EXERCICES – CHAPITRE 7

NOMBRES RÉELS ET SUITES NUMÉRIQUES

⋆ *application directe* ⋆⋆ *mise en œuvre* ⋆⋆⋆ *problème* ⋆⋆⋆⋆ *problème long, en autonomie*

Nombres réels et borne supérieure

EXERCICE 1 ⋆

Pour chacune des parties suivantes de $\mathbb{R}$, déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand et le plus petit élément.

(a) $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$

(b) $B = \{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$

(c) $C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 3\}$

(d) $D = \{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \mid (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2\}$

(e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 < 0\}$

(f) $F = \{(-1)^n \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$

EXERCICE 2 ⋆⋆

Partie entière. Démontrer les propriétés suivantes, pour tous réels x et y, tout entier relatif m et tout entier $n \geqslant 1$.

(a) $\lfloor x+m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$, et la fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique. Tracer sa courbe sur $[-2\,,2]$.

(b) $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$, et les deux cas d'égalité sont possibles.

(c) $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$ vaut 0 si x est entier, et -1 sinon.

(d) $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

(e) *Identité de Hermite :* $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$. On pourra distinguer selon que $x - \lfloor x \rfloor$ est inférieur ou supérieur à $\frac{1}{2}$.

EXERCICE 3 ⋆⋆

Soit A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$, et $\lambda > 0$. On note $A+B = \{a+b \mid a \in A,\ b \in B\}$, $\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}$ et $-A = \{-a \mid a \in A\}$. Démontrer les égalités et inégalités suivantes.

(a) Si $A \subset B$, alors $\sup A \leqslant \sup B$ et $\inf A \geqslant \inf B$.

(b) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

(c) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

(d) $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$ et $\sup(-A) = -\inf A$.

Que dire de $\sup(A \cap B)$? Et de $\sup\{ab \mid a \in A,\ b \in B\}$, si l'on ne suppose plus les éléments positifs ?

EXERCICE 4 ⋆

1. Soit r un rationnel non nul et x un irrationnel. Montrer que $r+x$ et rx sont irrationnels.
2. La somme et le produit de deux irrationnels sont-ils toujours irrationnels ?
3. En adaptant la démonstration du chapitre 1 pour $\sqrt{2}$, montrer que $\sqrt{6}$ est irrationnel, puis que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ l'est.
4. Montrer que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel.

EXERCICE 5 ⋆⋆⋆

Soit X et Y deux ensembles non vides et $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.

1. Montrer que $\sup\limits_{x\in X}\Big(\sup\limits_{y\in Y} f(x,y)\Big) = \sup\limits_{y\in Y}\Big(\sup\limits_{x\in X} f(x,y)\Big) = \sup\limits_{(x,y)\in X\times Y} f(x,y)$.
2. Montrer que $\sup\limits_{x\in X}\Big(\inf\limits_{y\in Y} f(x,y)\Big) \leqslant \inf\limits_{y\in Y}\Big(\sup\limits_{x\in X} f(x,y)\Big)$.
3. Avec $X = Y = \{0,1\}$ et $f(x,y) = |x-y|$, montrer que l'inégalité précédente peut être stricte.

EXERCICE 6 ⋆⋆⋆

On note $G = \{p+q\sqrt{2} \mid (p,q) \in \mathbb{Z}^2\}$ et $u = \sqrt{2}-1$.

1. Montrer que G est stable par addition et par multiplication, et que $u \in \left]0\,,\tfrac{1}{2}\right[$.
2. En déduire que $u^n \in G$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que $u^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
3. Soit $a < b$ deux réels. En choisissant n tel que $u^n < b-a$, puis un multiple entier de u^n, montrer que $]a\,,b[$ contient un élément de G. Conclure que G est dense dans $\mathbb{R}$.
4. Les éléments de G sont-ils tous irrationnels ? L'ensemble $G \setminus \mathbb{Q}$ est-il dense dans $\mathbb{R}$?

EXERCICE 7 ⋆⋆

1. Déterminer, en calculant des carrés, les valeurs décimales approchées par défaut de $\sqrt{2}$ à la précision 10^{-n} pour $0 \leqslant n \leqslant 4$.
2. Soit x un réel. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante de rationnels qui converge vers x, et une suite strictement décroissante d'irrationnels qui converge vers x.
3. Soit $A = \{r \in \mathbb{Q} \mid r > 0 \text{ et } r^2 < 2\}$. Montrer que $\sup A = \sqrt{2}$ à l'aide de la caractérisation séquentielle de la borne supérieure.

EXERCICE 8 ⋆

Étudier la convergence des suites dont les termes généraux sont les suivants, et donner leur limite éventuelle.

(a) $\dfrac{n^2+3n}{2n^2-1}$

(b) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

(c) $\sqrt{n^2+n}-n$

(d) $\dfrac{3^n+(-2)^n}{3^n-(-2)^n}$

(e) $\dfrac{n+(-1)^n}{n^2+1}$

(f) $\dfrac{\ln n+1}{n+4}$

(g) $\dfrac{\mathrm{e}^n+n^2}{n^4+1}$

(h) $\dfrac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$

(i) $\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}$

(j) $\dfrac{\cos n}{n+1}$

(k) $\dfrac{(-1)^n+n}{(-1)^n+2}$

(l) $\dfrac{n^3\,2^n+3^n}{n!}$

EXERCICE 9 ⋆

Retour à la définition.

1. Montrer, en revenant à la définition, que $\dfrac{3n-1}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$: pour $\varepsilon>0$, donner explicitement un rang N convenable. Que vaut-il pour $\varepsilon=10^{-2}$?
2. Montrer de même que $\dfrac{n^2}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
3. Écrire la négation de « $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ », puis montrer, avec $\varepsilon=\frac{1}{2}$, que la suite $\big((-1)^n\big)$ ne converge vers aucun réel.
4. Écrire la négation de « $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ », et montrer que la suite $u_n=n(1+(-1)^n)$ n'est pas majorée mais ne tend pas vers $+\infty$.

EXERCICE 10 ⋆⋆

1. Peut-on déterminer la nature, convergente ou divergente, de la somme de deux suites si l'on connaît la nature de chacune ? On traitera tous les cas, par une démonstration ou un contre-exemple.
2. Même question pour le produit.
3. Si (u_n+v_n) et (u_n-v_n) convergent, que dire de (u_n) et (v_n) ? Si (u_nv_n) et (u_n+v_n) convergent ?

EXERCICE 11 ⋆⋆

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

1. Montrer que, si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\ell|$. La réciproque est-elle vraie ? Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si et seulement si $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. Pour deux réels a et b, exprimer $\max(a,b)$ et $\min(a,b)$ à l'aide de $a+b$ et de $|a-b|$. En déduire que, si (u_n) et (v_n) convergent, les suites $\big(\max(u_n,v_n)\big)$ et $\big(\min(u_n,v_n)\big)$ convergent, et préciser leurs limites.

EXERCICE 12 ⋆⋆

Étudier la convergence des suites suivantes, définies pour $n \geqslant 1$, en encadrant leur terme général ; x désigne un réel fixé.

(a) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$

(b) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$

(c) $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$

(d) $u_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} k!$

(e) $u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1}$

(f) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

Indication : pour (e), isoler les termes $k \in \{0, 1, n-1, n\}$ et minorer $\binom{n}{k}$ par $\binom{n}{2}$ pour les autres.

EXERCICE 13 ⋆⋆

1. Soit (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $[0\,,1]$ telles que $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
2. Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $0 \leqslant u_n \leqslant 3$ et $0 \leqslant v_n \leqslant 2$ pour tout n, et $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 6$. Que dire de (u_n) et (v_n) ?
3. Soit (u_n) une suite à valeurs dans $[0\,,1]$ telle que $\frac{u_n+u_n^2}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

EXERCICE 14 ⋆⋆⋆

Critère de d'Alembert. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs, et $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

1. Montrer que, si $\ell < 1$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. Montrer que, si $\ell > 1$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
3. Montrer, par trois exemples, que l'on ne peut rien conclure si $\ell = 1$.
4. Étudier les suites $\frac{n^{10}}{1{,}01^n}$, $\frac{a^n}{n!}$ pour $a > 0$, $\binom{2n}{n}\frac{1}{5^n}$ et $\binom{2n}{n}\frac{1}{3^n}$.

EXERCICE 15 ⋆⋆

1. Montrer qu'une suite d'entiers relatifs est convergente si et seulement si elle est stationnaire.
2. Soit (u_n) une suite qui converge vers un réel ℓ. Que dire de la suite $(\lfloor u_n \rfloor)$? On distinguera les cas $\ell \notin \mathbb{Z}$ et $\ell \in \mathbb{Z}$, en donnant dans le second cas trois exemples de comportements différents.
3. Soit (u_n) une suite d'entiers naturels deux à deux distincts. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

EXERCICE 16 ⋆⋆⋆

La formule de Viète. Soit $x \in]0\,,\pi[$. On pose, pour $n \geqslant 1$, $P_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k}$.

1. Montrer que $P_n \cdot 2^n \sin\frac{x}{2^n} = \sin x$.
2. À l'aide de l'encadrement $t - \frac{t^3}{6} \leqslant \sin t \leqslant t$, valable pour $t \geqslant 0$ (chapitre 5), montrer que $2^n \sin\frac{x}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. En déduire que $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\sin x}{x}$.
3. En prenant $x = \frac{\pi}{2}$, montrer que

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots$$

au sens où le produit des n premiers facteurs tend vers $\frac{2}{\pi}$.

Suites monotones et suites adjacentes

EXERCICE 17 ⋆

Étudier la monotonie des suites suivantes.

(a) $u_n = \binom{n}{p}$ pour $n \geqslant p$, avec $p \in \mathbb{N}$ fixé

(b) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n}$

(c) $u_n = \frac{n!}{2^n}$

(d) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln k - n \ln n$

(e) $u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$

(f) $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n^2}{1+4u_n}$

Pour chacune, dire si l'on peut conclure à sa convergence.

EXERCICE 18 ⋆⋆

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k}$.

1. Montrer que (S_n) converge, et préciser sa limite.
2. Montrer que $T_{n+1} = \frac{T_n + S_n}{3}$ pour tout n.
3. En déduire que (T_n) est majorée par $\frac{3}{4}$, puis qu'elle converge, et déterminer sa limite.

EXERCICE 19 ⋆⋆

Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes dans chacun des cas suivants.

(a) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

(b) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$. En déduire que $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$.

EXERCICE 20 ⋆⋆

Critère des sommes alternées. Soit (a_n) une suite décroissante de limite nulle, et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$.

1. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire que (S_n) converge vers un réel S.
2. Montrer que $|S - S_n| \leqslant a_{n+1}$ pour tout n.
3. On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{4}$ (exercice 25 de la feuille du chapitre 6). Combien de termes faut-il sommer pour que la question 2 garantisse une approximation de $\frac{\pi}{4}$ à 10^{-3} près ?

EXERCICE 21 ⋆⋆⋆

La constante d'Euler. On pose, pour $n \geqslant 1$, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = H_n - \ln(n+1)$.

1. À l'aide de l'inégalité $\ln t \leqslant t-1$ (chapitre 5), appliquée à des valeurs bien choisies de t, montrer que pour tout $x > -1$, $\dfrac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
2. En déduire que (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Leur limite commune est la *constante d'Euler*, notée γ ; donner un encadrement de γ à l'aide de $H_{10} \approx 2{,}9290$.
3. Montrer que $H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et que $\dfrac{H_n}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
4. En écrivant $H_{2n} - H_n = u_{2n} - u_n + \ln 2$, retrouver la limite des suites de l'exercice 19 (a).

EXERCICE 22 ⋆⋆⋆

Irrationalité de la limite de $\sum \frac{1}{k!}$. Le cours a montré que les suites $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n \cdot n!}$, pour $n \geqslant 1$, sont adjacentes ; on note ℓ leur limite commune, dont le chapitre 18 montrera qu'elle vaut e.

1. Montrer que (u_n) est strictement croissante et (v_n) strictement décroissante, puis que $u_n < \ell < v_n$ pour tout $n \geqslant 1$.
2. On suppose que $\ell = \frac{p}{q}$, avec p et q entiers naturels non nuls. En multipliant l'encadrement précédent, pris au rang $n = q$, par $q \cdot q!$, aboutir à une contradiction.
3. Conclure, et calculer u_6 et v_6 : combien de décimales de ℓ obtient-on ?

EXERCICE 23 ⋆⋆

Moyennes arithmétique et harmonique. Soit $x > 1$. On définit $u_0 = x$, $v_0 = 1$ et, pour tout n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

1. Montrer que les suites sont bien définies, strictement positives, et que $u_n v_n = x$ pour tout n.
2. Montrer que $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$, puis que les suites sont adjacentes et convergent vers $\sqrt{x}$.
3. Montrer que $0 \leqslant u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}(u_n - v_n)^2$. Pour $x = 2$, majorer $u_4 - \sqrt{2}$ et commenter la vitesse de convergence.
4. Vérifier que, pour $x = 2$, la suite (u_n) vérifie $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$: c'est la méthode de Héron.

EXERCICE 24 ⋆⋆⋆

Moyenne arithmético-géométrique. Soit $a > b > 0$. On définit $u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

1. Montrer que, pour tous réels positifs s et t, $\sqrt{st} \leqslant \frac{s+t}{2}$. En déduire que les suites sont bien définies et que $v_n \leqslant u_n$ pour $n \geqslant 1$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ décroît, que (v_n) croît, et que $0 \leqslant u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(u_n - v_n)$. Conclure que les suites sont adjacentes ; leur limite commune est la *moyenne arithmético-géométrique* de a et b.
3. Montrer que $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{(u_n - v_n)^2}{2(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n})^2} \leqslant \dfrac{(u_n - v_n)^2}{8b}$. Pour $a = 2$ et $b = 1$, combien d'étapes suffisent pour obtenir la limite à 10^{-10} près ?

Suites extraites et théorème de Bolzano-Weierstrass

EXERCICE 25 ⋆

Montrer que les suites suivantes divergent.

(a) $u_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$

(b) $u_n = \sin \dfrac{n\pi}{4} + \dfrac{1}{n+1}$

(c) $u_n = n^{(-1)^n}$, pour $n \geqslant 1$

(d) une suite périodique non constante

La suite (c) est-elle bornée ? Tend-elle vers $+\infty$?

EXERCICE 26 ⋆⋆

Soit (u_n) une suite réelle.

1. On suppose que (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Montrer que (u_n) converge.
2. On suppose que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent, et que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que (u_n) converge.
3. On suppose que (u_n) converge et que $\big((-1)^n u_n\big)$ converge. Que peut-on dire ?

EXERCICE 27 ⋆⋆

Soit (u_n) une suite croissante.

1. On suppose que (u_n) admet une suite extraite majorée. Montrer que (u_n) converge.
2. On suppose que (u_n) admet une suite extraite convergente, de limite ℓ. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
3. Une suite croissante dont aucune suite extraite ne converge tend-elle vers $+\infty$?

EXERCICE 28 ⋆⋆⋆

Soit θ un réel qui n'est pas un multiple entier de π.

1. Exprimer $\cos\big((n+1)\theta\big) + \cos\big((n-1)\theta\big)$ et $\cos\big((n+1)\theta\big)$ en fonction de $\cos(n\theta)$, $\sin(n\theta)$, $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
2. On suppose que $\big(\cos(n\theta)\big)$ converge vers un réel ℓ. Montrer que $\ell = 0$, puis que $\sin(n\theta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et aboutir à une contradiction.
3. Montrer de même que la suite $\big(\sin(n\theta)\big)$ diverge.
4. Que se passe-t-il si θ est un multiple de π ?

EXERCICE 29 ⋆⋆⋆

1. Soit (u_n) une suite telle que, pour tout entier $k \geqslant 2$, la suite extraite $(u_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ_k. En considérant $(u_{kk'n})$, montrer que tous les ℓ_k sont égaux.
2. On définit $u_n = 1$ si n est un nombre premier, et $u_n = 0$ sinon. Montrer que, pour tout $k \geqslant 2$, la suite (u_{kn}) converge, mais que (u_n) diverge. On utilisera l'existence d'une infinité de nombres premiers (chapitre 1).
3. Conclure : la convergence de toutes les suites (u_{kn}), pour $k \geqslant 2$, entraîne-t-elle celle de (u_n) ?

EXERCICE 30 ⋆⋆⋆

Une autre démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass : le lemme des pics. Soit (u_n) une suite réelle. On dit que l'entier n est un *pic* si $u_k < u_n$ pour tout $k > n$, et l'on note E l'ensemble des pics.

1. On suppose E infini. Montrer que (u_n) admet une suite extraite strictement décroissante.
2. On suppose E fini. Montrer que (u_n) admet une suite extraite croissante. On pourra partir d'un entier n_0 strictement supérieur à tous les pics.
3. En déduire que toute suite réelle admet une suite extraite monotone, puis une nouvelle démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass.

EXERCICE 31 ⋆⋆

1. Montrer qu'une suite non majorée admet une suite extraite qui tend vers $+\infty$.
2. En déduire qu'une suite réelle qui n'admet aucune suite extraite convergente vérifie
$$|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$
3. Soit (z_n) une suite de complexes telle que $|z_p - z_q| \geqslant 1$ pour tous $p \neq q$. Montrer que
$$|z_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Suites particulières

EXERCICE 32 ⋆

Exprimer le terme général des suites suivantes en fonction de n ; pour les suites récurrentes linéaires d'ordre 2, on donnera la forme réelle.

(a) $u_1 = 7$ et $u_{n+1} = -2u_n$

(b) $u_1 = 3$ et $2u_n = u_{n-1}$ pour $n \geqslant 2$

(c) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$

(d) $u_0 = 0$ et $4u_{n+1} + 1 = u_n$

(e) $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$

(f) $u_0 = u_1 = 1$, $2u_{n+2} + u_{n+1} - u_n = 0$

(g) $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 3u_n$

(h) $u_0 = 1$, $u_1 = -1$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$

(i) $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$

(j) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + n + 1$

(k) $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$

(l) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n^2$

Indication : pour (k), on étudiera $\frac{1}{u_n}$ *; pour (l), on étudiera* $\ln u_n$.

EXERCICE 33 ⋆⋆

Pour $n \geqslant 1$, on note u_n le nombre d'entiers naturels qui s'écrivent avec exactement n chiffres en base dix, le premier étant non nul, et dont l'écriture ne contient pas la séquence « 13 » ; on pose $u_0 = 1$. Ainsi $u_1 = 9$ et $u_2 = 90 - 1 = 89$.

1. Calculer u_3 en dénombrant les entiers à trois chiffres qui contiennent « 13 ».
2. Montrer que $u_{n+2} = 10u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pourra raisonner sur le dernier chiffre, puis compter les nombres qui se terminent par 13.
3. En déduire u_n en fonction de n, et vérifier la formule pour $n = 3$.

EXERCICE 34 ⋆⋆⋆

Suites homographiques. On étudie des suites définies par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On prend $f(x) = \dfrac{1+x}{2+x}$.
   (a) Montrer que $[0\,,1]$ est stable par f. Résoudre $f(x) = x$: on trouve deux solutions $\ell_1 > \ell_2$.
   (b) Montrer que la suite $v_n = \dfrac{u_n - \ell_1}{u_n - \ell_2}$ est géométrique, et préciser sa raison.
   (c) En déduire la limite de (u_n), puis une majoration de $|u_n - \ell_1|$ de la forme $C\,q^n$.
2. On prend $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$.
   (a) Résoudre $f(x) = x$: on trouve une unique solution ℓ. Montrer que $u_n \neq \ell$ pour tout n.
   (b) Montrer que la suite $w_n = \dfrac{1}{u_n - \ell}$ est arithmétique. En déduire u_n en fonction de n et sa limite.
3. Comparer les vitesses de convergence dans les deux cas.

EXERCICE 35 ⋆⋆⋆

1. Montrer que la suite $a_n = (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients entiers, et en déduire que a_n est un entier pair pour tout n.
2. En déduire que $\sin\left((3+\sqrt{5})^n \pi\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On utilisera l'inégalité $|\sin x| \leqslant |x|$ du chapitre 4.
3. Reprendre la question 1 avec $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. La suite $\left(\sin\left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n \pi\right)\right)$ converge-t-elle ?
4. Montrer en revanche que la suite $\left((3+\sqrt{5})^n\right)$ n'est jamais entière pour $n \geqslant 1$.

EXERCICE 36 ⋆

Soit (z_n) une suite complexe telle que $z_{n+1} = 3z_n - \overline{z_n}$ pour tout n. En écrivant $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$, exprimer z_n en fonction de z_0 et de n. Pour quelles valeurs de z_0 la suite converge-t-elle ? Même question avec $z_{n+1} = \frac{1}{5}(3z_n - 2\overline{z_n})$.

EXERCICE 37 ⋆⋆⋆

Soit $z_0 = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in\,]-\pi\,,\pi]$, et (z_n) la suite définie par $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}$.

1. Montrer que, pour tout réel $\alpha \in\,]-\pi\,,\pi]$, $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}+1}{2} = \cos\dfrac{\alpha}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}$.
2. En déduire z_n en fonction de r, θ et n.
3. À l'aide de l'exercice 16, déterminer la limite de (z_n). On distinguera les cas $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

Suites récurrentes et suites implicites

EXERCICE 38 ⋆⋆

On étudie la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{3}{16}$.

1. Déterminer les points fixes de $f : x \mapsto x^2 + \frac{3}{16}$, et le signe de $f(x) - x$.
2. Montrer que la suite est croissante à partir du rang 1 ou décroissante à partir du rang 1, selon la position de u_1.
3. Déterminer, selon la valeur de u_0, le comportement de (u_n) : on trouvera trois cas, suivant que $|u_0|$ est inférieur, égal ou supérieur à $\frac{3}{4}$.

EXERCICE 39 ⋆⋆

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{u_n}$.

1. Montrer que l'intervalle $[1\,,3]$ est stable par $f : x \mapsto 1 + \frac{2}{x}$, et que f y est décroissante.
2. Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraires, et déterminer leurs limites.
3. Conclure. Retrouver le résultat en majorant $|u_{n+1} - 2|$ en fonction de $|u_n - 2|$ pour $n \geqslant 1$.

EXERCICE 40 ⋆⋆

Étudier les suites définies par les relations suivantes.

(a) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}$.

(b) $u_0 = -\frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = u_n + u_n^2$. Que se passe-t-il pour d'autres valeurs de u_0 ?

(c) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sin u_n$. On montrera de plus, à l'aide de $\sin t \geqslant t - \frac{t^3}{6}$ pour $t \geqslant 0$, que $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \leqslant \frac{12}{25}$, puis que $u_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{1+n/2}}$: la convergence est très lente.

EXERCICE 41 ⋆⋆⋆

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = (1 - u_n)^2$, et $f : x \mapsto (1-x)^2$.

1. Montrer que $[0\,,1]$ est stable par f, et que f y est décroissante. Déterminer le point fixe de f dans $[0\,,1]$.
2. Factoriser $f(f(x)) - x$, et étudier son signe sur $[0\,,1]$.
3. En déduire le comportement de (u_{2n}) et de (u_{2n+1}). La suite (u_n) converge-t-elle ?
4. Que se passe-t-il si u_0 est le point fixe de f ? Si $u_0 = 0$?

EXERCICE 42 ⋆⋆

1. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, l'équation $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$ a une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+$, et que $\frac{1}{2} \leqslant x_n \leqslant 1$.
2. Montrer que la suite (x_n) est décroissante.
3. Montrer que $x_n = \frac{1}{2}(1 + x_n^{n+1})$, et en déduire que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$.

EXERCICE 43 ⋆⋆

Pour $n \geqslant 1$, on note $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

1. Montrer que f_n s'annule en un unique réel u_n, et que $0 < u_n < \frac{1}{n}$.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et tend vers 0.
3. Montrer que $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, puis que $n^5(1 - nu_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

EXERCICE 44 ⋆⋆⋆

1. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, l'équation $x + \ln x = n$ a une unique solution u_n dans $]0\,,+\infty[$.
2. Montrer que (u_n) est croissante, que $u_n \geqslant 1$, et que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
3. Montrer que $n - \ln n \leqslant u_n \leqslant n$ pour tout $n \geqslant 1$, puis que $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
4. À l'aide de l'inégalité $\ln(1-h) \geqslant -\frac{h}{1-h}$ pour $h \in [0\,,1[$, montrer que $u_n - n + \ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercices de synthèse

EXERCICE 45 ⋆⋆

Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

1. Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Q}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.
2. Si une partie non vide et majorée A de $\mathbb{R}$ ne contient pas sa borne supérieure, alors A est infinie.
3. Toute suite bornée est convergente.
4. Toute suite convergente est monotone à partir d'un certain rang.
5. Si $u_n > 0$ pour tout n et si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $\ell > 0$.
6. Si $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors (u_n) converge.
7. Si (u_n^2) converge, alors (u_n) converge.
8. Une suite croissante qui n'est pas majorée tend vers $+\infty$.
9. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, avec $u_n < v_n$ pour tout n, alors toute suite (w_n) telle que $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$ converge vers ℓ.
10. Toute suite réelle admet une suite extraite qui a une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

EXERCICE 46 ⋆⋆

Un théorème de point fixe sans continuité. Soit $f : [0\,,1] \to [0\,,1]$ une fonction croissante, que l'on ne suppose pas continue, et $A = \{x \in [0\,,1] \mid f(x) \geqslant x\}$.

1. Justifier l'existence de $s = \sup A$. Montrer que $f(s)$ majore A, puis que $f(s) \in A$, et en déduire que $f(s) = s$.
2. Montrer que s est le plus grand point fixe de f. Comment obtenir de même le plus petit ?
3. On prend $f(x) = \frac{1}{4}$ pour $x < \frac{1}{2}$, et $f(x) = \frac{3}{4}$ pour $x \geqslant \frac{1}{2}$. Déterminer A, s et les points fixes de f.
4. Montrer par un exemple que le résultat tombe en défaut pour une fonction décroissante de $[0\,,1]$ dans $[0\,,1]$.
5. On note $Q_1 = \mathbb{Q} \cap [0\,,1]$ et $g(x) = \dfrac{2x+1}{2x+2}$. Montrer que g est croissante et envoie Q_1 dans Q_1, mais qu'elle n'a aucun point fixe dans Q_1. Quelle étape de la question 1 ne fonctionne plus si l'on remplace $[0\,,1]$ par Q_1 ?

EXERCICE 47 ⋆⋆⋆

Le théorème de Cesàro. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle, et $c_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$ la moyenne de ses n premiers termes.

1. On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Soit $\varepsilon > 0$, et N tel que $|u_n| \leqslant \varepsilon$ pour $n > N$. Montrer que, pour $n > N$,
$$|c_n| \leqslant \frac{|u_1 + \cdots + u_N|}{n} + \varepsilon,$$
et en déduire que $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer ensuite que, si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
2. Montrer que, si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
3. Montrer par un exemple que la réciproque de la question 1 est fausse. Montrer qu'elle est vraie si (u_n) est monotone.
4. Application : si $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \in \mathbb{R}$, montrer que $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$. En déduire la limite de $\frac{\ln(n!)}{n \ln n}$, en appliquant ce résultat à $u_n = \ln(n!) - n \ln n$ et en utilisant l'encadrement de $\ln(1+x)$ de l'exercice 21.

EXERCICE 48 ⋆⋆⋆

Fractions égyptiennes. On appelle *écriture égyptienne* d'un rationnel $r > 0$ une écriture

$$r = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \cdots + \frac{1}{q_s}, \qquad \text{où } s \geqslant 1 \text{ et } q_1 < q_2 < \cdots < q_s \text{ sont des entiers naturels non nuls.}$$

1. Montrer que tous les dénominateurs d'une écriture égyptienne de r vérifient $q_j \geqslant \frac{1}{r}$.
2. Soit $x = \frac{a}{b}$, où a et b sont des entiers tels que $1 \leqslant a \leqslant b$, et q le plus petit entier naturel non nul tel que $\frac{1}{q} \leqslant x$.
   (a) Justifier l'existence de q, et montrer que $x - \frac{1}{q} = \dfrac{aq - b}{bq}$, avec $0 \leqslant aq - b < a$.
   (b) On suppose $x < 1$. Montrer que $q \geqslant 2$ et que $x - \frac{1}{q} < \dfrac{1}{q(q-1)}$.
   (c) Démontrer, par récurrence forte sur a, que tout rationnel de $]0\,,1]$ admet une écriture égyptienne. Appliquer la méthode obtenue, dite *gloutonne*, au rationnel $\frac{4}{5}$.

3. Soit $r > 0$ un rationnel ; on pose $H_0 = 0$ et l'on note H_m comme à l'exercice 21. Justifier l'existence du plus grand entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $H_m \leqslant r$, puis montrer que r admet une écriture égyptienne. Traiter l'exemple $r = 2$.

4. Montrer que tout rationnel $r > 0$ admet une infinité d'écritures égyptiennes.

EXERCICE 49 ⋆⋆⋆

Deux limites que l'on ne peut pas échanger.

1. Soit y un réel. Montrer que la suite $\left((\cos y)^{2m}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ converge, vers 1 si y est un multiple entier de π, et vers 0 sinon.

2. Soit x un réel. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n(x)$ la limite de la suite $\left((\cos(2\pi\, n!\, x))^{2m}\right)_{m\in\mathbb{N}}$. Montrer que $f_n(x)$ vaut 1 si $2\, n!\, x$ est un entier, et 0 sinon.

3. En déduire que, pour tout réel x, la suite $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 si x est rationnel, et vers 0 sinon. On obtient ainsi, par deux passages à la limite, la fonction de Dirichlet, indicatrice de $\mathbb{Q}$.

4. On reprend les notations de l'exercice 22 : ℓ est la limite commune des suites (u_n) et (v_n). Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, le réel $n!\, u_n$ est un entier et $0 < n!\, \ell - n!\, u_n < \frac{1}{n}$. En déduire, à l'aide de l'égalité $1 - \cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2}$ et de l'inégalité $|\sin t| \leqslant |t|$ du chapitre 4, que $\cos(2\pi\, n!\, \ell) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

5. Soit $m \in \mathbb{N}$ fixé. Déterminer la limite de la suite $\left((\cos(2\pi\, n!\, \ell))^{2m}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Comparer les deux limites itérées

$$\lim_{m\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty}\left(\cos(2\pi\, n!\, \ell)\right)^{2m}\right) \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{m\to+\infty}\left(\cos(2\pi\, n!\, \ell)\right)^{2m}\right),$$

et conclure.

EXERCICE 50 ⋆⋆⋆

Empiler des briques au-dessus du vide. On pose $n \geqslant 1$ briques identiques et homogènes, de longueur 1, les unes sur les autres, une par étage, au bord d'une table : la brique du bas repose sur la table, et chacune des autres sur la brique située juste au-dessous. On repère les positions sur un axe horizontal orienté vers le vide, dont l'origine est le bord de la table, celle-ci occupant les abscisses négatives. On numérote les briques de haut en bas ; on note c_k l'abscisse du milieu de la brique k, qui occupe donc le segment $\left[c_k - \frac{1}{2}\,, c_k + \frac{1}{2}\right]$, et

$$G_k = \frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_k}{k}$$

l'abscisse du centre de gravité des k briques du haut. On admet le principe de statique suivant : la pile est en équilibre si et seulement si $|G_k - c_{k+1}| \leqslant \frac{1}{2}$ pour tout $k \in [\![1\,; n-1]\!]$, autrement dit si le centre de gravité des k briques du haut se trouve au-dessus de la brique $k+1$, et si $G_n \leqslant 0$. On appelle *surplomb* l'abscisse $c_1 + \frac{1}{2}$ du bord droit de la brique du haut, et l'on note H_n comme à l'exercice 21.

1. On suppose la pile en équilibre. Montrer que $G_{k+1} \geqslant G_k - \dfrac{1}{2(k+1)}$ pour tout $k \in [\![1\,; n-1]\!]$, et en déduire que le surplomb est au plus égal à $\frac{1}{2}H_n$.

2. On pose $c_1 = \frac{1}{2}(H_n - 1)$, puis $c_{k+1} = G_k - \frac{1}{2}$ pour $k \in [\![1\,; n-1]\!]$. Montrer que l'on obtient une pile en équilibre, de surplomb $\frac{1}{2}H_n$. Pour $n = 4$, calculer l'abscisse du bord droit de chaque brique : que remarque-t-on pour la brique du haut ?

3. Montrer que l'on peut obtenir un surplomb aussi grand que l'on veut.

4. Déduire de l'exercice 21 l'encadrement $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n$. Soit $D > 0$; montrer que le plus petit nombre de briques permettant un surplomb au moins égal à D est compris entre e^{2D-1} et e^{2D}. Combien de briques faut-il, en ordre de grandeur, pour un surplomb de dix longueurs de brique ?

EXERCICE 51 ⋆⋆⋆⋆

Suites de Cauchy et complétude de $\mathbb{R}$. Une suite réelle (u_n) est dite *de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geqslant N, \quad |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon.$$

1. Montrer qu'une suite convergente est de Cauchy.
2. Soit (u_n) une suite de Cauchy. Montrer qu'elle est bornée, puis, à l'aide du théorème de Bolzano-Weierstrass, qu'elle converge.
3. La suite (H_n) de l'exercice 21 vérifie-t-elle $|H_{n+1} - H_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$? Est-elle de Cauchy ? Que montre cet exemple ?
4. On se place dans $\mathbb{Q}$: montrer que la suite des valeurs décimales approchées par défaut de $\sqrt{2}$ est une suite de rationnels qui vérifie la condition de Cauchy, mais qui n'a pas de limite dans $\mathbb{Q}$. Comparer avec l'introduction historique du cours.
5. Réciproquement, on admet ici seulement que toute suite de Cauchy de réels converge, et l'on veut retrouver l'axiome de la borne supérieure. Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, $a_0 \in A$ et b_0 un majorant. On construit par dichotomie $a_n \in A$ et un majorant b_n de A tels que $b_n - a_n \leqslant \frac{b_0 - a_0}{2^n}$. À l'aide de la propriété d'Archimède, montrer que (b_n) est de Cauchy, puis que sa limite est la borne supérieure de A.

EXERCICE 52 ⋆⋆⋆⋆

Le lemme de Fekete. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels positifs, *sous-additive*, c'est-à-dire telle que $u_{n+m} \leqslant u_n + u_m$ pour tous n, $m \geqslant 1$. On pose $\lambda = \inf\left\{\frac{u_k}{k} \mid k \geqslant 1\right\}$.

1. Justifier l'existence de λ. Montrer que $u_{qk} \leqslant q\, u_k$ pour tous q, $k \geqslant 1$.
2. Soit $k \geqslant 1$ fixé. Pour $n \geqslant k$, on écrit la division euclidienne $n = qk + r$, avec $0 \leqslant r < k$. Montrer que
$$\frac{u_n}{n} \leqslant \frac{u_k}{k} + \frac{M_k}{n}, \qquad \text{où} \qquad M_k = \max(u_1, \dots, u_k),$$
en convenant que $u_0 = 0$ dans le cas $r = 0$.
3. En déduire que $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$.
4. Application : on note u_n le nombre de mots de longueur n, écrits avec les lettres a et b, qui ne contiennent pas deux a consécutifs. Montrer que $\ln u_{n+m} \leqslant \ln u_n + \ln u_m$, et identifier la limite de $\frac{\ln u_n}{n}$ à l'aide d'une récurrence linéaire.

EXERCICE 53 ⋆⋆⋆⋆

Valeurs d'adhérence. On dit qu'un réel a est une *valeur d'adhérence* de la suite (u_n) si a est la limite d'une suite extraite de (u_n).

1. Montrer que a est une valeur d'adhérence si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid |u_n - a| \leqslant \varepsilon\}$ est infini.
2. Déterminer les valeurs d'adhérence des suites $\left((-1)^n\right)$, $\left(\cos \frac{2n\pi}{5}\right)$ et (u_n) de l'exercice 41.
3. Montrer qu'une suite bornée converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence. Le résultat subsiste-t-il sans l'hypothèse « bornée » ?
4. On suppose (u_n) bornée et $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Soit $a < b$ deux valeurs d'adhérence et $c \in]a\,, b[$. Montrer qu'il existe une infinité d'indices n tels que $u_n \leqslant c < u_{n+1}$, et en déduire que c est une valeur d'adhérence : l'ensemble des valeurs d'adhérence est un intervalle.

EXERCICE 54 ⋆⋆⋆⋆

Densité de $\mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$ *et valeurs de* $\sin n$. Soit α un irrationnel, et $G=\{p+q\alpha \mid (p,q)\in\mathbb{Z}^2\}$.

1. Soit $N\geqslant 1$. En appliquant le principe des tiroirs du chapitre 2 aux $N+1$ réels $k\alpha-\lfloor k\alpha\rfloor$, pour $0\leqslant k\leqslant N$, et aux N intervalles $\left[\frac{j}{N}\,,\frac{j+1}{N}\right[$, montrer que G contient un élément g tel que $0<|g|<\frac{1}{N}$.
2. En déduire, comme à l'exercice 6, que G est dense dans $\mathbb{R}$.
3. On admet que π est irrationnel (Lambert, 1761). Montrer que l'ensemble $\{n+2k\pi \mid n\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
4. Soit $N\geqslant 1$. En appliquant le principe des tiroirs aux $N+1$ réels $n-2\pi\left\lfloor\frac{n}{2\pi}\right\rfloor\in[0\,,2\pi[$, pour $0\leqslant n\leqslant N$, montrer qu'il existe des entiers $d\in[\![1\,;N]\!]$ et $m\in\mathbb{Z}$ tels que $0<|d-2\pi m|<\frac{2\pi}{N}$. En déduire que, pour tout réel s et tout entier $n_0\geqslant 0$, il existe des entiers $n\geqslant n_0$ et $k\in\mathbb{Z}$ tels que $|n-s-2k\pi|\leqslant\frac{2\pi}{N}$.
5. En utilisant l'inégalité $|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|$, que l'on établira à l'aide d'une formule de trigonométrie du chapitre 4, montrer que tout réel de $[-1\,,1]$ est valeur d'adhérence, au sens de l'exercice 53, de la suite $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$.