1) = k$; alors $u_{\varphi(n+1)} > n+1$.

$$\boxed{u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$$

2. Soit $A > 0$. Si une infinité d'indices vérifiaient $|u_n| \leqslant A$, ils formeraient une suite extraite bornée, dont le théorème de Bolzano-Weierstrass extrairait une suite convergente, qui serait extraite de (u_n). Il n'y en a donc qu'un nombre fini, et au-delà du plus grand, $|u_n| > A$.

$$\boxed{|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$$

3. Une suite extraite $(z_{\psi(n)})$ convergente vérifierait $|z_{\psi(n+1)} - z_{\psi(n)}| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui contredit $|z_p - z_q| \geqslant 1$. La question 2, valable pour les suites complexes grâce au théorème de Bolzano-Weierstrass complexe du cours, donne :

$$\boxed{|z_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$$

Géométriquement, des points du plan deux à deux distants d'au moins 1 ne peuvent être qu'en nombre fini dans un disque borné.

Suites particulières

EXERCICE 32 ⋆

Pour les suites arithmético-géométriques, on cherche la solution constante c (proposition 15) ; pour les récurrences d'ordre 2, on résout l'équation caractéristique (théorème 11), puis l'on ajuste les constantes aux deux premiers termes.

- **(a)** Géométrique de raison -2 : $\boxed{u_n = 7(-2)^{n-1}}$ pour $n \geqslant 1$.
- **(b)** Géométrique de raison $\frac{1}{2}$: $\boxed{u_n = \dfrac{3}{2^{n-1}}}$ pour $n \geqslant 1$.
- **(c)** $c = 6$ et $u_n - 6 = \frac{1}{3^n}(1-6)$: $\boxed{u_n = 6 - \dfrac{5}{3^n}}$
- **(d)** $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{4}$, $c = -\frac{1}{3}$: $\boxed{u_n = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4^n}}$
- **(e)** Racine double 1, $u_n = \lambda + \mu n$: $\boxed{u_n = 2 - n}$

- **(f)** $2r^2+r-1=0$, racines $\frac{1}{2}$ et -1 : $\boxed{u_n = \dfrac{4}{3\cdot 2^n} - \dfrac{(-1)^n}{3}}$
- **(g)** $r^2 = r+3$, racines $r_\pm = \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$:

$$\boxed{u_n = \frac{13+3\sqrt{13}}{26}\, r_+^n + \frac{13-3\sqrt{13}}{26}\, r_-^n}$$

- **(h)** Racines 3 et -1 ; les conditions initiales donnent un coefficient nul devant 3^n : $\boxed{u_n = (-1)^n}$
- **(i)** Racines $1\pm \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi/4}$; $\lambda = 1$ et $\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mu\frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$: $\boxed{u_n = 2^{n/2}\Big(\cos\dfrac{n\pi}{4} - \sin\dfrac{n\pi}{4}\Big)}$
- **(j)** Somme des entiers (chapitre 3) : $\boxed{u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}}$
- **(k)** Par récurrence $u_n > 0$, et $\frac{1}{u_{n+1}} = 1 + \frac{1}{u_n}$: la suite $(\frac{1}{u_n})$ est arithmétique. $\boxed{u_n = \dfrac{1}{n}}$
- **(l)** Par récurrence $u_n > 0$, et $v_n = \ln u_n$ vérifie $v_{n+1} = 2v_n + \ln 2$, de solution constante $-\ln 2$, d'où $v_n + \ln 2 = 2^n \ln 2$. $\boxed{u_n = 2^{2^n-1}}$

On vérifie chaque fois sur les premiers termes : en (g), 1, 2, 5, 11, 26 ; en (i), 1, 0, -2, -4, -4. En (h), une seule des deux suites géométriques survit : les conditions initiales peuvent « éteindre » une racine caractéristique.

EXERCICE 33 ⋆⋆

1. Un entier à trois chiffres contient « 13 » s'il s'écrit $13x$, ce qui donne 10 entiers, ou $y13$ avec $y \neq 0$, ce qui en donne 9 ; les deux cas sont incompatibles, puisque le chiffre central vaudrait 1 et 3.

$$\boxed{u_3 = 900 - 19 = 881}$$

2. Un entier valide à $n+2$ chiffres s'obtient en ajoutant un chiffre à droite d'un entier valide à $n+1$ chiffres, ce qui donne $10u_{n+1}$ entiers, dont il faut retirer ceux qui se terminent par 13. Ces derniers s'écrivent $w13$, où $w1$ est valide, c'est-à-dire où w est un entier valide à n chiffres, puisque l'ajout d'un 1 ne crée pas de séquence « 13 » ; pour $n=0$, le seul cas est l'entier 13. Il y en a u_n.

$$\boxed{u_{n+2} = 10u_{n+1} - u_n}$$

3. L'équation $r^2 = 10r - 1$ a pour racines $5 \pm 2\sqrt{6}$. Les conditions $u_0 = 1$ et $u_1 = 9$ donnent :

$$\boxed{u_n = \Big(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{6}\Big)(5+2\sqrt{6})^n + \Big(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{6}\Big)(5-2\sqrt{6})^n}$$

Pour $n=3$, la récurrence donne $u_3 = 10\times 89 - 9 = 881$. ✓ On a vérifié par ordinateur les valeurs jusqu'à $n=5$, soit 86 329. La proportion d'entiers valides, $\frac{u_n}{9\cdot 10^{n-1}}$, tend vers 0 : presque tous les grands entiers contiennent la séquence « 13 ».

EXERCICE 34 ⋆⋆⋆

1. (a) On a $f(x) = 1 - \frac{1}{2+x}$, croissante sur $[0\,,1]$, avec $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f(1) = \frac{2}{3}$: l'intervalle est stable. L'équation $f(x) = x$ équivaut à $x^2 + x - 1 = 0$.

$$\boxed{\ell_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618, \qquad \ell_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1{,}618}$$

(b) Pour un point fixe ℓ, on calcule $(1+x)(2+\ell) - (1+\ell)(2+x) = x - \ell$, d'où $f(x) - \ell = \frac{x-\ell}{(2+x)(2+\ell)}$. En faisant le quotient pour ℓ_1 et ℓ_2 :

$$v_{n+1} = \frac{2+\ell_2}{2+\ell_1}\, v_n, \qquad \boxed{q = \frac{2+\ell_2}{2+\ell_1} = \frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}146}$$

(c) On a $v_0 = \frac{\ell_1}{\ell_2} = -\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $v_n = q^n v_0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En résolvant, $u_n = \frac{\ell_1 - \ell_2 v_n}{1-v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1$, et $u_n - \ell_1 = \frac{(\ell_1-\ell_2)\,v_n}{1-v_n}$. Comme $|v_n| \leqslant |v_0| < 1$ et $\ell_1 - \ell_2 = \sqrt{5}$:

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1, \qquad |u_n - \ell_1| \leqslant \frac{\sqrt{5}\,|v_0|}{1-|v_0|}\, q^n = \frac{5-\sqrt{5}}{2}\, q^n}$$

Pour $n = 6$, la majoration donne $1{,}3 \times 10^{-5}$, et l'écart réel est $8{,}2 \times 10^{-6}$.

2. (a) L'équation $f(x) = x$ équivaut à $x^2 + 2x + 1 = 0$: $\boxed{\ell = -1}$, point fixe double. On a $f(x) = 1 - \frac{4}{x+3}$, croissante sur $]-3\,,+\infty[$, et $f(]-1\,,0]) =]-1\,,-\frac{1}{3}]$: par récurrence, $u_n \in]-1\,,0]$, donc $u_n \neq -1$.

(b) On a $f(x) + 1 = \frac{2(x+1)}{x+3}$, d'où $\frac{1}{f(x)+1} = \frac{(x+1)+2}{2(x+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{x+1}$. Ainsi $w_{n+1} = w_n + \frac{1}{2}$, avec $w_0 = 1$.

$$\boxed{w_n = \frac{n+2}{2}, \qquad u_n = -1 + \frac{2}{n+2} = -\frac{n}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1}$$

3. Dans le premier cas, l'écart décroît géométriquement, d'un facteur 0,146 environ à chaque étape ; dans le second, il vaut $\frac{2}{n+2}$ et ne décroît que comme $\frac{1}{n}$: un point fixe double ralentit considérablement la convergence.

EXERCICE 35 ⋆⋆⋆

1. Les nombres $3 \pm \sqrt{5}$ ont pour somme 6 et pour produit 4 : ce sont les racines de $r^2 = 6r - 4$. D'après le théorème 11, $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 4a_n$, avec $a_0 = 2$ et $a_1 = 6$. Par récurrence double, a_n est un entier pair, puisque $6a_{n+1} - 4a_n$ l'est.

$$\boxed{a_n \in 2\mathbb{Z} : \ 2, 6, 28, 144, 752, \ldots}$$

2. Posons $\varepsilon_n = (3-\sqrt{5})^n \pi$; comme $2 < \sqrt{5} < 3$, on a $0 < 3 - \sqrt{5} < 1$ et $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Alors $(3+\sqrt{5})^n \pi = a_n \pi - \varepsilon_n$, et, a_n étant pair, $\sin(a_n\pi - \varepsilon_n) = -\sin\varepsilon_n$.

$$\left|\sin\left((3+\sqrt{5})^n \pi\right)\right| \leqslant \varepsilon_n, \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\sin\left((3+\sqrt{5})^n \pi\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}.$$

3. Les nombres $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ sont racines de $r^2 = 3r - 1$: la suite

$$b_n = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

vérifie $b_{n+2} = 3b_{n+1} - b_n$, avec $b_0 = 2$ et $b_1 = 3$: ses termes 2, 3, 7, 18, 47… sont entiers, mais pas tous pairs. On a cette fois $\sin(b_n\pi - \varepsilon) = \pm\sin\varepsilon$, ce qui suffit :

$$\boxed{\sin\left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n \pi\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

4. Pour $n \geqslant 1$, $(3+\sqrt{5})^n = a_n - (3-\sqrt{5})^n$ est strictement compris entre les entiers consécutifs $a_n - 1$ et a_n. $\boxed{(3+\sqrt{5})^n \notin \mathbb{Z}}$

Les puissances de $3+\sqrt{5}$ sont donc de plus en plus proches d'entiers, sans jamais en être : c'est ce qui rend le sinus si petit, alors que pour presque tout réel $x > 1$, la suite $\sin(x^n\pi)$ n'a pas de limite.

EXERCICE 36 ⋆

Avec $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$, on a $3z_n - \overline{z_n} = 2x_n + 4\mathrm{i}y_n$: les suites (x_n) et (y_n) sont géométriques.

$$\boxed{z_n = 2^n \operatorname{Re} z_0 + \mathrm{i}\, 4^n \operatorname{Im} z_0, \text{ convergente si et seulement si } z_0 = 0}$$

Pour la seconde relation, $\frac{1}{5}(3z_n - 2\overline{z_n}) = \frac{x_n}{5} + \mathrm{i}y_n$:

$$\boxed{z_n = \frac{\operatorname{Re} z_0}{5^n} + \mathrm{i}\operatorname{Im} z_0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{i}\operatorname{Im} z_0, \text{ pour tout } z_0}$$

La relation n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire, à cause de la conjugaison : on ne peut pas la traiter comme une suite géométrique complexe, mais elle se découple en deux suites réelles.

EXERCICE 37 ⋆⋆⋆

1. On factorise par l'angle moitié, comme au chapitre 4 :

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}+1}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2}}{2} = \boxed{\cos\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}}.$$

2. Si $z = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, avec $\rho > 0$ et $\alpha \in]-\pi, \pi[$, alors $\frac{z+|z|}{2} = \rho\cos\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}$, de module $\rho\cos\frac{\alpha}{2} > 0$ et d'argument $\frac{\alpha}{2}$. Par récurrence, pour $\theta \in]-\pi, \pi[$:

$$\boxed{z_n = r\Big(\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{\theta}{2^k}\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2^n}}$$

Si $\theta = \pi$, alors $z_1 = 0$ et la suite est nulle à partir du rang 1.

3. Si $\theta = 0$, la suite est constante égale à r. Si $\theta \in]0, \pi[$, le produit tend vers $\frac{\sin\theta}{\theta}$ d'après l'exercice 16 ; si $\theta \in]-\pi, 0[$, il est inchangé quand on remplace θ par $-\theta$, et $\frac{\sin\theta}{\theta}$ aussi. Enfin $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - 1| = 2|\sin\frac{t}{2}| \leqslant |t|$ donne $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

$$\boxed{z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} r\,\frac{\sin\theta}{\theta} \text{ si } \theta \neq 0, \qquad z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} r \text{ si } \theta = 0}$$

Pour $\theta = \pi$, la formule donne 0, ce qui est cohérent. Le point limite est toujours réel positif : l'opération $z \mapsto \frac{z+|z|}{2}$ divise l'argument par deux à chaque étape, et le module décroît d'un facteur qui tend vers 1.

EXERCICE 38 ⋆⋆

1. On a $f(x) - x = x^2 - x + \frac{3}{16} = (x - \frac{1}{4})(x - \frac{3}{4})$.

$$\boxed{\text{points fixes } \frac{1}{4} \text{ et } \frac{3}{4} \ ; \ f(x) > x \text{ hors de } \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right], \ f(x) < x \text{ à l'intérieur}}$$

2. On a $u_1 = u_0^2 + \frac{3}{16} > 0$, et $[0\,,+\infty[$ est stable par f, qui y est croissante. D'après la proposition 16 (ii), $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est monotone, croissante si $u_2 \geqslant u_1$, décroissante sinon.

3. Comme $u_1 = f(|u_0|)$, tout dépend de $|u_0|$, et les intervalles $[0\,,\frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}\,,\frac{3}{4}[$ et $]\frac{3}{4}\,,+\infty[$ sont stables par f, croissante, qui fixe $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$.

- Si $|u_0| < \frac{3}{4}$, alors $u_1 \in [\frac{3}{16}\,,\frac{3}{4}[$. Sur $[0\,,\frac{1}{4}]$, $f(x) \geqslant x$: la suite croît et reste majorée par $\frac{1}{4}$. Sur $[\frac{1}{4}\,,\frac{3}{4}[$, elle décroît et reste minorée par $\frac{1}{4}$. Dans les deux cas elle converge, vers un point fixe (proposition 17) compris entre $\frac{3}{16}$ et $u_1 < \frac{3}{4}$.

$$\boxed{|u_0| < \frac{3}{4} \implies u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{4}}$$

- Si $|u_0| = \frac{3}{4}$, alors $\boxed{u_n = \frac{3}{4} \text{ pour } n \geqslant 1}$.
- Si $|u_0| > \frac{3}{4}$, alors $u_1 > \frac{3}{4}$, la suite croît, et une limite finie serait un point fixe supérieur à $u_1 > \frac{3}{4}$, ce qui n'existe pas.

$$\boxed{|u_0| > \frac{3}{4} \implies u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$$

Le point fixe $\frac{1}{4}$ « attire » les suites qui démarrent près de lui ; le point fixe $\frac{3}{4}$ les « repousse ». Le chapitre 9 reliera ce comportement à la valeur de $|f'|$ au point fixe, ici $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$.

EXERCICE 39 ⋆⋆

1. La fonction f est décroissante sur $]0\,,+\infty[$, et $f(1) = 3$, $f(3) = \frac{5}{3}$: $\boxed{f([1\,,3]) = \left[\frac{5}{3}\,,3\right] \subset [1\,,3]}$.

2. La fonction $g = f \circ f$ est croissante sur $[1\,,3]$, et $g(x) = 1 + \frac{2x}{x+2} = \frac{3x+2}{x+2}$, d'où

$$g(x) - x = -\frac{(x-2)(x+1)}{x+2},$$

positif sur $[1\,,2]$ et négatif sur $[2\,,3]$. Comme $u_0 = 1 \in [1\,,2]$, intervalle stable par g, la suite (u_{2n}) est croissante et majorée par 2 ; comme $u_1 = 3 \in [2\,,3]$, la suite (u_{2n+1}) est décroissante et minorée par 2. Leurs limites sont des points fixes de g dans $[1\,,3]$, et le seul est 2.

$$\boxed{u_{2n} \nearrow 2 \qquad u_{2n+1} \searrow 2}$$

3. La proposition 11 donne $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2}$. Directement : pour $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \frac{5}{3}$, et

$$|u_{n+1} - 2| = \left|\frac{2 - u_n}{u_n}\right| \leqslant \frac{3}{5}\,|u_n - 2|, \qquad \text{d'où} \qquad |u_n - 2| \leqslant \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}.$$

Les termes 1, 3, $\frac{5}{3}$, $\frac{11}{5}$, $\frac{21}{11}$, $\frac{43}{21}$… sont alternativement au-dessous et au-dessus de 2, comme le prévoyait la décroissance de f.

EXERCICE 40 ⋆⋆

(a) On a $u_{n+1} - u_n = \mathrm{e}^{-u_n} > 0$: la suite est croissante. Si elle était majorée par M, on aurait $u_{n+1} - u_n \geqslant \mathrm{e}^{-M}$, d'où $u_n \geqslant 1 + n\,\mathrm{e}^{-M} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, ce qui est contradictoire. $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$

(b) On a $f(x) - x = x^2 \geqslant 0$: la suite est croissante. L'intervalle $\left[-\frac{1}{2}\,,0\right]$ est stable, car $f(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \in \left[-\frac{1}{4}\,,0\right]$ pour x dans cet intervalle. Croissante et majorée par 0, la suite converge vers un point fixe, donc vers 0, seule solution de $\ell^2 = 0$. $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

Plus généralement, si $u_0 \in [-1\,,0]$, alors $u_1 = u_0(1+u_0) \in \left[-\frac{1}{4}\,,0\right]$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Si $u_0 > 0$, la suite croît, et une limite finie serait un point fixe supérieur à $u_0 > 0$: $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Si $u_0 < -1$, alors $u_1 > 0$ et l'on est ramené au cas précédent.

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ si } u_0 \in [-1\,,0], \qquad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \text{ sinon}}$$

(c) L'intervalle $[0\,,1]$ est stable, puisque $0 \leqslant \sin x \leqslant x$ sur cet intervalle ; la suite est décroissante et minorée par 0. Sa limite $\ell \in [0\,,1]$ vérifie $\sin \ell = \ell$, et l'inégalité $\sin x < x$ pour $x \in \left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ (chapitre 4) impose $\ell = 0$. Par récurrence, $u_n > 0$.

Pour $t \in]0\,,1]$, on a $\sin t \geqslant t\left(1 - \frac{t^2}{6}\right) > 0$, d'où

$$\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{1}{t^2} \leqslant \frac{1-(1-t^2/6)^2}{t^2(1-t^2/6)^2} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{t^2}{36}}{(1-t^2/6)^2} \leqslant \frac{1/3}{(5/6)^2} = \frac{12}{25}.$$

Avec $t = u_n$, puis en sommant, $\frac{1}{u_n^2} \leqslant 1 + \frac{12n}{25} \leqslant 1 + \frac{n}{2}$.

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \qquad u_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{1+n/2}}}$$

Ainsi $u_{100} \geqslant 0{,}14$; en réalité $u_{100} \approx 0{,}169$. La décroissance n'est pas géométrique : elle est de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$, ce que le chapitre 10 précisera.

EXERCICE 41 ⋆⋆⋆

1. La fonction f est décroissante sur $[0\,,1]$, avec $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$: $[0\,,1]$ est stable. Le point fixe vérifie $x^2 - 3x + 1 = 0$.

$$\boxed{a = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}382}$$

2. Le développement donne :

$$\boxed{f(f(x)) - x = x(x-1)(x^2-3x+1)}$$

Sur $[0\,,1]$, les facteurs x et $x-1$ sont de signes contraires, et $x^2 - 3x + 1$ change de signe en a : la différence est négative sur $]0\,,a[$ et positive sur $]a\,,1[$.

3. La fonction $g = f \circ f$ est croissante, et laisse stables $[0\,,a]$ et $[a\,,1]$. Comme $u_0 = \frac{1}{2} \in]a\,,1]$, la suite (u_{2n}) croît, et sa limite est un point fixe de g dans $\left[\frac{1}{2}\,,1\right]$, c'est-à-dire 1. Comme $u_1 = \frac{1}{4} \in [0\,,a[$, la suite (u_{2n+1}) décroît vers 0.

$$\boxed{u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1, \quad u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 : \ (u_n) \text{ diverge}}$$

Numériquement, $u_8 \approx 0{,}901$ et $u_7 \approx 0{,}051$.

4. Si $u_0 = a$, la suite est constante. Si $u_0 = 0$, elle vaut alternativement 0 et 1.
Le point fixe a existe, mais aucune suite ne s'en approche, sauf la suite constante : il est *répulsif*. La décroissance de f ne garantit donc pas la convergence ; elle garantit seulement que les termes d'indices pairs et impairs ont un comportement monotone.

EXERCICE 42 ⋆⋆

1. La fonction $P_n : x \mapsto x + x^2 + \cdots + x^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, nulle en 0, et tend vers $+\infty$; d'après le théorème 2 du chapitre 5, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. Comme $P_n(1) = n \geqslant 1$ et $P_n(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{2^n} \leqslant 1$, on obtient l'encadrement.

$$\boxed{\exists!\, x_n \in \mathbb{R}_+,\ P_n(x_n) = 1, \qquad \frac{1}{2} \leqslant x_n \leqslant 1}$$

2. On a $P_{n+1}(x_n) = P_n(x_n) + x_n^{n+1} > 1 = P_{n+1}(x_{n+1})$, et P_{n+1} est croissante. $\boxed{x_{n+1} < x_n}$

3. Pour $n \geqslant 2$, $x_n < 1$ puisque $P_n(1) = n > 1$, et la somme géométrique donne $\frac{x_n - x_n^{n+1}}{1-x_n} = 1$, soit $x_n - x_n^{n+1} = 1 - x_n$; pour $n = 1$, $x_1 = 1$ vérifie aussi la formule.

$$\boxed{x_n = \frac{1}{2}(1 + x_n^{n+1})}$$

Pour $n \geqslant 2$, on a $0 \leqslant x_n^{n+1} \leqslant x_2^{n+1}$, avec $x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$, donc $x_n^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. $\boxed{x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}}$

Numériquement, $x_5 \approx 0{,}5087$ et $x_{20} \approx 0{,}500\,000\,24$: l'écart $x_n - \frac{1}{2}$ décroît à peu près comme 2^{-n}.

EXERCICE 43 ⋆⋆

1. La fonction f_n est dérivable, de dérivée $5x^4 + n > 0$, et tend vers $\pm\infty$ en $\pm\infty$: c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ (théorème 2 du chapitre 5). Comme $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^5} > 0$:

$$\boxed{0 < u_n < \frac{1}{n}}$$

2. On a $f_{n+1}(u_n) = f_n(u_n) + u_n = u_n > 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$, et f_{n+1} est croissante, d'où $u_{n+1} < u_n$. L'encadrement de la question 1 donne la limite. $\boxed{(u_n) \text{ décroît vers } 0}$

3. De $u_n^5 + nu_n = 1$, on tire $nu_n = 1 - u_n^5 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, puis $n^5(1 - nu_n) = n^5 u_n^5 = (nu_n)^5$.

$$\boxed{nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1, \qquad n^5(1 - nu_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$$

Ainsi u_n est très proche de $\frac{1}{n}$, l'écart $\frac{1}{n} - u_n = \frac{1-nu_n}{n}$ étant de l'ordre de $\frac{1}{n^6}$. Pour $n = 10$, on trouve $u_{10} \approx 0{,}099\,999\,000\,05$.

EXERCICE 44 ⋆⋆⋆

1. La fonction $f : x \mapsto x + \ln x$ est dérivable et strictement croissante sur $]0\,,+\infty[$, de limites $-\infty$ en 0 et $+\infty$ en $+\infty$: c'est une bijection sur $\mathbb{R}$. $\boxed{\exists!\, u_n > 0,\ u_n + \ln u_n = n}$

2. On a $f(u_{n+1}) = n + 1 > n = f(u_n)$, donc $u_{n+1} > u_n$; et $f(1) = 1 \leqslant n = f(u_n)$, donc $u_n \geqslant 1$. Si (u_n) était majorée par M, on aurait $n = f(u_n) \leqslant f(M)$ pour tout n, ce qui est absurde.

$$\boxed{(u_n) \text{ est croissante, } u_n \geqslant 1,\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$$

3. Comme $u_n \geqslant 1$, $\ln u_n \geqslant 0$ et $u_n = n - \ln u_n \leqslant n$; puis $\ln u_n \leqslant \ln n$, d'où $u_n \geqslant n - \ln n$. En divisant par n, et comme $\frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (théorème 7) :

$$\boxed{n - \ln n \leqslant u_n \leqslant n, \qquad \frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$$

4. Posons $h_n = 1 - \frac{u_n}{n} \in \left[0\,, \frac{\ln n}{n}\right]$, qui tend vers 0. Alors $u_n - n + \ln n = \ln n - \ln u_n = -\ln(1 - h_n)$, et l'inégalité indiquée, qui découle de l'exercice 21 avec $x = -h_n$, donne

$$0 \leqslant -\ln(1 - h_n) \leqslant \frac{h_n}{1 - h_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

$$\boxed{u_n = n - \ln n + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Numériquement, $u_{100} \approx 95{,}441$ et $n - \ln n \approx 95{,}395$: l'écart vaut environ 0,047, et il est de l'ordre de $\frac{\ln n}{n}$, comme le montre l'encadrement.

Exercices de synthèse

EXERCICE 45 ⋆⋆

1. **Fausse**. La partie $\{r \in \mathbb{Q} \mid r > 0,\ r^2 < 2\}$ est majorée par 2, mais n'a pas de borne supérieure rationnelle (exercice 7).
2. **Vraie**. Une partie finie non vide de $\mathbb{R}$ a un plus grand élément, qui est sa borne supérieure et lui appartient : par contraposée, si $\sup A \notin A$, alors A est infinie.
3. **Fausse**. La suite $((-1)^n)$ est bornée et diverge.
4. **Fausse**. La suite $\frac{(-1)^n}{n+1}$ tend vers 0 sans être monotone à partir d'aucun rang.
5. **Fausse**. La suite $\frac{1}{n+1}$ est strictement positive, de limite nulle : l'inégalité stricte devient large.
6. **Fausse**. La suite $(\sqrt{n})$ vérifie $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et tend vers $+\infty$; de même (H_n), exercice 51.
7. **Fausse**. Avec $u_n = (-1)^n$, la suite (u_n^2) est constante.
8. **Vraie**. C'est le théorème 8 du cours.
9. **Vraie**. C'est le théorème d'encadrement ; le caractère strict de $u_n < v_n$ ne joue aucun rôle.
10. **Vraie**. Si la suite est bornée, le théorème de Bolzano-Weierstrass fournit une suite extraite convergente ; si elle n'est pas majorée, l'exercice 31 fournit une suite extraite qui tend vers $+\infty$, et de même vers $-\infty$ si elle n'est pas minorée.

EXERCICE 46 ⋆⋆

1. La partie A contient 0, puisque $f(0) \geqslant 0$, et elle est majorée par 1 : elle admet une borne supérieure $s \in [0\,,1]$ d'après le théorème 1. Soit $x \in A$; comme $x \leqslant s$ et que f est croissante, on a $x \leqslant f(x) \leqslant f(s)$. Le réel $f(s)$ majore donc A, et il est supérieur au plus petit des majorants :

$$\boxed{s \leqslant f(s)}$$

Appliquons la fonction croissante f à cette inégalité : on obtient $f(s) \leqslant f(f(s))$. Comme $f(s)$ est dans $[0\,,1]$, cela signifie que $f(s)$ appartient à A, et donc que $f(s) \leqslant s$, puisque s majore A. Les deux inégalités donnent :

$$\boxed{f(s) = s}$$

2. Si p est un point fixe de f, alors $f(p) = p \geqslant p$, donc $p \in A$, et $p \leqslant s$ puisque s majore A.

$$\boxed{s \text{ est le plus grand point fixe de } f}$$

Symétriquement, la partie $B = \{x \in [0\,,1] \mid f(x) \leqslant x\}$ contient 1 et est minorée par 0 ; soit $i = \inf B$. Pour $x \in B$, on a $f(i) \leqslant f(x) \leqslant x$, donc $f(i)$ minore B et $f(i) \leqslant i$; puis $f(f(i)) \leqslant f(i)$, donc $f(i) \in B$ et $f(i) \geqslant i$. Tout point fixe appartient à B, donc est supérieur à i.

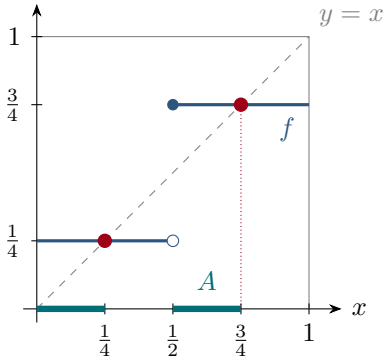
$$\boxed{\inf B \text{ est le plus petit point fixe de } f}$$

3. Pour $x < \frac{1}{2}$, la condition $f(x) \geqslant x$ s'écrit $x \leqslant \frac{1}{4}$; pour $x \geqslant \frac{1}{2}$, elle s'écrit $x \leqslant \frac{3}{4}$. On obtient donc :

$$\boxed{A = \left[0\,,\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2}\,,\frac{3}{4}\right], \qquad s = \frac{3}{4}}$$

Un point fixe est une valeur prise par f, donc vaut $\frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{4}$; les deux conviennent, puisque $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4} \geqslant \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{les points fixes de } f \text{ sont } \frac{1}{4} \text{ et } \frac{3}{4}}$$



Les points fixes, en rouge, sont les points où le graphe de f rencontre la diagonale ; la partie A, en bleu pétrole, est l'ensemble des abscisses où le graphe est au-dessus de la diagonale, et sa borne supérieure est le point fixe $\frac{3}{4}$. Le saut de f en $\frac{1}{2}$ ne gêne en rien le raisonnement.

4. La fonction définie par $f(x) = 1$ pour $x < \frac{1}{2}$ et $f(x) = 0$ pour $x \geqslant \frac{1}{2}$ est décroissante et à valeurs dans $[0\,,1]$. Un point fixe serait une valeur de f, donc 0 ou 1 ; or $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$.

$$\boxed{\text{une fonction décroissante de } [0\,,1] \text{ dans } [0\,,1] \text{ peut n'avoir aucun point fixe}}$$

Le chapitre 8 montrera qu'une fonction *continue* de $[0\,,1]$ dans $[0\,,1]$ a toujours un point fixe ; ici, c'est la croissance qui remplace la continuité.

5. On écrit $g(x) = 1 - \dfrac{1}{2x+2}$: comme $x \mapsto 2x+2$ est croissante et strictement positive sur $[0\,,1]$, son inverse est décroissante, et g est croissante. Elle envoie un rationnel sur un rationnel, et $g(0) = \frac{1}{2}$, $g(1) = \frac{3}{4}$, donc $g(Q_1) \subset Q_1$. Enfin, pour $x \geqslant 0$,

$$g(x) - x = \frac{1 - 2x^2}{2x+2},$$

qui s'annule seulement en $x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, irrationnel.

$$\boxed{g \text{ est croissante, } g(Q_1) \subset Q_1, \text{ et } g \text{ n'a aucun point fixe dans } Q_1}$$

La partie $\{x \in Q_1 \mid g(x) \geqslant x\} = \{x \in Q_1 \mid 2x^2 \leqslant 1\}$ est non vide et majorée, mais elle n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$: sa borne supérieure dans $\mathbb{R}$ est $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C'est l'existence de s, c'est-à-dire l'axiome de la borne supérieure, qui fait défaut ; on retrouve la coupure de l'introduction du cours.
À retenir : c'est la version réelle du théorème de Knaster-Tarski, rencontré à l'exercice 39 de la feuille du chapitre 2 pour les parties d'un ensemble ordonnées par l'inclusion. La démonstration n'utilise que l'ordre et la borne supérieure, et la question 5 montre qu'elle ne peut pas s'en passer.

EXERCICE 47 ⋆⋆⋆

1. Pour $n > N$, on coupe la somme en deux et l'on applique l'inégalité triangulaire :

$$|c_n| \leqslant \frac{|u_1 + \cdots + u_N|}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n} |u_k| \leqslant \frac{|u_1 + \cdots + u_N|}{n} + \frac{n-N}{n}\,\varepsilon.$$

Le premier terme, où N est fixé, tend vers 0 : il est inférieur à ε à partir d'un rang N', et $|c_n| \leqslant 2\varepsilon$ pour $n \geqslant \max(N, N') + 1$. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, on applique ce résultat à $(u_n - \ell)$, dont la moyenne est $c_n - \ell$.

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \implies c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell}$$

2. Soit $A > 0$, et N tel que $u_n \geqslant 3A$ pour $n > N$. Pour $n \geqslant 2N$, on a $\frac{n-N}{n} \geqslant \frac{1}{2}$, d'où

$$c_n \geqslant \frac{u_1 + \cdots + u_N}{n} + \frac{3A}{2},$$

et le premier terme est supérieur à $-\frac{A}{2}$ à partir d'un certain rang : $c_n \geqslant A$.

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \implies c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$$

3. Pour $u_n = (-1)^n$, on a $|c_n| \leqslant \frac{1}{n}$, donc $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors que (u_n) diverge. Si (u_n) est croissante et $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, elle est majorée, sinon elle tendrait vers $+\infty$ et (c_n) aussi d'après la question 2 ; elle converge donc vers un réel ℓ', et la question 1 donne $\ell' = \ell$. Le cas décroissant est symétrique.

$$\boxed{\text{réciproque fausse en général, vraie pour une suite monotone}}$$

4. La suite $v_k = u_{k+1} - u_k$ tend vers a ; la moyenne de ses n premiers termes, $\frac{u_n - u_0}{n}$, tend donc vers a, et $\frac{u_0}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. $\boxed{\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a}$

Avec $u_n = \ln(n!) - n\ln n$, on a $u_{n+1} - u_n = -n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, et l'encadrement de l'exercice 21 donne $\frac{n}{n+1} \leqslant n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant 1$, d'où $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$, puis $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$. Ainsi

$$\frac{\ln(n!)}{n\ln n} = 1 + \frac{u_n}{n}\cdot\frac{1}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{1}.$$

La convergence est lente : pour $n = 1000$, le quotient vaut environ 0,856. Le chapitre 10 donnera la formule de Stirling, beaucoup plus précise.

EXERCICE 48 ⋆⋆⋆

1. Les termes $\frac{1}{q_j}$ sont strictement positifs et de somme r, donc chacun est inférieur ou égal à r :

$$\boxed{q_j \geqslant \frac{1}{r} \text{ pour tout } j}$$

2. (a) On a $\frac{1}{q} \leqslant x$ si et seulement si $q \geqslant \frac{b}{a}$. L'ensemble des entiers naturels non nuls supérieurs ou égaux à $\frac{b}{a}$ contient b, puisque $a \geqslant 1$; partie non vide de $\mathbb{N}$, il a un plus petit élément q (chapitre 1). Par minimalité, $q - 1 < \frac{b}{a}$, ce qui est évident si $q = 1$. Ainsi $a(q-1) < b \leqslant aq$, et la réduction au même dénominateur donne :

$$\boxed{x - \frac{1}{q} = \frac{aq - b}{bq}, \qquad 0 \leqslant aq - b < a}$$

(b) Si $x < 1$, alors $\frac{1}{1} > x$, donc $q \neq 1$. Par minimalité de q, on a $\frac{1}{q-1} > x$, d'où :

$$\boxed{q \geqslant 2, \qquad x - \frac{1}{q} < \frac{1}{q-1} - \frac{1}{q} = \frac{1}{q(q-1)}}$$

(c) On démontre par récurrence forte sur $a \geqslant 1$ la propriété : « pour tout entier $b \geqslant a$, le rationnel $\frac{a}{b}$ admet une écriture égyptienne ». Pour $a = 1$, c'est clair. Soit $a \geqslant 2$ tel que la propriété soit vraie pour tous les entiers de $[\![1\,;a-1]\!]$, et $b \geqslant a$. Si $b = a$, alors $x = \frac{1}{1}$. Sinon $x < 1$; si $aq = b$, alors $x = \frac{1}{q}$. Dans le cas restant, $a' = aq - b$ appartient à $[\![1\,;a-1]\!]$ d'après (a), et $y = x - \frac{1}{q} = \frac{a'}{bq}$ est strictement compris entre 0 et 1, donc $a' \leqslant bq$. L'hypothèse de récurrence fournit une écriture égyptienne de y, dont les dénominateurs vérifient, d'après la question 1 et (b),

$$q' \geqslant \frac{1}{y} > q(q-1) \geqslant q.$$

En ajoutant $\frac{1}{q}$ en tête, on obtient une écriture égyptienne de x.

$$\boxed{\text{tout rationnel de }]0\,,1] \text{ admet une écriture égyptienne}}$$

Pour $x = \frac{4}{5}$, on trouve $q = 2$ et $\frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$, puis $q = 4$ et $\frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$; les numérateurs 4, 3, 1 décroissent strictement, comme le prévoit (a).

$$\boxed{\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}}$$

3. L'ensemble $E = \{m \in \mathbb{N} \mid H_m \leqslant r\}$ contient 0. Comme $H_m \xrightarrow[m\to+\infty]{} +\infty$ (exercice 21), il existe M tel que $H_m > r$ pour $m \geqslant M$: la partie E est contenue dans $[\![0\,;M-1]\!]$, donc finie et non vide, et elle a un plus grand élément m. Comme $H_{m+1} > r$, le rationnel $y = r - H_m$ vérifie $0 \leqslant y < \frac{1}{m+1}$. Si $y = 0$, alors $m \geqslant 1$ puisque $r > 0$, et $r = \frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{m}$. Sinon, $y \in]0\,,1[$ admet une écriture égyptienne d'après la question 2, dont les dénominateurs vérifient $q' \geqslant \frac{1}{y} > m+1$ d'après la question 1 ; on la place après $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}$.

$$\boxed{\text{tout rationnel } r > 0 \text{ admet une écriture égyptienne}}$$

Pour $r = 2$, on a $H_3 = \frac{11}{6} \leqslant 2 < H_4 = \frac{25}{12}$, donc $m = 3$ et $y = \frac{1}{6}$.

$$\boxed{2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}}$$

4. Soit une écriture égyptienne de r, de plus grand dénominateur q_s. Si $q_s \geqslant 2$, l'égalité

$$\frac{1}{q_s} = \frac{1}{q_s+1} + \frac{1}{q_s(q_s+1)}, \qquad \text{avec} \qquad q_s < q_s + 1 < q_s(q_s+1),$$

fournit une écriture égyptienne de r à $s+1$ termes. Si $q_s = 1$, l'écriture est $r = \frac{1}{1}$, et l'on utilise $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$. En itérant, on obtient des écritures ayant s, $s+1$, $s+2$, … termes, deux à deux distinctes.

$$\boxed{\text{tout rationnel } r > 0 \text{ admet une infinité d'écritures égyptiennes}}$$

Les scribes de l'Égypte ancienne écrivaient ainsi leurs fractions, d'où le nom ; la méthode gloutonne de la question 2 est décrite par Fibonacci dans son *Liber abaci*, en 1202. Elle peut produire des dénominateurs gigantesques : pour $\frac{5}{121}$, elle s'arrête au cinquième terme, de dénominateur $1\,527\,612\,795\,642\,093\,418\,846\,225$, alors que $\frac{5}{121} = \frac{1}{33} + \frac{1}{121} + \frac{1}{363}$.
À retenir : le seul ingrédient d'analyse est la divergence de la suite harmonique, qui garantit qu'on peut « consommer » n'importe quel rationnel avec des fractions $\frac{1}{k}$ distinctes ; le reste est de l'arithmétique des entiers, où la décroissance stricte des numérateurs assure la terminaison de l'algorithme.

EXERCICE 49 ⋆⋆⋆

1. On a $(\cos y)^{2m} = q^m$, avec $q = \cos^2 y \in [0\,,1]$. Si y est un multiple entier de π, alors $\cos y = \pm 1$ et $q = 1$: la suite est constante, égale à 1. Sinon, $|\cos y| < 1$ (chapitre 4), donc $q \in [0\,,1[$, et $q^m \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$ d'après la proposition 9.

$$\boxed{\lim_{m\to+\infty} (\cos y)^{2m} = 1 \text{ si } y \in \pi\mathbb{Z}, \qquad 0 \text{ sinon}}$$

2. On applique la question 1 à $y = 2\pi\, n!\, x$, qui est un multiple entier de π si et seulement si $2\, n!\, x$ est un entier.

$$\boxed{f_n(x) = 1 \text{ si } 2\, n!\, x \in \mathbb{Z}, \qquad f_n(x) = 0 \text{ sinon}}$$

3. Si $x = \frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, alors pour $n \geqslant q$, l'entier q divise $n!$, donc $n!\, x = p \cdot \frac{n!}{q}$ est entier, et $f_n(x) = 1$: la suite $\big(f_n(x)\big)$ est stationnaire, de limite 1. Si x est irrationnel, $2\, n!\, x$ l'est aussi, d'après l'exercice 4, puisque $2\, n!$ est un rationnel non nul : $f_n(x) = 0$ pour tout n.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q}, \qquad 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q}}$$

Chaque fonction $x \mapsto \big(\cos(2\pi\, n!\, x)\big)^{2m}$ est une fonction usuelle très régulière, et pourtant la double limite est la fonction de Dirichlet, dont le chapitre 8 montrera qu'elle n'est continue en aucun point.

4. On a $n!\, u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$, et chaque quotient $\frac{n!}{k!} = (k+1)(k+2)\cdots n$ est un entier. L'exercice 22 donne $u_n < \ell < v_n = u_n + \frac{1}{n\cdot n!}$, et l'on multiplie par $n! > 0$:

$$\boxed{0 < n!\,\ell - n!\, u_n < \frac{1}{n}}$$

Notons $\theta_n = n!\,\ell - n!\, u_n$. Comme $n!\, u_n$ est entier et que le cosinus est 2π-périodique, on a l'égalité $\cos(2\pi\, n!\,\ell) = \cos(2\pi\theta_n)$, et

$$0 \leqslant 1 - \cos(2\pi\theta_n) = 2\sin^2(\pi\theta_n) \leqslant 2\pi^2\theta_n^2 < \frac{2\pi^2}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par encadrement :

$$\boxed{\cos(2\pi\, n!\,\ell) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$$

Numériquement, $\theta_{10} \approx 0{,}0991$: la suite $(n!\,\ell)$ s'approche des entiers, mais ne les atteint jamais, puisque ℓ est irrationnel.

5. Pour m fixé, $\big(\cos(2\pi\, n!\,\ell)\big)^{2m}$ est le produit de $2m$ suites qui tendent vers 1 : il tend vers 1 d'après le théorème 4. La limite intérieure vaut 1 pour tout m, et la limite extérieure aussi. Dans l'autre ordre, ℓ est irrationnel, donc $f_n(\ell) = 0$ pour tout n d'après la question 2.

$$\boxed{\lim_{m\to+\infty}\Big(\lim_{n\to+\infty}\big(\cos(2\pi\, n!\,\ell)\big)^{2m}\Big) = 1 \neq 0 = \lim_{n\to+\infty}\Big(\lim_{m\to+\infty}\big(\cos(2\pi\, n!\,\ell)\big)^{2m}\Big)}$$

Piège : l'erreur la plus répandue est d'échanger deux passages à la limite sans justification. On a vu à l'exercice 5 que deux bornes supérieures s'échangent toujours ; deux limites, comme une borne supérieure et une borne inférieure, ne s'échangent pas en général.

EXERCICE 50 ⋆⋆⋆

1. La condition d'équilibre donne $c_{k+1} \geqslant G_k - \frac{1}{2}$. Comme $(k+1)\,G_{k+1} = k\,G_k + c_{k+1}$, on obtient

$$G_{k+1} = \frac{k\,G_k + c_{k+1}}{k+1} \geqslant \frac{k\,G_k + G_k - \frac{1}{2}}{k+1} = \boxed{G_k - \frac{1}{2(k+1)}}.$$

En ajoutant ces inégalités pour k allant de 1 à $n-1$, les termes $G_2, \dots, G_{n-1}$ se simplifient :

$$G_n \geqslant G_1 - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} = c_1 - \frac{H_n - 1}{2}.$$

Avec $G_n \leqslant 0$, on obtient $c_1 \leqslant \frac{1}{2}(H_n - 1)$, soit :

$$\boxed{c_1 + \frac{1}{2} \leqslant \frac{H_n}{2}}$$

2. Avec ce choix, l'inégalité de la question 1 devient une égalité, $G_{k+1} = G_k - \frac{1}{2(k+1)}$, et une récurrence immédiate donne

$$G_k = c_1 - \frac{H_k - 1}{2} = \frac{H_n - H_k}{2} \qquad \text{pour } 1 \leqslant k \leqslant n.$$

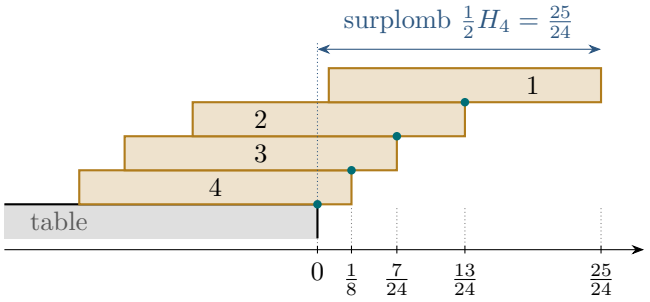
Les conditions sont vérifiées : $|G_k - c_{k+1}| = \frac{1}{2}$, et $G_n = 0$. La pile est en équilibre, de surplomb $c_1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}H_n$. Le bord droit de la brique $k+1$ est en $c_{k+1} + \frac{1}{2} = G_k$, formule qui vaut aussi pour la brique du haut avec la convention $H_0 = 0$:

$$\boxed{\text{le bord droit de la brique } k+1 \text{ est en } \frac{H_n - H_k}{2}, \text{ pour } 0 \leqslant k \leqslant n-1}$$

Pour $n = 4$, on a $H_4 = \frac{25}{12}$, et les bords droits, de haut en bas, sont en

$$\boxed{\frac{25}{24}, \quad \frac{13}{24}, \quad \frac{7}{24}, \quad \frac{1}{8}}$$

Chaque brique dépasse celle du dessous de $\frac{1}{2k}$, pour $k = 1, 2, 3, 4$ en partant du haut. Le bord gauche de la brique du haut est en $\frac{25}{24} - 1 = \frac{1}{24} > 0$: elle se trouve *entièrement* au-dessus du vide.



Chaque point bleu pétrole est le centre de gravité des briques situées au-dessus de lui : il tombe exactement à l'aplomb du bord droit de la brique qui les porte, et celui de la pile entière tombe sur le bord de la table. La brique du haut a quitté la table tout entière.

3. La suite (H_n) tend vers $+\infty$ (exercice 21, question 3). Pour tout réel D, il existe donc n tel que $\frac{1}{2}H_n \geqslant D$, et la question 2 fournit une pile en équilibre de surplomb au moins égal à D.

$$\boxed{\text{le surplomb peut être rendu aussi grand que l'on veut}}$$

4. La question 1 de l'exercice 21 donne $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k}$. En sommant pour k allant de 1 à n, la somme $\sum_{k=1}^{n}\left(\ln(k+1) - \ln k\right)$ se télescope en $\ln(n+1)$. D'autre part, la suite $u_n = H_n - \ln n$ de cet exercice décroît, d'où $u_n \leqslant u_1 = 1$.

$$\boxed{\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n}$$

D'après les questions 1 et 2, n briques permettent un surplomb au moins égal à D si et seulement si $H_n \geqslant 2D$. Soit N le plus petit tel entier. D'une part, $1 + \ln N \geqslant H_N \geqslant 2D$, donc $N \geqslant \mathrm{e}^{2D-1}$. D'autre part, le plus petit entier n_1 supérieur ou égal à $\mathrm{e}^{2D} - 1$ vérifie $n_1 \geqslant 1$ et $\ln(n_1 + 1) \geqslant 2D$, donc $H_{n_1} \geqslant 2D$, et $N \leqslant n_1 < \mathrm{e}^{2D}$.

$$\boxed{\mathrm{e}^{2D-1} \leqslant N < \mathrm{e}^{2D}}$$

Pour $D = 10$, il faut entre $\mathrm{e}^{19} \approx 1{,}8 \times 10^8$ et $\mathrm{e}^{20} \approx 4{,}9 \times 10^8$ briques, soit plusieurs centaines de millions. Un calcul exact donne $N = 4$ pour $D = 1$, $N = 31$ pour $D = 2$ et $N = 227$ pour $D = 3$, en accord avec l'encadrement.

À retenir : la question 1 est un résultat *extrémal* : aucune pile d'une brique par étage ne fait mieux que $\frac{1}{2}H_n$. Le surplomb est infini « en principe », mais il croît comme un logarithme, ce qui le rend inaccessible en pratique ; c'est la lenteur de la divergence de (H_n), mesurée à l'exercice 21, qui se lit ici en briques.

EXERCICE 51 ⋆⋆⋆⋆

1. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, pour $\varepsilon > 0$ il existe N tel que $|u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pour $n \geqslant N$, et alors, pour p, $q \geqslant N$,

$$|u_p - u_q| \leqslant |u_p - \ell| + |\ell - u_q| \leqslant \varepsilon.$$

toute suite convergente est de Cauchy

2. Avec $\varepsilon = 1$, il existe N tel que $|u_p| \leqslant |u_N| + 1$ pour $p \geqslant N$: la suite est bornée, par le maximum de ce réel et des $|u_p|$ pour $p < N$. Le théorème de Bolzano-Weierstrass fournit une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ de limite ℓ. Soit $\varepsilon > 0$, N le rang de la condition de Cauchy et n_0 tel que $|u_{\varphi(n)} - \ell| \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant n_0$. Pour $p \geqslant N$, prenons $n \geqslant \max(n_0, N)$: alors $\varphi(n) \geqslant n \geqslant N$, et

$$|u_p - \ell| \leqslant |u_p - u_{\varphi(n)}| + |u_{\varphi(n)} - \ell| \leqslant 2\varepsilon.$$

$$\boxed{\text{toute suite de Cauchy réelle converge}}$$

3. On a $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, mais $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$ pour tout n (exercice 21) : la condition de Cauchy échoue avec $\varepsilon = \frac{1}{4}$, $p = 2n$ et $q = n$.

$$\boxed{(H_n) \text{ n'est pas de Cauchy}}$$

La condition de Cauchy porte sur *tous* les couples d'indices assez grands, et pas seulement sur les indices consécutifs.

4. Pour $p \geqslant q$, les décimaux d_p et d_q sont dans $[d_q\,, d_q + 10^{-q}[$, donc $|d_p - d_q| < 10^{-q}$: la suite est de Cauchy. Si elle convergeait vers un rationnel r, r serait aussi sa limite dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $\sqrt{2}$, qui n'est pas rationnel.

$$\boxed{\mathbb{Q} \text{ n'est pas complet}}$$

C'est exactement la situation qui gênait Dedekind : la suite croissante et majorée des d_n « devrait » converger, mais sa limite manque dans $\mathbb{Q}$.

5. On procède par dichotomie : on pose $c = \frac{a_n + b_n}{2}$; si c majore A, on prend $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c$; sinon, il existe $a \in A$ tel que $a > c$, et l'on prend $a_{n+1} = a$ et $b_{n+1} = b_n$. Dans les deux cas $b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(b_n - a_n)$. La suite (b_n) est décroissante, et tout a_n, élément de A, minore tout b_p ; donc, pour $p \geqslant q$,

$$0 \leqslant b_q - b_p \leqslant b_q - a_q \leqslant \frac{b_0 - a_0}{2^q} \leqslant \frac{b_0 - a_0}{q},$$

qui est inférieur à ε pour q assez grand, par la propriété d'Archimède. La suite (b_n) est de Cauchy ; soit β sa limite. Tout $a \in A$ vérifie $a \leqslant b_n$, donc $a \leqslant \beta$ par passage à la limite ; et $a_n \geqslant b_n - \frac{b_0 - a_0}{2^n}$ tend vers β. D'après la proposition 13 du cours :

$$\boxed{\beta = \sup A}$$

Dans un corps ordonné archimédien, la propriété de la borne supérieure et la convergence des suites de Cauchy sont donc équivalentes : ce sont deux formulations de la complétude de $\mathbb{R}$, qui correspondent aux deux constructions de Dedekind et de Cantor.

EXERCICE 52 ⋆⋆⋆⋆

1. La partie $\left\{\frac{u_k}{k}\right\}$ est non vide et minorée par 0 : elle a une borne inférieure $\lambda \geqslant 0$ (théorème 1). Par récurrence sur q, $u_{(q+1)k} \leqslant u_{qk} + u_k \leqslant (q+1)\,u_k$. $\boxed{u_{qk} \leqslant q\,u_k}$

2. Si $r \geqslant 1$, $u_n \leqslant u_{qk} + u_r \leqslant q\,u_k + M_k$; si $r = 0$, $u_n \leqslant q\,u_k$. Comme $qk \leqslant n$ et $u_k \geqslant 0$, $\frac{q\,u_k}{n} = \frac{qk}{n} \cdot \frac{u_k}{k} \leqslant \frac{u_k}{k}$.

$$\boxed{\frac{u_n}{n} \leqslant \frac{u_k}{k} + \frac{M_k}{n}}$$

3. Soit $\varepsilon > 0$. Par la proposition 2, il existe k tel que $\frac{u_k}{k} \leqslant \lambda + \varepsilon$. Pour $n \geqslant \max\left(k, \frac{M_k}{\varepsilon}\right)$, on obtient $\lambda \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \lambda + 2\varepsilon$. $\boxed{\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda}$

4. Un mot de longueur $n+m$ sans deux a consécutifs se découpe en un préfixe de longueur n et un suffixe de longueur m, qui n'en contiennent pas non plus ; ce découpage est injectif, donc $u_{n+m} \leqslant u_n u_m$, et $(\ln u_n)$ est sous-additive et positive. Un mot valide de longueur $n+2$ se termine par b, précédé d'un mot valide de longueur $n+1$, ou par ba, précédé d'un mot valide de longueur n : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, avec $u_1 = 2$ et $u_2 = 3$. Ainsi $u_n = F_{n+2}$, et la formule de Binet du cours donne

$$\ln u_n = (n+2)\ln\varphi - \ln\sqrt{5} + \ln\left(1 - \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{n+2}\right),$$

dont le dernier terme tend vers 0, par l'encadrement de l'exercice 21.

$$\boxed{\frac{\ln u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln\varphi \approx 0{,}481}$$

Le lemme de Fekete donne l'existence de la limite sans calcul ; c'est ainsi que l'on définit l'*entropie* d'un système de mots, même lorsqu'aucune formule explicite n'est disponible.

EXERCICE 53 ⋆⋆⋆⋆

1. Si $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, alors pour $\varepsilon > 0$, tous les indices $\varphi(n)$ avec n assez grand vérifient $|u_{\varphi(n)} - a| \leqslant \varepsilon$, et ils sont en nombre infini. Réciproquement, on construit φ par récurrence en choisissant $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ tel que $|u_{\varphi(n+1)} - a| \leqslant \frac{1}{n+2}$, ce qui est possible puisque l'ensemble correspondant est infini.

$$\boxed{a \text{ valeur d'adhérence} \iff \forall \varepsilon > 0,\ \{n \mid |u_n - a| \leqslant \varepsilon\} \text{ infini}}$$

2. La suite $((-1)^n)$ ne prend que les valeurs ± 1, chacune une infinité de fois ; une valeur $a \notin \{-1, 1\}$ est à distance au moins $\varepsilon > 0$ de ces deux valeurs. La suite $\left(\cos\frac{2n\pi}{5}\right)$ est 5-périodique et prend les valeurs 1, $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$. Pour l'exercice 41, on a trouvé deux suites extraites recouvrant tous les indices, de limites 1 et 0.

$$\boxed{\{-1, 1\} \qquad \left\{1, \frac{\sqrt{5}-1}{4}, -\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right\} \qquad \{0, 1\}}$$

3. Une suite convergente a pour seule valeur d'adhérence sa limite (proposition 11). Réciproquement, soit (u_n) bornée, d'unique valeur d'adhérence a. Si elle ne tendait pas vers a, il existerait $\varepsilon > 0$ et une infinité d'indices tels que $|u_n - a| > \varepsilon$; ils formeraient une suite extraite bornée, dont le théorème de Bolzano-Weierstrass extrairait une suite convergente, de limite b vérifiant $|b - a| \geqslant \varepsilon$: une seconde valeur d'adhérence. Sans l'hypothèse « bornée », la suite définie par $u_{2n} = n$ et $u_{2n+1} = 0$ a pour unique valeur d'adhérence 0, mais diverge.

$$\boxed{\text{bornée et une seule valeur d'adhérence} \iff \text{convergente}}$$

4. D'après la question 1, il y a une infinité d'indices tels que $u_n \leqslant c$, au voisinage de a, et une infinité tels que $u_n > c$, au voisinage de b. Pour tout indice n_1 tel que $u_{n_1} \leqslant c$, il existe un indice ultérieur où

$u > c$; le premier d'entre eux, m, vérifie $u_{m-1} \leqslant c < u_m$. On obtient ainsi une infinité d'indices n tels que $u_n \leqslant c < u_{n+1}$, et pour eux

$$0 \leqslant c - u_n < u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

La suite extraite correspondante tend vers c : c'est une valeur d'adhérence. L'ensemble des valeurs d'adhérence vérifie donc la caractérisation des intervalles de la proposition 6.

$$\boxed{\text{l'ensemble des valeurs d'adhérence est un intervalle}}$$

L'hypothèse $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ empêche la suite de « sauter » par-dessus c sans s'en approcher.

EXERCICE 54 ⋆⋆⋆⋆

1. Les $N+1$ réels $k\alpha - \lfloor k\alpha \rfloor$ sont dans $[0\,,1[$, réunion des N intervalles $\left[\frac{j}{N}\,,\frac{j+1}{N}\right[$; deux d'entre eux, d'indices $k \neq k'$, sont dans le même intervalle. Le réel $g = (k-k')\alpha - (\lfloor k\alpha \rfloor - \lfloor k'\alpha \rfloor)$ appartient à G, et $|g| < \frac{1}{N}$; il n'est pas nul, sinon α serait rationnel.

$$\boxed{\exists g \in G,\ 0 < |g| < \frac{1}{N}}$$

2. Soit $a < b$ et N tel que $\frac{1}{N} < b - a$. Avec le g précédent et $k = \left\lfloor \frac{a}{|g|} \right\rfloor + 1$, on a $a < k|g| \leqslant a + |g| < b$, et $k|g| \in G$, puisque G est stable par addition et passage à l'opposé. $\boxed{G \text{ est dense dans } \mathbb{R}}$

3. Si 2π était rationnel, π le serait. Avec $\alpha = 2\pi$, l'ensemble G est exactement $\{n + 2k\pi \mid n, k \in \mathbb{Z}\}$. $\boxed{\{n+2k\pi\} \text{ est dense dans } \mathbb{R}}$

4. Les $N+1$ réels $n - 2\pi\lfloor \frac{n}{2\pi} \rfloor \in [0\,,2\pi[$, pour $0 \leqslant n \leqslant N$, sont dans N intervalles de longueur $\frac{2\pi}{N}$; deux d'entre eux, d'indices $n > n'$, sont dans le même. Avec $d = n - n' \in [\![1\,;N]\!]$ et $m = \lfloor \frac{n}{2\pi} \rfloor - \lfloor \frac{n'}{2\pi} \rfloor$, le réel $\delta = d - 2\pi m$ vérifie $0 < |\delta| < \frac{2\pi}{N}$, puisque π est irrationnel. Soit maintenant s réel et $n_0 \geqslant 0$; notons s' le réel de $[0\,,2\pi[$ si $\delta > 0$, ou de $]-2\pi\,,0]$ si $\delta < 0$, qui diffère de $s - n_0$ d'un multiple de 2π. Les réels $j\delta$, pour $j \in \mathbb{N}$, avancent par pas de $|\delta|$ dans la direction de s' : l'un d'eux vérifie $|j\delta - s'| \leqslant |\delta|$. L'entier $n = n_0 + jd \geqslant n_0$ vérifie alors

$$n - s - 2\pi(jm + K) = j\delta - s' \quad \text{pour un entier } K, \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{|n - s - 2k\pi| \leqslant \frac{2\pi}{N}}.$$

5. La formule $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ et $|\sin t| \leqslant |t|$ donnent $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$. Soit $y \in [-1\,,1]$, $s = \operatorname{Arcsin} y$ et $\varepsilon > 0$. Avec $N > \frac{2\pi}{\varepsilon}$ et un entier n_0 quelconque, la question 4 fournit $n \geqslant n_0$ tel que

$$|\sin n - y| = |\sin(n - 2k\pi) - \sin s| \leqslant |n - 2k\pi - s| \leqslant \varepsilon.$$

Il y a donc une infinité d'entiers n tels que $|\sin n - y| \leqslant \varepsilon$, et l'exercice 53 conclut.

$$\boxed{\text{tout réel de } [-1\,,1] \text{ est valeur d'adhérence de } (\sin n)}$$

La suite $(\sin n)$, que l'on aurait pu croire régulière, passe donc arbitrairement près de chaque valeur de $[-1\,,1]$ une infinité de fois ; c'est l'irrationalité de π qui l'empêche de se répéter.