CORRIGÉ – CHAPITRE 8

LIMITES ET CONTINUITÉ

⋆ *application directe* ⋆⋆ *mise en œuvre* ⋆⋆⋆ *problème* ⋆⋆⋆⋆ *problème long, en autonomie*

Limite d'une fonction en un point

EXERCICE 1 ⋆

Toutes ces limites se ramènent aux opérations du théorème 2 du cours, après une transformation qui lève la forme indéterminée : réduction au même dénominateur, quantité conjuguée, mise en facteur du terme dominant, ou encadrement.

(a) On réduit au même dénominateur : pour $x \neq \pm 1$,

$$\frac{1}{1-x} - \frac{2}{(1-x)(1+x)} = \frac{x-1}{(1-x)(1+x)} = -\frac{1}{1+x},$$

qui tend vers $-\frac{1}{2}$ quand x tend vers 1 : $\boxed{\text{la limite vaut } -\frac{1}{2}}$. **(b)** On factorise $x-1 = (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$: l'expression vaut $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$, et

$$\boxed{\text{la limite vaut } \frac{1}{2}}.$$

C'est aussi le taux d'accroissement de la racine carrée en 1, de dérivée $\frac{1}{2\sqrt{1}}$.

(c) Par la quantité conjuguée, pour $x > 0$,

$$\sqrt{x^2+2x} - x = \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{1}.$$

(d) De même, $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+1/\sqrt{x}}+1}$, qui tend vers $\boxed{\frac{1}{2}}$.

(e) On multiplie par la quantité conjuguée du numérateur :

$$\frac{\sqrt{2x^2+5x+9}-3}{x} = \frac{2x^2+5x}{x(\sqrt{2x^2+5x+9}+3)} = \frac{2x+5}{\sqrt{2x^2+5x+9}+3} \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{\frac{5}{6}}.$$

(f) On multiplie numérateur et dénominateur par les deux quantités conjuguées :

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4x+3} = \frac{-3x}{\sqrt{x+3}+\sqrt{4x+3}}, \qquad \sqrt{x+4} - \sqrt{2x+4} = \frac{-x}{\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+4}}.$$

Le quotient vaut donc $3\,\dfrac{\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+4}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{4x+3}}$; en divisant par $\sqrt{x}$ en haut et en bas, il tend vers $3\times\frac{1+\sqrt{2}}{1+2}$, soit $\boxed{1+\sqrt{2}}$.

(g) On factorise par x : $\dfrac{1+\frac{\cos x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}$, et $\frac{\cos x}{x}$, $\frac{\sin x}{x}$ tendent vers 0 en $+\infty$, comme produits d'une fonction bornée par une fonction de limite nulle. La limite vaut $\boxed{1}$.

(h) Le numérateur est borné par $4+3=7$: l'expression est majorée en valeur absolue par $\frac{7}{x}$, et l'encadrement (théorème 5) donne $\boxed{0}$.

(i) De même, $\left|\dfrac{x\sin(x^2)}{1+x^2}\right| \leqslant \dfrac{x}{1+x^2} \leqslant \dfrac{1}{x}$ pour $x>0$, d'où $\boxed{0}$. L'oscillation de $\sin(x^2)$ ne gêne pas, car elle est écrasée par le facteur qui tend vers 0.

(j) On pose $t=x^2$: $x^5\mathrm{e}^{-x^2} = t^{5/2}\mathrm{e}^{-t}$, qui tend vers 0 quand $t\to+\infty$ par croissances comparées (chapitre 5). Par composition (théorème 3),

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x^5\mathrm{e}^{-x^2} = 0}.$$

(k) On met en facteur les termes dominants :

$$\frac{\mathrm{e}^{3x}+2x+7}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} = \mathrm{e}^{2x}\,\frac{1+(2x+7)\mathrm{e}^{-3x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}},$$

où la fraction tend vers 1 :

$$\boxed{\text{la limite vaut } +\infty}.$$

(l) On divise numérateur et dénominateur par $\sqrt{x}$:

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{3/2}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{1}.$$

À retenir. Toutes ces valeurs ont été vérifiées numériquement. Avant tout calcul, on identifie le type de forme indéterminée : c'est lui qui dicte la transformation.

EXERCICE 2 ⋆⋆

Les quatre premières limites se ramènent à $\lim\limits_{u\to0}\frac{\ln(1+u)}{u} = 1$, qui est le taux d'accroissement du logarithme en 1, sa dérivée y valant 1. On écrit pour cela les puissances sous forme exponentielle, puis on conclut par continuité de exp et composition des limites.

(a) Pour $x>0$, $(1+\frac{1}{x})^x = \exp\Big(\dfrac{\ln(1+u)}{u}\Big)$ avec $u=\frac{1}{x}$, qui tend vers 0. La limite vaut $\boxed{\mathrm{e}}$.

(b) De même, $(1+x)^{1/x} = \exp\Big(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\Big) \xrightarrow[x\to0^+]{} \boxed{\mathrm{e}}$. Les questions (a) et (b) sont la même limite, au changement de variable $u=\frac{1}{x}$ près.

(c) On a $x^{1/x} = \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right)$, et $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées : la limite vaut $\boxed{1}$.

(d) La formule de factorisation du chapitre 4 donne $\cos(3x)-\cos x = -2\sin(2x)\sin x$. Pour $x\neq0$ voisin de 0,

$$\frac{\cos(3x)-\cos x}{\sin(x^2)} = -4\times\frac{\sin(2x)}{2x}\times\frac{\sin x}{x}\times\frac{x^2}{\sin(x^2)} \xrightarrow[x\to0]{} \boxed{-4},$$

chacun des trois quotients tendant vers 1 par la limite $\frac{\sin u}{u}\xrightarrow[u\to0]{}1$ du cours et composition.

(e) D'après la formule de duplication, $\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$, donc

$$\tan x\tan(2x) = \frac{2\tan^2 x}{1-\tan^2 x} = \frac{2}{\frac{1}{\tan^2 x}-1}.$$

En $\frac{\pi}{2}$, $\tan^2 x$ tend vers $+\infty$: la limite vaut $\boxed{-2}$.

(f) On pose $u=\frac{1}{x}$, qui tend vers 0^+ :

$$x\Big(\mathrm{e}^{1/x}-\cos\frac{1}{x}\Big) = \frac{\mathrm{e}^u-1}{u}+\frac{1-\cos u}{u} \xrightarrow[u\to0^+]{} 1+0 = \boxed{1},$$

le premier quotient étant le taux d'accroissement de exp en 0, et le second étant compris entre 0 et $\frac{u}{2}$ puisque $0\leqslant 1-\cos u\leqslant\frac{u^2}{2}$ (cours, section 8.2).

(g) On pose $t = \operatorname{Arccos} x$, qui tend vers 0^+ quand x tend vers 1^-, par continuité de Arccos (théorème 11). Alors $x = \cos t$ et

$$\frac{1-x}{\operatorname{Arccos} x} = \frac{1-\cos t}{t} \in \left[0\,,\frac{t}{2}\right], \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{\operatorname{Arccos} x} = 0}.$$

Autrement dit, $\operatorname{Arccos} x$ tend vers 0 beaucoup moins vite que $1-x$: la courbe de Arccos a une tangente verticale en 1.

(h) On multiplie par la quantité conjuguée $\sqrt{1+x}+1+\frac{x}{2}$:

$$\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} = \frac{(1+x)-\left(1+\frac{x}{2}\right)^2}{\sqrt{1+x}+1+\frac{x}{2}} = \frac{-\frac{x^2}{4}}{\sqrt{1+x}+1+\frac{x}{2}}.$$

En divisant par x^2, on obtient

$$\boxed{\text{la limite } -\frac{1}{8}}.$$

Le chapitre 10 retrouvera ce résultat par un développement limité : $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots$

EXERCICE 3 ⋆

On part de l'encadrement de la partie entière : pour $x \neq 0$, $\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{x}$.

Fonction f. En 0^+, $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor > \frac{1}{x} - 1$ tend vers $+\infty$; en 0^-, $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{x}$ tend vers $-\infty$, par comparaison (théorème 5).

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty}$$

Fonction g. Pour $x > 0$, on multiplie l'encadrement par $x > 0$: $1 - x < g(x) \leqslant 1$. Pour $x < 0$, la multiplication par x renverse les inégalités : $1 \leqslant g(x) < 1 - x$. Dans les deux cas, l'encadrement donne

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^-} g(x) = 1}.$$

Fonction h. On a $h(x) = x\,g(x)$, produit d'une fonction de limite nulle par une fonction de limite 1 : $\boxed{\lim_{x\to 0} h(x) = 0}$.

Les deux limites latérales de g étant égales, g admet la limite 1 en 0 (proposition 5) :

$$\boxed{g \text{ se prolonge par continuité en 0 par la valeur 1}},$$

et

$$\boxed{h \text{ par la valeur 0}}.$$

Piège. Il ne faut pas écrire $x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$ en « simplifiant » : g n'est pas constante, elle vaut par exemple $\frac{2}{3}$ en $x = \frac{2}{3}$. C'est seulement sa limite qui vaut 1.

EXERCICE 4 ⋆⋆

1. La phrase « f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ » s'écrit $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \geqslant A,\ f(x) \geqslant M$. Sa négation est donc

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R},\ \forall A \in \mathbb{R},\ \exists x \geqslant A, \quad f(x) < M}.$$

Pour $f : x \mapsto x \sin x$, prenons $M = 1$: pour tout A, il existe un entier k tel que $x = 2k\pi \geqslant A$, et $f(x) = 0 < 1$. Ainsi

$$\boxed{f \text{ ne tend pas vers } +\infty}.$$

Pourtant $f(2k\pi + \frac{\pi}{2}) = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ prend des valeurs aussi grandes que l'on veut sur tout intervalle $[A\,, +\infty[$: ne pas être majorée ne suffit pas à tendre vers $+\infty$.

2. On factorise : $x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$. Pour $x \in [1\,, 3]$, on a $0 < x^2+2x+4 \leqslant 9+6+4 = 19$, donc $|x^3 - 8| \leqslant 19\,|x - 2|$. Soit $\varepsilon > 0$; posons

$$\boxed{\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{19}\right)}.$$

Si $|x - 2| \leqslant \delta$, alors $x \in [1\,, 3]$ et $|x^3 - 8| \leqslant 19\delta \leqslant \varepsilon$. La restriction $\delta \leqslant 1$ sert à rester sur l'intervalle où le facteur $x^2 + 2x + 4$ est contrôlé.

3. Pour $x > 1$, $\dfrac{2x+1}{x-1} - 2 = \dfrac{3}{x-1} > 0$. Soit $\varepsilon > 0$: cette quantité est inférieure à ε dès que $x - 1 \geqslant \frac{3}{\varepsilon}$, et $\boxed{A = 1 + \dfrac{3}{\varepsilon}}$ convient.

4. On applique la définition avec $\varepsilon = \frac{\ell}{4} > 0$: il existe un voisinage W de a sur lequel $|f(x) - \ell| \leqslant \frac{\ell}{4}$, donc $f(x) \geqslant \frac{3\ell}{4} > \frac{\ell}{2}$ pour $x \in W \cap I$. Le choix $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$ ne donnerait que l'inégalité large.

$$\boxed{f > \frac{\ell}{2} \text{ au voisinage de } a}$$

Si $\ell = 0$, on ne peut rien dire du signe : $x \mapsto x$ tend vers 0 en 0 en changeant de signe.

EXERCICE 5 ⋆⋆

Dans chaque cas, on applique la méthode du cours : deux suites qui tendent vers $+\infty$, dont les images ont des limites différentes, interdisent l'existence d'une limite (théorème 1).

Fonction $x \mapsto \cos(x^2)$. Avec $x_n = \sqrt{2n\pi}$ et $y_n = \sqrt{(2n+1)\pi}$, qui tendent vers $+\infty$, on a $\cos(x_n^2) = 1$ et $\cos(y_n^2) = -1$.

$$\boxed{\text{pas de limite}}$$

Fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$. Avec $x_n = n$ et $y_n = n + \frac{1}{2}$, les images valent 0 et $\frac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{pas de limite}}$$

Fonction $x \mapsto \frac{x \cos x}{1+|x|}$. Avec $x_n = 2n\pi$ et $y_n = (2n+1)\pi$, les images valent $\frac{2n\pi}{1+2n\pi}$, qui tend vers 1, et $-\frac{(2n+1)\pi}{1+(2n+1)\pi}$, qui tend vers -1.

$$\boxed{\text{pas de limite}}$$

En revanche, $\left|\frac{\cos(x^2)}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x}$ pour $x > 0$, et l'encadrement donne

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos(x^2)}{x} = 0}.$$

EXERCICE 6 ⋆⋆

Sens direct. Supposons $\lim_{x\to 0} f(x) = \ell$. Comme $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$, la composition des limites (théorème 3) donne $\lim_{x\to 0} f(\sin x) = \ell$.

Réciproque. Supposons $\lim_{x\to 0} f(\sin x) = \ell$, et notons $g : t \mapsto f(\sin t)$. Pour $x \in [-1\,,1]$, on a $\sin(\operatorname{Arcsin} x) = x$, donc $f(x) = g(\operatorname{Arcsin} x)$. La fonction Arcsin est continue en 0 (théorème 11) et $\operatorname{Arcsin} 0 = 0$: par composition, $f(x) = g(\operatorname{Arcsin} x)$ tend vers ℓ quand x tend vers 0.

$$\boxed{\text{les deux propriétés sont équivalentes}}$$

Avec cos en $\frac{\pi}{2}$. Le résultat subsiste : cos tend vers 0 en $\frac{\pi}{2}$, ce qui donne le sens direct, et $x = \cos(\operatorname{Arccos} x)$ avec Arccos continue en 0 et $\operatorname{Arccos} 0 = \frac{\pi}{2}$ donne la réciproque.

Avec $x \mapsto x^2$. Le sens direct subsiste, mais pas la réciproque, car x^2 ne prend que des valeurs positives : seules les valeurs de f sur $[0\,,+\infty[$ interviennent. Par exemple, $f = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}$ vérifie $f(x^2) = 1$ pour tout x, mais n'a pas de limite en 0, ses limites à gauche et à droite valant 0 et 1.

$$\boxed{\text{faux pour } x \mapsto x^2}$$

À retenir. Le changement de variable dans une limite n'est réversible que si la nouvelle variable parcourt tout un voisinage du point : c'est le rôle de la bijection réciproque continue.

EXERCICE 7 ⋆⋆

Notons $\varphi(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)}$, qui tend vers 2 en 0.

La fonction f est majorée près de 0. Il existe un voisinage W de 0 sur lequel $\varphi(x) \leqslant 3$; comme $\frac{1}{f(x)} > 0$, on en déduit $f(x) \leqslant 3$ sur W.

Conclusion. Pour tout réel $t > 0$, on a $t + \frac{1}{t} - 2 = \frac{(t-1)^2}{t}$. Ainsi, sur W,

$$\big(f(x) - 1\big)^2 = f(x)\big(\varphi(x) - 2\big) \leqslant 3\big(\varphi(x) - 2\big) \xrightarrow[x\to 0]{} 0,$$

puisque $\varphi(x) - 2 \geqslant 0$. L'encadrement donne $\lim_{x\to 0}(f(x) - 1)^2 = 0$, puis $|f(x) - 1| = \sqrt{(f(x) - 1)^2}$ tend vers 0 par continuité de la racine carrée. $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = 1}$

Piège. On ne peut pas « résoudre » l'équation limite $\ell + \frac{1}{\ell} = 2$, car rien ne dit a priori que f admet une limite : c'est précisément ce qu'il faut démontrer. L'encadrement établit à la fois l'existence et la valeur.

EXERCICE 8 ⋆⋆

1. La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$: d'après le théorème 6, elle admet en $+\infty$ une limite $L \in]-\infty\,,+\infty]$, égale à $\sup_{\mathbb{R}} f$. Par la caractérisation séquentielle (théorème 1), $\lim_{n\to+\infty} f(\xi_n) = L$; l'unicité de la limite d'une suite donne $L = \ell$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell}$$

2. La fonction $f : x \mapsto \sin(\pi x)$ et la suite $\xi_n = n$ conviennent : $f(\xi_n) = 0$ pour tout n, mais f n'a pas de limite en $+\infty$, puisque $f\big(n + \frac{1}{2}\big) = (-1)^n$.

$$\boxed{\text{l'hypothèse de croissance est indispensable}}$$

3. Une bijection croissante est strictement croissante, puisqu'elle est injective. Par le théorème 6, f admet en $+\infty$ la limite $\sup_{\mathbb{R}} f$ si f est majorée, et $+\infty$ sinon. Or $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ n'est pas majoré.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

EXERCICE 9 ⋆⋆

Une fonction constante admet évidemment une limite finie. Réciproquement, soit $T > 0$ une période de f et ℓ sa limite en $+\infty$. Soit $x \in \mathbb{R}$: la suite $(x+nT)$ tend vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x+nT) = \ell$ par le théorème 1. Or $f(x+nT) = f(x)$ pour tout n : la suite est constante, et sa limite est $f(x)$. Ainsi $f(x) = \ell$ pour tout réel x.

$$\boxed{f \text{ est constante}}$$

Application. La fonction $g : x \mapsto a\cos x + b\cos(2x)$ est 2π-périodique ; si elle admet une limite finie en $+\infty$, elle est constante, égale à un réel c. En évaluant en 0, en π et en $\frac{\pi}{2}$, on obtient

$$a + b = c, \qquad -a + b = c, \qquad -b = c.$$

Les deux premières donnent $a = 0$ et $b = c$, la troisième $b = -c$, d'où $b = c = 0$. $\boxed{a = b = 0}$

EXERCICE 10 ⋆⋆⋆

1. Si ℓ est réel, la composition des limites donne $\lim\limits_{x\to0} f(2x) = \ell$, donc $\lim\limits_{x\to0} f(x)f(2x) = \ell^2$, d'où $\ell^2 = 0$. Si $\ell = \pm\infty$, le produit $f(x)f(2x)$ tend vers $+\infty$, ce qui contredit l'hypothèse. $\boxed{\ell = 0}$

2. Soit x réel. Si $x \notin E$, alors $f(x) = 0$. Si $x \in E$, il existe k tel que $2^{-2k-1} \leqslant x < 2^{-2k}$, d'où $2^{-2k} \leqslant 2x < 2^{-2k+1}$: le réel $2x$ tombe dans un « trou » entre deux intervalles de E, et $f(2x) = 0$. Dans tous les cas, $\boxed{f(x)f(2x) = 0}$.

Pourtant f n'a pas de limite en 0 : les suites $x_k = 2^{-2k-1} \in E$ et $y_k = 2^{-2k-2} \notin E$ tendent vers 0, avec $f(x_k) = 1$ et $f(y_k) = 0$.

À retenir. L'hypothèse ne lie $f(x)$ qu'aux valeurs $f(2x)$, $f(4x)$, et ainsi de suite : la fonction peut alterner entre deux valeurs sur des bandes successives, de plus en plus fines. C'est la structure de E, faite d'intervalles $[2^{-j-1}, 2^{-j}[$ pris un sur deux, qui le rend possible.

EXERCICE 11 ⋆⋆⋆

1. Soit $x \geqslant A$ et $n = \lfloor x - A \rfloor$, de sorte que $A + n \leqslant x < A + n + 1$. Par croissance de f et en sommant les accroissements sur les intervalles $[A + j, A + j + 1]$, pour $1 \leqslant j \leqslant n$,

$$f(x) \leqslant f(A+n+1) = f(A+1) + \sum_{j=1}^{n} \big(f(A+j+1) - f(A+j)\big) \leqslant f(A+1) + n\varepsilon,$$

et $n \leqslant x - A$.

$$\boxed{f(x) \leqslant f(A+1) + \varepsilon(x - A)}$$

2. Pour $x \geqslant \max(A, 1)$, on obtient, puisque $f \geqslant 0$,

$$0 \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{f(A+1)}{x} + \varepsilon.$$

Le premier terme est inférieur à ε pour x assez grand, donc $0 \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant 2\varepsilon$ au voisinage de $+\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0}$$

3. Non. Soit f définie par $f(x) = 0$ si x est entier, et $f(x) = \frac{1}{x - \lfloor x \rfloor}$ sinon. Elle est positive et 1-périodique, donc $f(x+1) - f(x) = 0$ pour tout x ; mais pour $x_n = n + \frac{1}{n^2}$, avec $n \geqslant 2$,

$$\frac{f(x_n)}{x_n} = \frac{n^2}{n + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

$$\boxed{\text{le résultat est faux sans la croissance}}$$

La croissance sert, à la question 1, à contrôler f entre deux points de la forme $A + j$.

EXERCICE 12 ⋆⋆⋆

1. D'après la proposition 6 du cours, $f(a^-) \leqslant f(a) \leqslant f(a^+)$. Si $f(a^-) = f(a^+)$, les deux limites latérales valent $f(a)$, et f est continue en a par la proposition 7, ce qui est exclu. $\boxed{f(a^-) < f(a^+)}$

2. Soit $a < b$ dans D et $c \in]a\,,b[$. D'après le théorème 6, $f(a^+) = \inf_{x>a} f(x) \leqslant f(c)$ et $f(b^-) = \sup_{x<b} f(x) \geqslant f(c)$. Ainsi $f(a^+) \leqslant f(b^-)$, et l'intervalle $]f(a^-)\,,f(a^+)[$ est entièrement situé à gauche de $]f(b^-)\,,f(b^+)[$.

$$\boxed{\text{les intervalles sont disjoints}}$$

3. Pour chaque $a \in D$, l'intervalle ouvert $]f(a^-)\,,f(a^+)[$ n'est pas vide : il contient un rationnel $r(a)$, par densité de $\mathbb{Q}$ (chapitre 7, théorème 2). Si $a \neq b$, les intervalles sont disjoints, donc $r(a) \neq r(b)$.

$$\boxed{a \mapsto r(a) \text{ est une injection de } D \text{ dans } \mathbb{Q}}$$

Une fonction monotone n'a donc « pas plus » de discontinuités qu'il n'y a de rationnels : on dit qu'un tel ensemble est au plus dénombrable. Il peut néanmoins être infini, comme le montre la question suivante.

4. Les fonctions $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ et $x \mapsto \lfloor 2x \rfloor$ sont croissantes, ainsi que leur somme f. La première est discontinue exactement aux entiers, la seconde aux multiples de $\frac{1}{2}$. En un demi-entier non entier, seule la seconde saute, d'une hauteur 1 ; en un entier, les deux sautent, et le saut total vaut 2. Ailleurs, f est localement constante.

$$\boxed{D = \left\{ \frac{k}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

Continuité en un point

EXERCICE 13 ⋆

Chaque fonction est continue sur son ensemble de définition, comme composée, produit ou quotient de fonctions usuelles (proposition 9 du cours). Il reste à étudier les points où elle n'est pas définie.

(a) Définie sur $\mathbb{R}^*$. En 0, $-\frac{1}{x^2}$ tend vers $-\infty$, et e^u tend vers 0 quand u tend vers $-\infty$:

$$\boxed{\text{prolongeable en 0 par 0}}.$$

(b) Définie sur $\mathbb{R}^*$. En 0^+, la fonction tend vers 0 ; en 0^-, $-\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ et la fonction vers $+\infty$.

$$\boxed{\text{non prolongeable}}$$

Seule sa restriction à $]0\,,+\infty[$ l'est.

(c) Définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Avec $u = 1 + x$, qui tend vers 0, on a $|\sin u \ln|u|| \leqslant |u \ln|u||$, qui tend vers 0 par croissances comparées (chapitre 5).

$$\boxed{\text{prolongeable en } -1 \text{ par 0}}$$

(d) Définie sur $]0\,,1[\cup]1\,,+\infty[$. En 0^+, $x \ln x \to 0$ et $x - 1 \to -1$, donc la fonction tend vers 0. En 1, $\frac{\ln x}{x-1}$ est le taux d'accroissement de ln en 1, qui tend vers $\ln'(1) = 1$, et la fonction tend vers 1×1.

$$\boxed{\text{prolongeable par 0 en 0 et par 1 en 1}}$$

(e) Définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, elle vaut $\frac{(x-1)(x+1)}{|x-1|}$, soit $x + 1$ pour $x > 1$ et $-(x + 1)$ pour $x < 1$. Les limites latérales en 1 valent 2 et -2.

$$\boxed{\text{non prolongeable}}$$

(f) Elle vaut $\frac{(x-1)^2(x+1)^2}{|x-1|} = |x-1|\,(x+1)^2$, qui tend vers 0 en 1.

$$\boxed{\text{prolongeable en 1 par 0}}$$

La différence avec (e) tient au carré, qui « absorbe » la valeur absolue.

(g) Définie sur $\mathbb{R}^*$, avec $|\sin x \sin\frac{1}{x}| \leqslant |\sin x| \leqslant |x|$.

$$\boxed{\text{prolongeable en 0 par 0}}$$

(h) Définie sur $\mathbb{R}^*$. Avec $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{2n\pi+\pi/2}$, qui tendent vers 0, on obtient $\cos(x_n)\cdot 1 \to 1$ et $\cos(y_n)\cdot 0 = 0$.

$$\boxed{\text{non prolongeable}}$$

À retenir. Un facteur de limite nulle rend la fonction prolongeable, comme en (g), alors qu'un facteur de limite non nulle laisse subsister l'oscillation, comme en (h).

EXERCICE 14 ⋆

Fonction f. Sur chaque intervalle $[n\,,n+1[$, avec $n \in \mathbb{Z}$, on a $f(x) = n + (x-n)^2$: la fonction f est continue sur $]n\,,n+1[$ et continue à droite en n, de valeur $f(n) = n$. Sa limite à gauche en n se calcule sur $[n-1\,,n[$:

$$\lim_{x\to n^-} f(x) = (n-1) + \big(n-(n-1)\big)^2 = n = f(n).$$

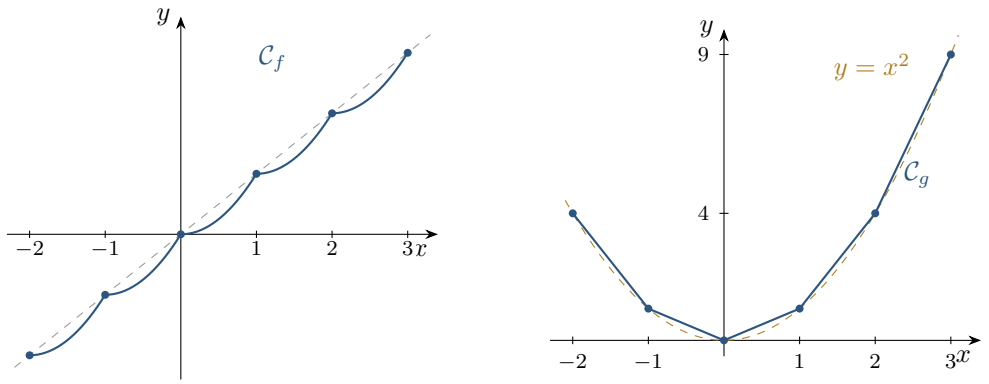
Ainsi f est continue à gauche et à droite en chaque entier.

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$$

Fonction g. Sur $[n\,,n+1[$, $g(x) = n^2 + (2n+1)(x-n)$ est affine, et sa limite à gauche en n vaut $(n-1)^2 + (2n-1) = n^2 = g(n)$.

$$\boxed{g \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$$

De plus, $g(n) = n^2$ pour tout entier n, et g est affine entre deux entiers consécutifs : sa courbe est la ligne brisée qui joint les points (n, n^2) de la parabole, c'est-à-dire la réunion de cordes de la parabole. La pente $2n+1$ de chaque corde est d'ailleurs le taux d'accroissement de $x \mapsto x^2$ entre n et $n+1$.



À gauche, la courbe de f est formée d'arcs de parabole qui se raccordent en chaque point (n, n) de la première bissectrice, en pointillés ; à droite, celle de g est la ligne brisée inscrite dans la parabole, en ocre.

EXERCICE 15 ⋆

1. L'inégalité triangulaire renversée donne $\big||f(x)|-|f(a)|\big| \leqslant |f(x)-f(a)|$: si le second membre est inférieur à ε pour $|x-a| \leqslant \delta$, le premier aussi.

$$\boxed{|f| \text{ est continue en } a}$$

La réciproque est fausse : la fonction f qui vaut 1 sur $\mathbb{Q}$ et -1 ailleurs n'est continue en aucun point, pour la même raison que l'indicatrice de $\mathbb{Q}$ dans le cours, alors que $|f|=1$ est constante.

2. Selon que $f(x) \geqslant g(x)$ ou non, on vérifie

$$\boxed{\max(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2} \qquad \min(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}}.$$

Ces fonctions sont continues, par la question 1 et les opérations sur les fonctions continues.

3. Par récurrence sur n, avec $\max(f_1,\dots,f_{n+1}) = \max\big(\max(f_1,\dots,f_n), f_{n+1}\big)$; de même pour le minimum.

EXERCICE 16 ⋆⋆

Le modèle est la fonction $x \mapsto x\,\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ du cours, continue en 0 seulement : on multiplie $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ par une fonction continue qui s'annule exactement aux points voulus.

(a) Soit $f : x \mapsto (x-1)(x-2)\,\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$. En $a \in \{1,2\}$, $|f(x)| \leqslant |(x-1)(x-2)|$, qui tend vers $0 = f(a)$. En $a \notin \{1,2\}$, une suite de rationnels tendant vers a a des images qui tendent vers $(a-1)(a-2) \neq 0$, et une suite d'irrationnels des images nulles. $\boxed{f = (x-1)(x-2)\,\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}}$

(b) De même,

$$\boxed{f : x \mapsto \sin(\pi x)\,\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)}$$

est continue exactement aux zéros du sinus de πx, c'est-à-dire aux entiers.

(c) La partie entière convient : elle est continue en tout point non entier et discontinue en chaque entier (cours, section 8.3). $\boxed{f = \lfloor \cdot \rfloor}$

(d) Soit $f : x \mapsto x^2\,\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$. Elle est continue en 0 seulement, pour la même raison qu'en (a), et pour $x \neq 0$,

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| \leqslant |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

$$\boxed{f = x^2\,\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} \text{ est dérivable en } 0, \text{ de dérivée nulle}}$$

Une fonction peut donc être dérivable en un point sans être continue en aucun autre.

EXERCICE 17 ⋆⋆

1. Soit x réel et (r_n) une suite de rationnels qui tend vers x, qui existe par densité de $\mathbb{Q}$ (chapitre 7, proposition 12). On a $f(r_n) < g(r_n)$ pour tout n ; par continuité, $f(r_n) \to f(x)$ et $g(r_n) \to g(x)$, et le passage à la limite dans les inégalités larges (chapitre 7, théorème 5) donne $\boxed{f(x) \leqslant g(x)}$.

L'inégalité n'est pas stricte en général : avec $f=0$ et $g : x \mapsto (x-\sqrt{2})^2$, on a $f(r) < g(r)$ pour tout rationnel r, car $\sqrt{2}$ est irrationnel, mais $f(\sqrt{2}) = g(\sqrt{2})$. Comme pour les suites, les inégalités strictes ne passent pas à la limite.

2. *Croissance au sens large.* Soit $x < y$ deux réels, et (r_n), (s_n) deux suites de rationnels qui tendent vers x et y. À partir d'un certain rang, $r_n < s_n$, donc $f(r_n) < f(s_n)$, et le passage à la limite donne $f(x) \leqslant f(y)$.

Croissance stricte. Soit $x < y$. Par densité, il existe deux rationnels $r < s$ dans $]x\,,y[$. Par croissance au sens large, puis par hypothèse,

$$f(x) \leqslant f(r) < f(s) \leqslant f(y).$$

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$$

L'astuce consiste à intercaler deux rationnels, pour que l'inégalité stricte entre eux survive au passage aux réels.

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. La conclusion est juste, mais la phrase « $f(x)$ tend vers $f(0)$ » n'a pas de sens : $f(x)$ est un nombre fixé, qui ne dépend pas de n. La rédaction correcte est la suivante.

> La suite $\left(f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, égale à $f(x)$. Par continuité de f en 0 et le théorème 7, elle converge vers $f(0)$. Par unicité de la limite, $f(x) = f(0)$. Ceci vaut pour tout réel x : f est constante.

2. La fonction $x \mapsto 2x+1$ a pour point fixe -1. On pose $g(t) = f(t-1)$, de sorte que

$$g(2t) = f(2t-1) = f(2(t-1)+1) = f(t-1) = g(t).$$

La fonction g est continue en 0 et vérifie $g(2t) = g(t)$: elle est constante par la question 1.

$$\boxed{f \text{ est constante}}$$

Les fonctions constantes conviennent réciproquement.

3. Soit f continue en 0 et en 1 telle que $f(x) = f(x^2)$ pour tout réel x.

- Pour $x \in [0\,,1[$, une récurrence donne $f(x) = f(x^{2^n})$, et $x^{2^n} \to 0$: comme à la question 1, $f(x) = f(0)$.
- Pour $x > 1$, on a de même $f(x) = f(x^{1/2^n})$, et $x^{1/2^n} = \exp\left(\frac{\ln x}{2^n}\right) \to 1$: donc $f(x) = f(1)$.
- La continuité en 1 et le premier point donnent $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(0)$.
- Pour $x < 0$, $f(x) = f(x^2)$ avec $x^2 > 0$: on se ramène aux cas précédents.

$$\boxed{f \text{ est constante}}$$

La continuité en 0 et en 1 est indispensable : ce sont les deux points fixes de $x \mapsto x^2$, vers lesquels convergent les suites itérées.

EXERCICE 19 ⋆⋆

1. L'hypothèse appliquée à $\frac{x}{2^k}$ donne $f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{x}{2^k}$. En sommant pour k de 1 à n, les termes se télescopent :

$$\boxed{f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{2^k} = x\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).}$$

2. Quand n tend vers $+\infty$, $\frac{x}{2^n} \to 0$, et par continuité en 0 on obtient $f(x) - f(0) = x$. Réciproquement, $f : x \mapsto x + c$ vérifie $f(2x) - f(x) = 2x + c - x - c = x$. $\boxed{f(x) = x + c,\ c \in \mathbb{R}}$

À retenir. La différence de deux solutions vérifie $h(2x) = h(x)$, l'équation de l'exercice 18 : il suffit donc de trouver une solution particulière, $x \mapsto x$, comme pour les équations différentielles linéaires du chapitre 6.

EXERCICE 20 ⋆⋆

Soit $a > 0$. D'après le théorème 6, f admet en a des limites à gauche et à droite.

À droite. Pour $x > a$, la croissance de f et la décroissance de $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ donnent

$$f(a) \leqslant f(x) \qquad \text{et} \qquad \frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{f(a)}{a}, \qquad \text{d'où} \qquad f(a) \leqslant f(x) \leqslant \frac{x}{a} f(a).$$

Le majorant tend vers $f(a)$ quand $x \to a$: l'encadrement donne $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

À gauche. Pour $0 < x < a$, on obtient de même $\frac{x}{a} f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(a)$, d'où $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

$$\boxed{f \text{ est continue en tout } a > 0}$$

Chacune des deux hypothèses interdit les sauts dans un seul sens : la croissance de f interdit les sauts vers le bas, la décroissance de $\frac{f(x)}{x}$ les sauts vers le haut.

EXERCICE 21 ⋆⋆⋆

1. Si $f(x) = \alpha x + \beta$, alors $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \alpha\frac{x+y}{2} + \beta = \frac{f(x)+f(y)}{2}$:

$$\boxed{\text{les fonctions affines conviennent}}.$$

Pour une solution f, la fonction $g = f - f(0)$ est encore solution, car la constante $-f(0)$ passe dans la moyenne. Avec $y = 0$, on obtient $g\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{g(x)+g(0)}{2}$, avec $g(0) = 0$.

$$\boxed{g\Big(\frac{x}{2}\Big) = \frac{g(x)}{2}}$$

2. En appliquant la question 1 à $x + y$, puis l'équation,

$$\boxed{g(x+y) = 2g\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = g(x) + g(y)}.$$

3. La fonction g est continue et vérifie l'équation de Cauchy : d'après l'exemple de la section 8.3 du cours, $g(x) = cx$ avec $c = g(1)$. Ainsi $\boxed{f(x) = cx + f(0)}$ est affine.

Si f est seulement continue en un point x_0, alors g aussi, et pour tous réels x et h,

$$g(x+h) - g(x) = g(h) = g(x_0 + h) - g(x_0),$$

qui tend vers 0 quand $h \to 0$: g est continue en tout point x, et la conclusion subsiste.

$$\boxed{\text{la continuité en un point suffit}}$$

EXERCICE 22 ⋆⋆⋆

1. Si $\frac{p}{q}$ est irréductible, $\frac{p+q}{q}$ l'est aussi, avec le même dénominateur : $f(x+1) = f(x)$ pour x rationnel, et l'égalité est claire pour x irrationnel.

$$\boxed{f \text{ est 1-périodique}}$$

Soit $r = \frac{p}{q}$ rationnel. Une suite d'irrationnels qui tend vers r a des images nulles, alors que $f(r) = \frac{1}{q} \neq 0$.

$$\boxed{f \text{ n'est continue en aucun rationnel}}$$

2. Un rationnel $r = \frac{p}{q}$ de $[a-1\,,a+1]$ tel que $f(r) \geqslant \varepsilon$ a un dénominateur $q \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$, et son numérateur vérifie $q(a-1) \leqslant p \leqslant q(a+1)$: il n'y a qu'un nombre fini de couples (p, q) possibles.

$$\boxed{\text{l'ensemble } F \text{ de ces rationnels est fini}}$$

Comme a est irrationnel, $a \notin F$; on pose $\delta = \frac{1}{2}\min\left(1, \min_{r\in F}|r-a|\right)$, avec $\delta = \frac{1}{2}$ si F est vide. C'est un réel strictement positif, car un minimum d'un nombre fini de réels strictement positifs l'est aussi, et l'intervalle $[a-\delta\,,a+\delta]$ ne contient aucun élément de F. Si $|x-a| \leqslant \delta$, alors ou bien x est irrationnel et $f(x) = 0$, ou bien x est un rationnel hors de F et $f(x) < \varepsilon$.

$$\boxed{f(x) < \varepsilon \text{ sur } [a-\delta\,,a+\delta]}$$

3. On a donc $|f(x) - f(a)| = f(x) < \varepsilon$ pour $|x-a| \leqslant \delta$.

$$\boxed{f \text{ est continue en tout irrationnel}}$$

Sur la figure, au-dessus de toute hauteur ε, il n'y a qu'un nombre fini de points : près d'un irrationnel, la courbe reste aussi basse que l'on veut.

EXERCICE 23 ⋆

La fonction f est dérivable, de dérivée $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$, positive sur $]-\infty\,,0]$ et $[2\,,+\infty[$ et négative sur $[0\,,2]$, ne s'annulant qu'en 0 et 2. Ainsi f est strictement croissante sur $]-\infty\,,0]$, strictement décroissante sur $[0\,,2]$, strictement croissante sur $[2\,,+\infty[$, avec

$$f(0) = -1, \qquad f(2) = -5, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Par le théorème de la bijection continue, f réalise une bijection de $]-\infty\,,0]$ sur $]-\infty\,,-1]$, de $[0\,,2]$ sur $[-5\,,-1]$ et de $[2\,,+\infty[$ sur $[-5\,,+\infty[$. Le nombre de solutions de $f(x) = a$ est le nombre de ces trois intervalles qui contiennent a, en prenant garde aux valeurs -1 et -5, atteintes en deux bornes communes.

a	$a<-5$	$a=-5$	$-5<a<-1$	$a=-1$	$a>-1$
nombre de solutions	1	2	3	2	1

EXERCICE 24 ⋆

1. Soit $P(x) = x^3 + x^2 - 4x + 1$. On calcule

$$P(-3) = -5, \qquad P(-2) = 5, \qquad P(0) = 1, \qquad P(1) = -1, \qquad P(2) = 5.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, P s'annule dans chacun des intervalles $]-3\,,-2[$, $]0\,,1[$ et $]1\,,2[$, qui sont disjoints : il y a au moins trois solutions. Il n'y en a pas d'autre : la dérivée $P'(x) = 3x^2 + 2x - 4$ a deux racines $x_1 < x_2$, et P est strictement monotone sur chacun des intervalles $]-\infty\,,x_1]$, $[x_1\,,x_2]$, $[x_2\,,+\infty[$, où elle s'annule donc au plus une fois.

$$\boxed{\text{trois solutions, dans }]-3\,,-2[,\ ]0\,,1[\text{ et }]1\,,2[}$$

2. On applique la dichotomie à partir de $[1\,,2]$, où $P(1) < 0 < P(2)$:

segment	milieu m	$P(m)$	nouveau segment
$[1\,,2]$	1,5	$0{,}625 > 0$	$[1\,,1{,}5]$
$[1\,,1{,}5]$	1,25	$\approx -0{,}48 < 0$	$[1{,}25\,,1{,}5]$
$[1{,}25\,,1{,}5]$	1,375	$\approx -0{,}010 < 0$	$[1{,}375\,,1{,}5]$
$[1{,}375\,,1{,}5]$	1,4375	$\approx 0{,}29 > 0$	$[1{,}375\,,1{,}4375]$

Après quatre étapes,

$$\boxed{1{,}375 \leqslant \alpha \leqslant 1{,}4375},$$

encadrement d'amplitude $0{,}0625 < 10^{-1}$. Après n étapes, l'amplitude vaut $\frac{1}{2^n}$, et $2^{-n} < 10^{-6}$ équivaut à $n \geqslant 20$, puisque $2^{19} = 524\,288 < 10^6 < 2^{20} = 1\,048\,576$.

$$\boxed{20 \text{ étapes}}$$

3. À chaque étape, on garde la moitié aux extrémités de laquelle f prend des valeurs de signes contraires, au sens large :

```
def dichotomie(f, a, b, eps):
    while b - a >= eps:
        m = (a + b) / 2
        if f(a) * f(m) <= 0:    # une solution dans [a, m]
            b = m
        else:                   # f(m) et f(b) de signes contraires
            a = m
    return a, b
```

L'appel `dichotomie(lambda x: x**3 + x**2 - 4*x + 1, 1, 2, 1e-6)` renvoie un encadrement de $\alpha \approx 1{,}377202$. La terminaison est assurée par la division par deux de l'amplitude, et la correction par l'invariant $f(a)f(b) \leqslant 0$, qui est celui de la démonstration du théorème 8.

EXERCICE 25 ⋆

Soit $\varphi : x \mapsto \cos x - \frac{1}{x}$, continue sur $]0\,,+\infty[$. Pour $k \geqslant 1$,

$$\varphi(2k\pi) = 1 - \frac{1}{2k\pi} > 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi\Big(2k\pi + \frac{\pi}{2}\Big) = -\frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} < 0.$$

Le théorème des valeurs intermédiaires fournit une solution dans chaque intervalle $]2k\pi\,, 2k\pi + \frac{\pi}{2}[$; ces intervalles étant disjoints, les solutions sont distinctes.

$$\boxed{\text{une infinité de solutions}}$$

EXERCICE 26 ⋆⋆

Pour $x > 0$, l'équation (E_a) équivaut à $h(x) = a$, où $h(x) = \frac{\ln x}{x}$. La fonction h est dérivable, de dérivée $h'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$: elle est strictement croissante sur $]0\,,\mathrm{e}]$ et strictement décroissante sur $[\mathrm{e}\,,+\infty[$, avec

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = -\infty, \qquad h(1) = 0, \qquad h(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}}, \qquad \lim_{x\to+\infty} h(x) = 0,$$

la dernière limite par croissances comparées. D'après le théorème de la bijection continue, h réalise une bijection de $]0\,,\mathrm{e}]$ sur $]-\infty\,,\frac{1}{\mathrm{e}}]$, et de $[\mathrm{e}\,,+\infty[$ sur $]0\,,\frac{1}{\mathrm{e}}]$, puisque $h > 0$ sur $]1\,,+\infty[$.

1. Si $a \leqslant 0$, la valeur a a un unique antécédent dans $]0\,,\mathrm{e}]$, qui est dans $]0\,,1]$ car $h(1) = 0 \geqslant a$, et aucun dans $[\mathrm{e}\,,+\infty[$.

$$\boxed{\text{une unique solution, dans }]0\,,1]}$$

2. Si $0 < a < \frac{1}{\mathrm{e}}$, la valeur a a un antécédent dans $]1\,,\mathrm{e}[$ et un dans $]\mathrm{e}\,,+\infty[$.

$$\boxed{\text{deux solutions}}$$

3. Si $a = \frac{1}{\mathrm{e}}$, la seule solution est $\boxed{x = \mathrm{e}}$; si $a > \frac{1}{\mathrm{e}}$,

$$\boxed{\text{il n'y a aucune solution}},$$

puisque $\frac{1}{\mathrm{e}}$ est le maximum de h. Géométriquement, la droite d'équation $y = \frac{x}{\mathrm{e}}$ est tangente à la courbe du logarithme au point d'abscisse e.

EXERCICE 27 ⋆

1. D'après le théorème 9, $f(I)$ est un intervalle contenu dans $\mathbb{Z}$; or un intervalle contenant deux entiers distincts $m < n$ contient aussi $m + \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. Donc $f(I)$ est réduit à un point.

$$\boxed{f \text{ est constante}}$$

2. La fonction f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\{-1, 1\}$: le même argument montre que $f(\mathbb{R})$ est un singleton.

$$\boxed{f = 1 \text{ ou } f = -1}$$

3. La fonction $h = \frac{g}{f}$ est continue sur I, puisque f ne s'annule pas, et $h^2 = 1$: par la question 2, appliquée sur I, $h = 1$ ou $h = -1$.

$$\boxed{g = f \text{ ou } g = -f}$$

Chaque hypothèse est nécessaire :

- *sans continuité de f* : f valant 1 sur $\mathbb{Q}$ et -1 ailleurs, et $g = 1$;
- *si f s'annule* : $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$;
- *si I n'est pas un intervalle* : $f = 1$ et g valant 1 sur $]0\,,+\infty[$ et -1 sur $]-\infty\,,0[$, continue sur $\mathbb{R}^*$.

EXERCICE 28 ⋆⋆

1. Le réel $y = \frac{pf(a)+qf(b)}{p+q}$ est une moyenne pondérée de $f(a)$ et $f(b)$, à poids positifs : il est compris entre eux, car par exemple, si $f(a) \leqslant f(b)$,

$$f(a) = \frac{pf(a)+qf(a)}{p+q} \leqslant y \leqslant \frac{pf(b)+qf(b)}{p+q} = f(b).$$

Le théorème des valeurs intermédiaires fournit

$$\boxed{c \in [a\,,b] \text{ tel que } f(c) = y}.$$

2. Soit x_i et x_j des points où $f(x_i)$ est le plus petit et $f(x_j)$ le plus grand des $f(x_k)$. La moyenne est comprise entre $f(x_i)$ et $f(x_j)$, et le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué sur le segment d'extrémités x_i et x_j, conclut.

3. Non. Avec $f = \mathrm{id}$ sur $[0\,,1]$, $p = 2$ et $q = -1$, on obtient $\frac{2f(0)-f(1)}{2-1} = -1$, qui n'est pas atteint.

$$\boxed{\text{faux si } pq < 0}$$

La moyenne n'est plus alors entre $f(a)$ et $f(b)$.

EXERCICE 29 ⋆⋆

Dans chaque cas, on étudie le signe de $g : x \mapsto f(x) - x$, continue, et l'on applique le théorème des valeurs intermédiaires.

1. Il existe u et v dans $[a\,,b]$ tels que $f(u) = a$ et $f(v) = b$. Alors $g(u) = a-u \leqslant 0$ et $g(v) = b-v \geqslant 0$, et g s'annule entre u et v.

$$\boxed{f \text{ admet un point fixe}}$$

2. La fonction g est strictement décroissante, comme somme d'une fonction décroissante et d'une fonction strictement décroissante. Pour $x \leqslant 0$, $f(x) \geqslant f(0)$, donc $g(x) \geqslant f(0) - x$ tend vers $+\infty$ en $-\infty$; de même, $g(x) \leqslant f(0) - x$ pour $x \geqslant 0$. Ainsi g prend des valeurs positives et négatives, s'annule par le théorème des valeurs intermédiaires, et une seule fois par stricte monotonie.

$$\boxed{\text{un unique point fixe}}$$

3. On a $g(0) = f(0) \geqslant 0$. Comme $\frac{f(x)}{x} \to \ell < 1$, il existe $A > 0$ tel que $\frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{1+\ell}{2} < 1$ pour $x \geqslant A$; alors $g(A) < 0$.

$$\boxed{f \text{ admet un point fixe dans } [0\,,A]}$$

4. Soit x_0 tel que $f(f(x_0)) = x_0$, et $y_0 = f(x_0) \in I$. Si $y_0 = x_0$, c'est fini. Sinon, $g(x_0) = y_0 - x_0$ et $g(y_0) = x_0 - y_0$ sont de signes contraires, et g s'annule entre x_0 et y_0, segment contenu dans l'intervalle I.

$$\boxed{f \text{ admet un point fixe}}$$

Sans continuité, c'est faux : sur $I = [0\,,1]$, la fonction valant 1 sur $\left[0\,,\frac{1}{2}\right]$ et 0 sur $\left]\frac{1}{2}\,,1\right]$ vérifie $f(f(0)) = f(1) = 0$, mais n'a pas de point fixe, car $f(x) = x$ imposerait $x \in \{0,1\}$. Cette fonction est décroissante : pour une fonction *croissante* de $[0\,,1]$ dans $[0\,,1]$, l'existence d'un point fixe subsiste sans continuité, et le résultat analogue sans continuité est l'exercice 46 de la feuille du chapitre 7.

EXERCICE 30 ⋆⋆

1. Sur $I_n = \left]n\pi - \frac{\pi}{2}\,,n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$, la fonction $\varphi : x \mapsto \tan x - x$ est dérivable, de dérivée $\tan^2 x \geqslant 0$, qui ne s'annule qu'en $n\pi$: elle est strictement croissante. Ses limites aux bornes de I_n valent $-\infty$ et $+\infty$, car tan y tend vers $\mp\infty$. Par le théorème de la bijection continue, φ s'annule une et une seule fois sur I_n.

$$\boxed{x_n \text{ existe et est unique}}$$

On a $x_0 = 0$.

2. Pour $n \geqslant 1$, on a $x_n > 0$, donc $\tan x_n = x_n > 0$, et $x_n \in \left]n\pi\,,n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$. Posons

$$\varepsilon_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n \in \left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[.$$

Comme $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = \frac{1}{\tan\varepsilon}$, l'équation donne

$$\frac{1}{\tan\varepsilon_n} = x_n, \qquad \text{soit} \qquad \varepsilon_n = \operatorname{Arctan}\frac{1}{x_n}.$$

Or $x_n > n\pi$ tend vers $+\infty$, et Arctan est continue en 0 : $\varepsilon_n \to 0$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(x_n - n\pi) = \frac{\pi}{2}}$$

3. On écrit $n\varepsilon_n = \dfrac{\operatorname{Arctan} u_n}{u_n} \times \dfrac{n}{x_n}$, avec $u_n = \frac{1}{x_n} \to 0$. Le premier facteur tend vers $\operatorname{Arctan}'(0) = 1$, comme taux d'accroissement ; le second tend vers $\frac{1}{\pi}$, puisque $\frac{x_n}{n} = \pi + \frac{\pi/2 - \varepsilon_n}{n} \to \pi$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\Big(\frac{\pi}{2} + n\pi - x_n\Big) = \frac{1}{\pi}}$$

Numériquement, pour $n = 1000$, $n\varepsilon_n \approx 0{,}31815$, contre $\frac{1}{\pi} \approx 0{,}31831$. Ce résultat se lit

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \cdots$$

C'est le début d'un développement asymptotique, que le chapitre 10 permettra de poursuivre.

EXERCICE 31 ⋆⋆

1. Supposons f injective. Continue et injective sur l'intervalle $\mathbb{R}$, elle est strictement monotone (proposition 17), disons strictement croissante, l'autre cas s'en déduisant en changeant f en $-f$. D'après le théorème 6, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sup_{\mathbb{R}} f > f(1)$, puisque $f(2) > f(1)$, et de même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \inf_{\mathbb{R}} f < f(0)$. On aurait $\ell > f(1) > f(0) > \ell$, ce qui est absurde.

$$\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$$

2. Même raisonnement sur l'intervalle $]a\,,b[$, en remplaçant 0 et 1 par deux points $c < d$ de $]a\,,b[$.

3. Si $f \circ f = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, alors $f(x) = f(y)$ entraîne $-x = f(f(x)) = f(f(y)) = -y$: f est injective, donc strictement monotone. Mais alors $f \circ f$ est strictement croissante, la composée de deux fonctions strictement monotones de même sens étant croissante, alors que $-\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ est décroissante.

$$\boxed{\text{une telle fonction n'existe pas}}$$

En revanche, il existe des fonctions non continues vérifiant $f \circ f = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$; la continuité est donc ici essentielle.

EXERCICE 32 ⋆⋆

1. La suite $x_n = \frac{1}{2n\pi+\pi/2}$ tend vers 0, et $f(x_n) = 1 \neq f(0)$.

$$\boxed{f \text{ n'est pas continue en } 0}$$

2. *Cas* $a > 0$. La fonction f est continue sur $[a\,,b]$, et le théorème des valeurs intermédiaires s'applique directement.

Cas $a = 0$. On a $f(0) = 0$, et y est compris entre 0 et $f(b)$. Si $y = 0$, on prend $c = 0$. Sinon, choisissons un entier n tel que $d = \frac{1}{n\pi} < b$: alors $f(d) = \sin(n\pi) = 0$, et y est compris entre $f(d)$ et $f(b)$, avec f continue sur $[d\,,b]$. Le théorème des valeurs intermédiaires fournit $c \in [d\,,b]$.

$$\boxed{f \text{ vérifie la propriété des valeurs intermédiaires}}$$

À retenir. La fonction f prend une infinité de fois la valeur $f(0) = 0$ près de 0 : c'est ce qui permet de recopier près de 0 la valeur atteinte en 0, sans continuité.

EXERCICE 33 ⋆⋆

1. La fonction φ est continue comme somme de fonctions continues. Pour tout réel x, on a $|x - x_k| \geqslant |x| - |x_k|$, donc

$$\varphi(x) \geqslant n|x| - S, \qquad \text{avec} \qquad S = \sum_{k=1}^{n} |x_k|,$$

et φ tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$. Il existe donc $R > 0$ tel que $\varphi(x) \geqslant \varphi(0)$ pour $|x| \geqslant R$. Sur le segment $[-R\,,R]$, φ atteint un minimum $m \leqslant \varphi(0)$ (théorème 10), qui est alors un minimum sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\varphi \text{ admet un minimum}}$$

2. Sur $[x_k\,,x_{k+1}]$, les k termes d'indice $j \leqslant k$ valent $x - x_j$ et les $n - k$ autres valent $x_j - x$: φ y est affine, de pente $\boxed{k - (n-k) = 2k - n}$. Elle est de pente $-n$ avant x_1 et n après x_n.

3. La pente $2k - n$ est négative tant que $k < \frac{n}{2}$ et positive dès que $k > \frac{n}{2}$: φ décroît, puis croît.

- Si n est impair, $n = 2p + 1$, aucune pente n'est nulle, et le minimum est atteint au seul point $\boxed{x_{p+1}}$, la *médiane* des x_k.
- Si $n = 2p$ est pair, la pente est nulle sur $[x_p\,,x_{p+1}]$, et le minimum est atteint sur tout le segment $\boxed{[x_p\,,x_{p+1}]}$.

La médiane minimise ainsi la somme des écarts absolus, comme la moyenne minimise la somme des carrés des écarts.

EXERCICE 34 ⋆⋆

1. La fonction $g - f$ est continue et strictement positive sur le segment $[a\,,b]$: elle y atteint son minimum $m = (g-f)(x_0) > 0$ (théorème 10), et $\boxed{\varepsilon = m}$ convient. Sur $]0\,,1]$, c'est faux : avec $f = 0$ et $g = \mathrm{id}$, on a $f < g$, mais $\inf(g - f) = 0$.

2. Soit $T > 0$ une période. Sur le segment $[0\,,T]$, la fonction f est bornée et atteint ses bornes, et l'on a $f(\mathbb{R}) = f([0\,,T])$ par périodicité.

$$\boxed{f \text{ est bornée et atteint ses bornes}}$$

3. Il existe A tel que $|f(x) - \ell| \leqslant 1$ pour $x \geqslant A$, et f est bornée sur le segment $[0\,,A]$.

$$\boxed{f \text{ est bornée}}$$

Elle n'atteint pas nécessairement ses bornes : $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ a pour borne supérieure 1, qui n'est pas atteinte.

4. Si $|f| \leqslant M$, alors $g \circ f$ prend ses valeurs dans $g([-M\,,M])$, qui est borné par le théorème 10.

$$\boxed{g \circ f \text{ est bornée}}$$

Quant à $f \circ g$, elle est bornée par M sans aucune hypothèse sur g : c'est le piège de la question.

EXERCICE 35 ⋆⋆

1. La fonction f est continue sur le segment $[0\,,x]$: elle y est bornée et atteint son maximum, donc $M(x)$ existe et c'est un maximum. Si $x \leqslant y$, alors $[0\,,x] \subset [0\,,y]$ et $M(x) \leqslant M(y)$.

$$\boxed{M \text{ est croissante}}$$

2. Comme $[0\,,x] = [0\,,a] \cup [a\,,x]$, on a

$$\boxed{M(x) = \max\left(M(a), \max_{[a,x]} f\right)}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tel que $f(t) \leqslant f(a) + \varepsilon$ pour $t \in [a\,,a+\delta]$. Pour $a < x \leqslant a+\delta$, on obtient, puisque $f(a) \leqslant M(a)$,

$$M(a) \leqslant M(x) \leqslant \max\left(M(a), f(a)+\varepsilon\right) \leqslant M(a) + \varepsilon.$$

$$\boxed{M \text{ est continue à droite en } a}$$

3. Soit $a > 0$, $\varepsilon > 0$, et $\delta \in]0\,,a]$ tel que $|f(t) - f(a)| \leqslant \varepsilon$ pour $t \in [a-\delta\,,a]$. Pour $x \in [a-\delta\,,a[$, on a $M(a) = \max\left(M(x), \max_{[x,a]} f\right)$ et $M(x) \leqslant M(a)$. Si $M(a) = M(x)$, il n'y a rien à faire ; sinon, $M(a) = \max_{[x,a]} f \leqslant f(a) + \varepsilon$, et

$$M(x) \geqslant f(x) \geqslant f(a) - \varepsilon \geqslant M(a) - 2\varepsilon.$$

Dans tous les cas, $M(a) - 2\varepsilon \leqslant M(x) \leqslant M(a)$.

$$\boxed{M \text{ est continue sur } [0\,,+\infty[}$$

EXERCICE 36 ⋆⋆

Dans les deux questions, on cherche deux points où la fonction continue $h = f - g$ prend des valeurs de signes contraires.

1. Soit M le maximum commun, atteint par f en u et par g en v. Alors $h(u) = M - g(u) \geqslant 0$ et $h(v) = f(v) - M \leqslant 0$.

$$\boxed{h \text{ s'annule entre } u \text{ et } v}$$

2. Soit v et w des points où g atteint son maximum et son minimum. Comme le maximum de f appartient à $f([a\,,b])$, donc à $g([a\,,b])$, on a $\max f \leqslant g(v)$, donc $h(v) \leqslant 0$; de même, $\min f \geqslant g(w)$, donc $h(w) \geqslant 0$.

$$\boxed{h \text{ s'annule entre } v \text{ et } w}$$

EXERCICE 37 ⋆⋆⋆

1. La somme est télescopique :

$$\sum_{k=0}^{n-1} g\Big(\frac{k}{n}\Big) = \sum_{k=0}^{n-1} \Big(f\Big(\frac{k+1}{n}\Big) - f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big) = f(1) - f(0) = \boxed{0}.$$

Une somme nulle de réels contient un terme positif et un terme négatif, ou n'a que des termes nuls. Dans le premier cas, le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué à g entre les deux points correspondants, fournit un zéro de g ; dans le second, $\frac{k}{n}$ convient.

$$\boxed{\exists c \in \Big[0\,,1-\frac{1}{n}\Big],\ f\Big(c+\frac{1}{n}\Big) = f(c)}$$

2. On a $f(0) = 1$ et $f(1) = \cos\frac{2\pi}{\alpha} - \cos\frac{2\pi}{\alpha} + 1 = 1$. Pour $x \in [0\,,1-\alpha]$, le cosinus étant 2π-périodique,

$$f(x+\alpha) - f(x) = -\alpha\Big(\cos\frac{2\pi}{\alpha} - 1\Big).$$

Comme $\frac{1}{\alpha}$ n'est pas entier, $\frac{2\pi}{\alpha} \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et $\cos\frac{2\pi}{\alpha} \neq 1$: cette différence ne s'annule jamais.

$$\boxed{\text{le résultat ne s'étend pas aux pas } \alpha \neq \tfrac{1}{n}}$$

3. Notons $d(t)$ la distance parcourue à l'instant $t \in [0\,,1]$, en heures, fonction continue, avec $d(0) = 0$ et $d(1) = 30$. La fonction $f : t \mapsto d(t) - 30t$ vérifie $f(0) = f(1) = 0$; la question 1 avec $n = 6$ fournit c tel que $f(c + \frac{1}{6}) = f(c)$, soit

$$d\Big(c + \frac{1}{6}\Big) - d(c) = \frac{30}{6} = 5.$$

$$\boxed{\text{il existe dix minutes pendant lesquelles il parcourt 5 km}}$$

Pour quarante minutes, soit $\frac{2}{3}$ d'heure, ce n'est pas garanti, car $\frac{3}{2}$ n'est pas entier. Prenons $d(t) = 28{,}5\,t + 1{,}5\sin^2\left(\frac{3\pi t}{2}\right)$. On a $d(0) = 0$, $d(1) = 28{,}5 + 1{,}5 = 30$, et d est croissante, car

$$d'(t) = 28{,}5 + 1{,}5 \times \frac{3\pi}{2}\sin(3\pi t) \geqslant 28{,}5 - \frac{9\pi}{4} > 0.$$

Comme $\sin^2$ est π-périodique, $d(t + \frac{2}{3}) - d(t) = 28{,}5 \times \frac{2}{3} = 19$ pour tout $t \in [0\,,\frac{1}{3}]$.

$$\boxed{\text{non : ce cycliste parcourt exactement 19 km en toute période de 40 minutes}}$$

EXERCICE 38 ⋆⋆

1. Soit $g : x \mapsto f(x + \frac{1}{2}) - f(x)$, continue. Par périodicité,

$$g\Big(\frac{1}{2}\Big) = f(1) - f\Big(\frac{1}{2}\Big) = f(0) - f\Big(\frac{1}{2}\Big) = -g(0).$$

Les réels $g(0)$ et $g(\frac{1}{2})$ sont opposés : g s'annule sur $[0\,,\frac{1}{2}]$.

$$\boxed{\exists x_0,\ f\Big(x_0 + \frac{1}{2}\Big) = f(x_0)}$$

2. On repère un point de l'équateur par sa longitude θ, mesurée en tours, et l'on note $T(\theta)$ la température en ce point. La fonction T est continue et 1-périodique, et deux points diamétralement opposés ont des longitudes qui diffèrent d'un demi-tour. La question 1 conclut.

$$\boxed{\text{deux points antipodaux ont même température}}$$

EXERCICE 39 ⋆⋆

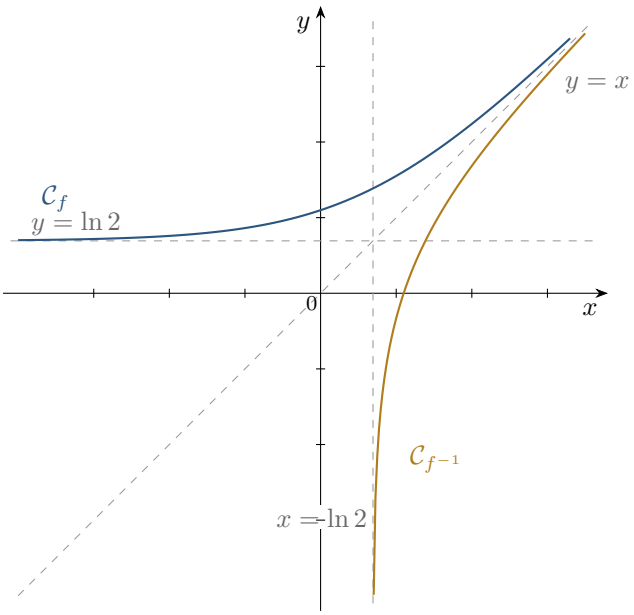
1. Comme $\mathrm{e}^x + 2 > 0$, la fonction f est définie sur $\boxed{\mathbb{R}}$. Composée de fonctions strictement croissantes, elle est strictement croissante, et

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln 2, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

2. Par le théorème de la bijection continue, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\boxed{J =]\ln 2\,,+\infty[}$, et f^{-1} est continue et strictement croissante. Pour $y > \ln 2$, on résout $y = \ln(\mathrm{e}^x + 2)$, soit $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y - 2 > 0$:

$$\boxed{f^{-1}(y) = \ln(\mathrm{e}^y - 2)}.$$

3. On a $f(x) - x = \ln(\mathrm{e}^x + 2) - \ln(\mathrm{e}^x) = \ln(1 + 2\mathrm{e}^{-x}) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{0}$: la droite $y = x$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$, et la courbe est au-dessus. La courbe de f a aussi l'asymptote horizontale $y = \ln 2$ en $-\infty$. Par symétrie par rapport à la première bissectrice, la courbe de f^{-1} a l'asymptote $y = x$ en $+\infty$, au-dessous, et l'asymptote verticale $x = \ln 2$.



Les deux courbes sont symétriques par rapport à la première bissectrice : l'asymptote horizontale de f devient l'asymptote verticale de f^{-1}, et la droite $y = x$, invariante, est asymptote aux deux courbes, de part et d'autre.

EXERCICE 40 ⋆⋆⋆

1. La relation $f \circ f = \mathrm{id}$ montre que f est bijective, de réciproque elle-même. Continue et injective sur l'intervalle $[0\,,+\infty[$, elle est strictement monotone (proposition 17). Si elle était décroissante, on aurait $f(x) \leqslant f(0)$ pour tout $x \geqslant 0$, et $f([0\,,+\infty[)$ serait borné, alors que f est surjective sur $[0\,,+\infty[$.

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante}}$$

2. Supposons $f(x) < x$ pour un réel x. En composant par f, strictement croissante, on obtient $f(f(x)) < f(x)$, soit $x < f(x)$: contradiction. De même, $f(x) > x$ est impossible. $\boxed{f = \mathrm{id}}$

3. La fonction $\boxed{f : x \mapsto -x}$ convient sur $\mathbb{R}$, ainsi que $x \mapsto c - x$ pour tout réel c. L'argument de la question 1 utilisait l'existence d'un plus petit élément 0 dans l'ensemble de départ : sur $\mathbb{R}$, une fonction décroissante peut être surjective.

EXERCICE 41 ⋆⋆⋆

1. L'ensemble A est non vide, car f est périodique, et minoré par 0 : il admet une borne inférieure $T \geqslant 0$. D'après la caractérisation séquentielle de la borne inférieure (chapitre 7, proposition 13), il existe

$$\boxed{(\tau_n) \in A^{\mathbb{N}} \text{ telle que } \lim_{n\to+\infty} \tau_n = T}.$$

2. Pour tout réel x et tout n, $f(x + \tau_n) = f(x)$. Comme $x + \tau_n \to x + T$, la continuité de f donne $\boxed{f(x + T) = f(x)}$.

3. Supposons $T = 0$, et soit x et y deux réels. Pour chaque n, posons $k_n = \left\lfloor \dfrac{y - x}{\tau_n} \right\rfloor$, de sorte que $0 \leqslant y - x - k_n\tau_n < \tau_n$. Tout multiple entier relatif d'une période étant une période, $f(x + k_n\tau_n) = f(x)$. Or $x + k_n\tau_n \to y$, et la continuité de f en y donne $f(x) = f(y)$: f serait constante, ce qui est exclu. Donc $T > 0$, et T est une période par la question 2 : c'est le plus petit élément de A.

$$\boxed{f \text{ admet une plus petite période } T > 0}$$

4. Pour $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$, tout rationnel $r > 0$ est une période, car $x + r$ est rationnel si et seulement si x l'est. Ainsi $\inf A = 0$, alors que $0 \notin A$:

$$\boxed{\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} \text{ n'a pas de plus petite période}}.$$

La question 2 échoue, faute de continuité.

EXERCICE 42 ⋆

(a) Pour tous réels x et y, en multipliant par la quantité conjuguée,

$$\left|\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+y^2}\right| = \frac{|x-y|\,|x+y|}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}} \leqslant |x-y|,$$

car $|x+y| \leqslant |x|+|y| < \sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}$. $\boxed{k=1}$

(b) Pour $x, y \geqslant 1$, $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| = \frac{|x-y|}{xy} \leqslant |x-y|$. $\boxed{k=1}$

(c) D'après le cours, $|\sin u - \sin v| \leqslant |u-v|$ et $|\cos u - \cos v| \leqslant |u-v|$, donc

$$\left|(\sin 3x - 2\cos x) - (\sin 3y - 2\cos y)\right| \leqslant 3|x-y| + 2|x-y|.$$

$\boxed{k=5}$

(d) Par deux applications de l'inégalité triangulaire renversée,

$$\Big|\,|\,|x|-1\,| - |\,|y|-1\,|\,\Big| \leqslant \big||x|-|y|\big| \leqslant |x-y|. \qquad \boxed{k=1}$$

Composée et somme. Si f est k-lipschitzienne et g est k'-lipschitzienne, alors

$$|g(f(x))-g(f(y))| \leqslant k'|f(x)-f(y)| \leqslant kk'|x-y| \quad \text{et} \quad |(f+g)(x)-(f+g)(y)| \leqslant (k+k')|x-y|.$$

$$\boxed{g\circ f \text{ est } kk'\text{-lipschitzienne, } f+g \text{ est } (k+k')\text{-lipschitzienne}}$$

On retrouve ainsi les constantes trouvées en (c) et (d).

EXERCICE 43 ⋆⋆

1. Soit f et g lipschitziennes sur $[0\,,1]$, de constantes k et k'. Elles sont bornées : pour tout $x \in [0\,,1]$, on a $|f(x)| \leqslant |f(0)| + k$, et de même pour g. Notons M un majorant commun de $|f|$ et $|g|$. En faisant apparaître un terme intermédiaire,

$$f(x)g(x) - f(y)g(y) = f(x)(g(x)-g(y)) + g(y)(f(x)-f(y)),$$

d'où $|fg(x)-fg(y)| \leqslant M(k+k')\,|x-y|$.

$$\boxed{fg \text{ est lipschitzienne}}$$

2. Sur $\mathbb{R}$, c'est faux : id est 1-lipschitzienne, mais $x \mapsto x^2$ ne l'est pas (cours, section 8.5). Ce qui manque, c'est la bornitude, que $[0\,,1]$ fournissait. Si les deux fonctions sont lipschitziennes *et bornées* sur $\mathbb{R}$, la démonstration précédente s'applique sans changement.

$$\boxed{\text{vrai si } f \text{ et } g \text{ sont bornées}}$$

3. Pour la somme, on associe δ_1 et δ_2 à $\frac{\varepsilon}{2}$ pour f et g, et $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ convient pour $f+g$. Pour le produit, id est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, mais id $\times$ id ne l'est pas, d'après l'exemple de la section 8.5 du cours.

$$\boxed{\text{somme : oui ; produit : non en général}}$$

EXERCICE 44 ⋆⋆

Dans chaque cas, on applique la méthode du cours : on se place là où la courbe devient raide, et l'on construit deux suites d'écart tendant vers 0 dont les images restent écartées, ce qui contredit la continuité uniforme (proposition 19).

Fonction $x \mapsto \sin(x^2)$. La courbe oscille de plus en plus vite. Avec $y_n = \sqrt{n\pi}$ et $x_n = \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}}$,

$$x_n - y_n = \frac{\pi/2}{\sqrt{n\pi + \pi/2} + \sqrt{n\pi}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad |\sin(x_n^2) - \sin(y_n^2)| = |\pm 1 - 0| = 1.$$

non uniformément continue, avec $\varepsilon = 1$

Fonction ln **sur** $]0\,,1]$**.** La courbe devient raide près de 0. Avec $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = \frac{1}{2n}$, l'écart $\frac{1}{2n}$ tend vers 0, mais $\ln x_n - \ln y_n = \ln 2$.

non uniformément continue, avec $\varepsilon = \ln 2$

Fonction exp **sur** $\mathbb{R}$**.** La courbe devient raide en $+\infty$. Avec $y_n = n$ et $x_n = n + \mathrm{e}^{-n}$, l'écart e^{-n} tend vers 0, et, grâce à l'inégalité $\mathrm{e}^u - 1 \geqslant u$ du chapitre 5,

$$\mathrm{e}^{x_n} - \mathrm{e}^{y_n} = \mathrm{e}^n\big(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-n}} - 1\big) \geqslant \mathrm{e}^n \times \mathrm{e}^{-n} = 1.$$

non uniformément continue, avec $\varepsilon = 1$

Fonction $x \mapsto x \sin\frac{1}{x}$ **sur** $]0\,,1]$**.** Elle se prolonge par continuité en 0 par la valeur 0 (cours, section 8.3). Le prolongement est continu sur le segment $[0\,,1]$, donc uniformément continu par le théorème de Heine, et sa restriction à $]0\,,1]$ l'est aussi.

uniformément continue

Fonction $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ **sur** $]0\,,1]$**.** Avec $x_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}$ et $y_n = \frac{1}{2n\pi}$, l'écart tend vers 0 et les images valent 1 et 0.

non uniformément continue

À retenir. Une fonction continue sur un intervalle borné $]a\,,b]$ qui se prolonge par continuité en a est uniformément continue, par le théorème de Heine ; on peut montrer que la réciproque est vraie. C'est toute la différence entre $x \sin\frac{1}{x}$ et $\sin\frac{1}{x}$.

EXERCICE 45 ⋆⋆

1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A \geqslant 0$ tel que $|f(x) - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pour $x \geqslant A$; alors $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$ pour tous x, $y \geqslant A$. Par le théorème de Heine sur le segment $[0\,,A+1]$, il existe $\delta' > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$ pour x, $y \in [0\,,A+1]$ et $|x - y| \leqslant \delta'$. Posons $\delta = \min(\delta', 1)$, et soit $x \leqslant y$ tels que $y - x \leqslant \delta$. Ou bien $y \leqslant A + 1$, et les deux points sont dans $[0\,,A+1]$; ou bien $y > A + 1$, et alors $x \geqslant y - 1 > A$. Dans les deux cas, $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.

f est uniformément continue

Le chevauchement des deux zones, de longueur 1, est essentiel : il garantit que deux points proches sont toujours ensemble dans l'une d'elles.

2. La bornitude s'obtient comme à l'exercice 34 : f est proche de ses limites en dehors d'un segment $[-A\,,A]$, et bornée sur ce segment. Pour la continuité uniforme, on découpe $\mathbb{R}$ en trois zones qui se chevauchent, $]-\infty\,,-A]$, $[-A-1\,,A+1]$ et $[A\,,+\infty[$, et l'on raisonne de même.

f est bornée et uniformément continue

EXERCICE 46 ⋆⋆⋆

1. Soit $x > 0$ et $n = \lfloor \frac{x}{\delta} \rfloor + 1$, de sorte que $\frac{x}{n} < \delta$ et $n \leqslant \frac{x}{\delta} + 1$. Les points $\frac{kx}{n}$, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, sont distants de $\frac{x}{n} \leqslant \delta$; en écrivant $f(x) - f(0)$ comme une somme télescopique,

$$|f(x) - f(0)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left| f\Big(\frac{kx}{n}\Big) - f\Big(\frac{(k-1)x}{n}\Big) \right| \leqslant n \leqslant \frac{x}{\delta} + 1.$$

Le cas $x < 0$ est identique.

$$\boxed{|f(x) - f(0)| \leqslant \frac{|x|}{\delta} + 1}$$

2. On en déduit $|f(x)| \leqslant |f(0)| + 1 + \frac{|x|}{\delta}$.

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{\delta},\ \beta = |f(0)| + 1}$$

3. Pour tous réels α et β, on a $\frac{x^2}{\alpha x + \beta} \to +\infty$ et $\frac{\mathrm{e}^x}{\alpha x + \beta} \to +\infty$ en $+\infty$, par croissances comparées : aucune majoration affine n'est possible.

$$\boxed{x^2 \text{ et } \exp \text{ ne sont pas uniformément continues sur } \mathbb{R}}$$

La réciproque est fausse : $x \mapsto \sin(x^2)$ est bornée, donc majorée par $0 \cdot |x| + 1$, mais n'est pas uniformément continue (exercice 44).

EXERCICE 47 ⋆⋆⋆

1. Si $f = c$ est constante, $u_n = \frac{c}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k$ vaut 0 si n est pair et $-\frac{c}{n}$ si n est impair. Si $f = \mathrm{id}$, on groupe les termes deux par deux :

$$\boxed{u_{2p} = \frac{1}{(2p)^2} \sum_{j=1}^{p} (2j - (2j-1)) = \frac{1}{4p}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{u_{2p+1} = -\frac{p+1}{(2p+1)^2}}.$$

Dans les deux cas, $u_n \to 0$: les termes de signes alternés se compensent.

2. On groupe de même les termes de u_{2n} deux par deux :

$$u_{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{n} \Big(f\Big(\frac{2j}{2n}\Big) - f\Big(\frac{2j-1}{2n}\Big) \Big).$$

Les deux points de chaque différence sont distants de $\frac{1}{2n} \leqslant \delta$ dès que $n \geqslant \frac{1}{\delta}$; chaque différence est alors majorée par ε en valeur absolue, et

$$\boxed{|u_{2n}| \leqslant \frac{1}{2n} \times n\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}}.$$

3. Pour les indices impairs, il reste un terme isolé :

$$u_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \Big(\sum_{j=1}^{n} \Big(f\Big(\frac{2j}{2n+1}\Big) - f\Big(\frac{2j-1}{2n+1}\Big) \Big) - f(1) \Big).$$

Avec $M = \max |f|$, qui existe par le théorème 10, on obtient, pour $2n + 1 \geqslant \frac{1}{\delta}$,

$$|u_{2n+1}| \leqslant \frac{n\varepsilon + M}{2n+1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n+1}.$$

Ainsi $|u_n| \leqslant \varepsilon$ pour n assez grand, pair ou impair. $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$

À retenir. La continuité uniforme fournit un même δ pour tous les couples de points voisins : c'est exactement ce qu'il faut pour contrôler simultanément les n différences. Le chapitre 18 utilisera le même argument pour montrer que les sommes de Riemann d'une fonction continue convergent.

EXERCICE 48 ⋆

D'après la proposition 20 du cours, on étudie séparément parties réelle et imaginaire.

(a) On a $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1}{t} = \dfrac{\cos t - 1}{t} + \mathrm{i}\,\dfrac{\sin t}{t}$, où le premier quotient tend vers 0, car $|1-\cos t| \leqslant \frac{t^2}{2}$, et le second vers 1.

$$\boxed{\text{la limite vaut i}}$$

C'est la dérivée en 0 de $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, qui vaut $\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 0}$.

(b) Le module $|t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}/t}| = |t|$ tend vers 0.

$$\boxed{\text{la limite vaut 0}}$$

(c) La partie réelle $\cos\frac{1}{t}$ n'a pas de limite en 0, comme $\sin\frac{1}{t}$ dans le cours.

$$\boxed{\text{pas de limite}}$$

(d) Par les formules d'Euler, l'expression vaut

$$\frac{2\mathrm{i}\sin t}{2\,\mathrm{sh}\,t} = \mathrm{i}\,\frac{\sin t}{t} \times \frac{t}{\mathrm{sh}\,t},$$

et $\frac{\mathrm{sh}\,t}{t}$ tend vers $\mathrm{sh}'(0) = \mathrm{ch}\,0 = 1$.

$$\boxed{\text{la limite vaut i}}$$

EXERCICE 49 ⋆⋆

1. On a $|f| = \sqrt{(\mathrm{Re}\,f)^2 + (\mathrm{Im}\,f)^2}$, continue comme composée de fonctions continues, puisque $\mathrm{Re}\,f$ et $\mathrm{Im}\,f$ le sont (proposition 20). Fonction réelle continue sur un segment, $|f|$ est bornée et atteint ses bornes (théorème 10).

$$\boxed{f \text{ est bornée, et } |f| \text{ atteint son minimum et son maximum}}$$

2. Le minimum m de $|f|$ est atteint en un point t_0, et $m = |f(t_0)| > 0$ puisque f ne s'annule pas. $\boxed{|f| \geqslant m > 0}$ De plus, $\frac{1}{f} = \frac{\overline{f}}{|f|^2}$ a pour parties réelle et imaginaire $\frac{\mathrm{Re}\,f}{|f|^2}$ et $-\frac{\mathrm{Im}\,f}{|f|^2}$, continues comme quotients de fonctions continues à dénominateur non nul :

$$\boxed{\frac{1}{f} \text{ est continue}}.$$

3. La fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(1-t)}$ sur $[0\,,1]$ vérifie $\mathrm{Re}\,f(0) = \cos\pi = -1 < 0 < 1 = \mathrm{Re}\,f(1)$, mais $|f(t)| = 1$ pour tout t :

$$\boxed{f \text{ ne s'annule pas}}.$$

En revanche, $\mathrm{Re}\,f$ est une fonction réelle continue qui change de signe :

$$\boxed{\mathrm{Re}\,f \text{ s'annule}},$$

par le théorème des valeurs intermédiaires. Le point $f(t)$ décrit un demi-cercle, et traverse l'axe imaginaire sans passer par l'origine.

Exercices de synthèse

EXERCICE 50 ⋆⋆

Six affirmations sont vraies et quatre sont fausses.

1. Faux. Avec $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et $g : x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ en 0, f tend vers $+\infty$, g n'a pas de limite, mais $f+g \geqslant \frac{1}{x^2} - 1$ tend vers $+\infty$ par comparaison. L'affirmation devient vraie si la limite de f est *finie* : on écrit alors $g = (f+g) - f$.

2. Vrai. L'image du segment est un intervalle (théorème 9) contenu dans $\mathbb{Q}$; s'il contenait deux rationnels distincts, il contiendrait un irrationnel entre eux, par densité (chapitre 7, théorème 2). Il est donc réduit à un point.

3. Faux. Le sinus envoie l'intervalle ouvert $]0\,,2\pi[$ sur le segment $[-1\,,1]$. Seule la propriété d'être un intervalle est conservée (théorème 9), pas sa nature.

4. Vrai. C'est la proposition 17 du cours.

5. Faux. La fonction qui vaut 1 sur $\mathbb{Q}$ et -1 ailleurs n'est continue nulle part, alors que sa valeur absolue est constante (exercice 15).

6. Vrai. C'est la proposition 16 du cours : une discontinuité d'une fonction monotone est un saut, qui laisserait un trou dans l'image.

7. Vrai. C'est la proposition 18 du cours, avec $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$.

8. Vrai. Il existe $A > 0$ tel que $f(x) \geqslant f(0)$ pour $|x| \geqslant A$. Sur le segment $[-A\,,A]$, qui contient 0, f atteint un minimum $m \leqslant f(0)$ (théorème 10), qui est un minimum sur $\mathbb{R}$. C'est l'argument de l'exercice 33.

9. Faux. La fonction $x \mapsto x\,\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ est continue en 0 et discontinue en tout autre point (cours, section 8.3). La continuité est une propriété ponctuelle, qui ne se propage pas au voisinage.

10. Vrai. Soit T une période et $\varepsilon > 0$. Par le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[-T\,,2T]$: il existe $\delta \in]0\,,T]$ convenant sur ce segment. Si $|x-y| \leqslant \delta$, on translate x et y d'un même multiple de T, ce qui ne change pas leurs images, de sorte que $x \in [0\,,T]$; alors $y \in [-T\,,2T]$, et $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.

EXERCICE 51 ⋆⋆

1. D'après le théorème 10, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment. Pour $f : x \mapsto x + c$, on a $f([a\,,b]) = [a+c\,,b+c]$, et pour $f : x \mapsto c - x$, qui est décroissante, $f([a\,,b]) = [c-b\,,c-a]$.

$$\boxed{\text{les deux segments ont pour longueur } b-a}$$

2. Soit $x < y$. Les réels $f(x)$ et $f(y)$ appartiennent tous deux au segment $f([x\,,y])$, dont la longueur vaut $y - x$; leur écart est donc au plus $y - x$. Le cas $x > y$ s'en déduit par symétrie, et le cas $x = y$ est immédiat.

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant |x-y|}$$

La fonction f est 1-lipschitzienne.

3. D'après le théorème 10, $f([a\,,b]) = [f(c)\,,f(d)]$, et sa longueur vaut $f(d) - f(c) = b - a$ par hypothèse. La question 2 et l'appartenance de c et d à $[a\,,b]$ donnent

$$b - a = f(d) - f(c) \leqslant |d - c| \leqslant b - a.$$

Ces inégalités sont donc des égalités, et deux points de $[a\,,b]$ distants de $b-a$ en sont les extrémités : $\{c,d\} = \{a,b\}$. Ainsi $|f(b) - f(a)| = f(d) - f(c) = b - a$.

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| = |x-y|}$$

4. On a $g(0) = 0$ et, par la question 3, $|g(x)| = |f(x) - f(0)| = |x|$, donc $g(x) = x$ ou $g(x) = -x$. Supposons qu'il existe deux réels non nuls x et y tels que $g(x) = x$ et $g(y) = -y$. La question 3, appliquée à g, donne alors $|x+y| = |x-y|$, et en élevant au carré :

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy = 0,$$

ce qui contredit $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Ainsi $g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ ou $g = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, et en posant $c = f(0)$:

$$\boxed{f : x \mapsto x + c \qquad \text{ou} \qquad f : x \mapsto c - x}$$

5. La démonstration de la question 2 n'a utilisé que le fait que $f([x\,,y])$ est un segment de longueur $y - x$: elle reste valable. La fonction f, 1-lipschitzienne, est continue (proposition 18), et les questions 3 et 4 s'appliquent.

$$\boxed{\text{les solutions sont encore les fonctions } x \mapsto x + c \text{ et } x \mapsto c - x}$$

Piège. L'hypothèse porte sur la longueur de l'*image* d'un segment, pas sur la distance entre deux images : il faut un argument pour passer de l'une à l'autre. C'est le théorème des bornes atteintes qui le fournit, en obligeant le minimum et le maximum de f à être atteints aux deux extrémités du segment.
À retenir. Les fonctions trouvées sont les *isométries* de la droite : les translations $x \mapsto x + c$ et les symétries $x \mapsto c - x$, de centre $\frac{c}{2}$. La question 4 est un argument de géométrie : un point situé à distance $|x|$ de 0 et à distance $|x - y|$ d'un autre point est entièrement déterminé dès que l'on sait de quel côté de 0 il se trouve.

EXERCICE 52 ⋆⋆

1. Si x est rationnel, $f(x)$ est irrationnel, et $g(x) = f(x) - x$ l'est aussi : sinon $f(x) = g(x) + x$ serait rationnel, comme somme de deux rationnels. Si x est irrationnel, $f(x)$ est rationnel, et $g(x)$ est irrationnel : sinon $x = f(x) - g(x)$ serait rationnel. C'est l'argument de l'exercice 4 du chapitre 7.

$$\boxed{g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$$

2. La fonction g est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Si elle prenait deux valeurs distinctes $g(a) < g(b)$, l'intervalle $]g(a)\,,g(b)[$ contiendrait un rationnel (chapitre 7, théorème 2), qui serait une valeur de g par le théorème des valeurs intermédiaires, ce que la question 1 interdit. La fonction g est donc constante, égale à $c = g(0) = f(0)$, qui est irrationnel puisque 0 est rationnel.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x + c, \qquad c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$$

C'est l'argument de l'exercice 27 et de l'affirmation 2 de l'exercice 50, avec $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ à la place de $\mathbb{Z}$ ou de $\mathbb{Q}$.

3. Le réel c est irrationnel, donc $f(c)$ est rationnel. Or $f(c) = 2c$, et $c = \frac{f(c)}{2}$ serait alors rationnel : c'est absurde.

$$\boxed{\text{aucune fonction continue n'échange } \mathbb{Q} \text{ et } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$$

4. Si f envoie $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $f(\mathbb{R})$ est un intervalle (théorème 9) sans rationnel : par densité de $\mathbb{Q}$, il est réduit à un point. De même, si f envoie $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$, l'intervalle $f(\mathbb{R})$ ne contient pas d'irrationnel et f est constante. En revanche, l'identité envoie $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

$$\boxed{\text{seule la répartition } f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q},\ f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ est possible}}$$

Les deux autres ne sont réalisées que par des constantes, irrationnelles dans le premier cas et rationnelles dans le second.
À retenir. Le passage à $g = f - \mathrm{id}$ transforme deux conditions croisées en une seule, « g évite $\mathbb{Q}$ », à laquelle s'applique le théorème des valeurs intermédiaires. La question 4 montre que l'obstacle tient au croisement : une fonction continue envoie sans difficulté chacun des deux ensembles dans lui-même.

EXERCICE 53 ⋆⋆⋆

1. Pour $\lambda \in \{\varphi, \psi\}$ et $f : x \mapsto \lambda x$, on a $f\big(f(x)\big) = \lambda^2 x$ et $f(x) + x = (\lambda + 1)x$. Ces deux quantités sont égales pour tout x, puisque $\lambda^2 = \lambda + 1$.

$$\boxed{x \mapsto \varphi x \text{ et } x \mapsto \psi x \text{ sont solutions}}$$

2. Si $f(x) = f(y)$, alors $f\big(f(x)\big) = f\big(f(y)\big)$, c'est-à-dire $f(x)+x = f(y)+y$, d'où $x = y$: la fonction f est injective. Continue et injective sur l'intervalle $\mathbb{R}$, elle est strictement monotone (proposition 17). Posons $c = f(0)$; l'équation en $x = 0$ donne $f(c) = c$, donc c est un point fixe. L'équation en $x = c$ donne alors

$$c = f(c) = f\big(f(c)\big) - c = f(c) - c = 0.$$

$$\boxed{f \text{ est strictement monotone et } f(0) = 0}$$

3. La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$: elle admet en $+\infty$ une limite L, finie ou égale à $+\infty$ (théorème 6). Si L était finie, la continuité de f en L et la composition des limites (théorème 3) donneraient

$$\lim_{x \to +\infty} f\big(f(x)\big) = f(L),$$

alors que $f\big(f(x)\big) = f(x) + x$ tend vers $+\infty$. Donc $L = +\infty$. De même, la limite de f en $-\infty$ est $-\infty$, sans quoi $f\big(f(x)\big)$ aurait une limite finie alors que $f(x) + x$ tend vers $-\infty$. Le théorème 11 montre alors que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\infty, +\infty[$, de réciproque continue et strictement croissante.

$$\boxed{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ est bijective}}$$

4. Appliquons l'équation au réel $y = v_{n+2}$, qui vérifie $f(y) = v_{n+1}$ et $f\big(f(y)\big) = f(v_{n+1}) = v_n$:

$$v_n = v_{n+1} + v_{n+2}, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{v_{n+2} = v_n - v_{n+1}}.$$

La réciproque f^{-1} est strictement croissante et vérifie $f^{-1}(0) = 0$: si v_n est du signe strict de x, il en est de même de $v_{n+1} = f^{-1}(v_n)$. Par récurrence, v_n est du signe strict de x pour tout n.

L'équation caractéristique $r^2 + r - 1 = 0$ a deux racines réelles distinctes, $\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $-\varphi$. D'après le chapitre 7 (théorème 11), il existe λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = \lambda\, \varphi^{-n} + \mu\, (-\varphi)^n,$$

et ils sont réels, car ils sont solutions d'un système à coefficients réels de solution unique. Si μ était non nul, on aurait, puisque $\varphi^2 > 1$,

$$\frac{v_n}{(-\varphi)^n} = \frac{(-1)^n \lambda}{\varphi^{2n}} + \mu \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mu,$$

de sorte que v_n aurait, pour n assez grand, le signe de $(-1)^n \mu$, qui alterne : c'est exclu. Donc $\mu = 0$, $\lambda = v_0 = x$ et $f^{-1}(x) = v_1 = \frac{x}{\varphi}$. Cette égalité vaut aussi pour $x = 0$, et en l'appliquant au réel φy on obtient $f^{-1}(\varphi y) = y$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, \quad f(y) = \varphi y}$$

5. La fonction f est strictement décroissante et $f(0) = 0$: elle envoie les réels strictement positifs sur des réels strictement négatifs, et inversement. Par récurrence, u_n est non nul et

$$\boxed{(-1)^n u_n \text{ est du signe strict de } x}.$$

L'équation appliquée à u_n donne $u_{n+2} = f\big(f(u_n)\big) = u_{n+1} + u_n$. L'équation caractéristique $r^2 = r + 1$ a pour racines φ et ψ, et le chapitre 7 fournit deux réels λ et μ tels que $u_n = \lambda \varphi^n + \mu \psi^n$. Si λ était non nul, on aurait, puisque $\left|\frac{\psi}{\varphi}\right| < 1$,

$$\frac{u_n}{\varphi^n} = \lambda + \mu \Big(\frac{\psi}{\varphi}\Big)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda,$$

et u_n aurait le signe constant de λ pour n assez grand, ce qui contredit l'alternance des signes. Donc $\lambda = 0$, $\mu = u_0 = x$, et $f(x) = u_1 = \psi x$; l'égalité vaut aussi pour $x = 0$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \psi x}$$

6. D'après les questions 2 à 5 et la vérification de la question 1 :

$$\boxed{\text{les solutions sont } x \mapsto \varphi x \text{ et } x \mapsto \psi x}$$

Les orbites $(f^n(x))$ d'une solution vérifient toutes la relation de Fibonacci $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, dont l'équation caractéristique est celle qui définit le nombre d'or. Parmi les suites $\lambda\varphi^n + \mu\psi^n$ de la formule de Binet (chapitre 7), la monotonie de f ne laisse subsister que les suites géométriques : celles de raison φ si f est croissante, celles de raison ψ si elle est décroissante.
Piège. On ne peut pas conclure de la question 1 que les solutions sont linéaires : c'est précisément ce qu'il faut démontrer. La continuité a servi deux fois, pour obtenir la stricte monotonie (proposition 17) et pour exclure une limite finie à la question 3.
À retenir. Comme pour les involutions de l'exercice 40 et l'équation $f \circ f = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ de l'exercice 31, l'injectivité vient de l'équation elle-même et la continuité la transforme en stricte monotonie. Ce qui est nouveau ici, c'est que l'on suit les itérés d'un point : l'équation fonctionnelle devient une relation de récurrence, que l'on sait résoudre.

EXERCICE 54 ⋆⋆⋆

1. La fonction f est continue de $[0\,,1]$ dans $[0\,,1]$: elle admet un point fixe s (proposition 14). Montrons par récurrence que $f(u_n) = u_n$. C'est vrai pour $n = 0$; si c'est vrai au rang n, alors, puisque f et g commutent,

$$f(u_{n+1}) = f(g(u_n)) = g(f(u_n)) = g(u_n) = u_{n+1}.$$

$$\boxed{\text{chaque } u_n \text{ est un point fixe de } f}$$

2. Monotone et bornée, la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in [0\,,1]$ (chapitre 7, théorème 8). Par continuité, le passage à la limite dans $f(u_n) = u_n$ et dans $u_{n+1} = g(u_n)$ donne $f(\ell) = \ell$ et $g(\ell) = \ell$ (proposition 8). $\boxed{f(\ell) = g(\ell) = \ell}$

3. Si les différences $u_{n+1} - u_n$ étaient toutes de même signe au sens large, la suite serait monotone : il existe donc n tel que $u_{n+1} - u_n$ et $u_{n+2} - u_{n+1}$ soient de signes contraires, et leur produit est négatif ou nul. Or, d'après la question 1,

$$u_{n+1} - u_n = g(u_n) - f(u_n) \qquad \text{et} \qquad u_{n+2} - u_{n+1} = g(u_{n+1}) - f(u_{n+1}).$$

La fonction continue $g - f$ prend en u_n et u_{n+1} des valeurs de signes contraires : elle s'annule entre ces deux points.

$$\boxed{\exists c \in [0\,,1],\ f(c) = g(c)}$$

Remarque. Le résultat est faux sans l'hypothèse de commutation : $f = \frac{1}{2}$ et $g = \frac{1}{3}$ sont constantes et ne se croisent pas. L'hypothèse sert à faire de l'ensemble des points fixes de f un ensemble stable par g.

EXERCICE 55 ⋆⋆⋆

1. La fonction $h : x \mapsto f(x+\frac{3}{10}) - f(x)$ est continue et ne s'annule pas sur l'intervalle $[0\,,\frac{7}{10}]$: elle garde un signe constant strict (proposition 15). Quitte à changer f en $-f$, on la suppose strictement positive.

2. On progresse de $\frac{3}{10}$ en $\frac{3}{10}$, à partir de 0 vers la droite et à partir de 1 vers la gauche :

$$0 = f(0) < f\Big(\frac{3}{10}\Big) < f\Big(\frac{6}{10}\Big) < f\Big(\frac{9}{10}\Big) \qquad \text{et} \qquad f\Big(\frac{1}{10}\Big) < f\Big(\frac{4}{10}\Big) < f\Big(\frac{7}{10}\Big) < f(1) = 0.$$

$$\boxed{f > 0 \text{ en } \tfrac{3}{10},\ \tfrac{6}{10},\ \tfrac{9}{10} \qquad f < 0 \text{ en } \tfrac{1}{10},\ \tfrac{4}{10},\ \tfrac{7}{10}}$$

3. Les signes en $\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10}$ alternent : $-, +, -, +, -, +$. Le théorème des valeurs intermédiaires fournit un zéro dans chacun des cinq intervalles ouverts disjoints

$$\Big]\frac{1}{10}\,,\frac{3}{10}\Big[, \quad \Big]\frac{3}{10}\,,\frac{4}{10}\Big[, \quad \Big]\frac{4}{10}\,,\frac{6}{10}\Big[, \quad \Big]\frac{6}{10}\,,\frac{7}{10}\Big[, \quad \Big]\frac{7}{10}\,,\frac{9}{10}\Big[,$$

auxquels s'ajoutent 0 et 1.

$$\boxed{f \text{ s'annule au moins sept fois}}$$

À retenir. C'est une version quantitative de l'exercice 37 : si $f(x+\alpha) \neq f(x)$ pour tout x, la fonction est contrainte d'osciller. Le nombre $\frac{3}{10}$ n'étant pas l'inverse d'un entier, la situation n'est pas contradictoire.

EXERCICE 56 ⋆⋆⋆

Supposons qu'un réel y ne soit pris qu'un nombre fini de fois ; il l'est au moins une fois, par surjectivité. Soit A le plus grand de ses antécédents. Sur l'intervalle $]A\,,+\infty[$, la fonction continue $f - y$ ne s'annule pas : elle garde un signe constant (proposition 15). Supposons par exemple $f > y$ sur $]A\,,+\infty[$. La fonction f est continue sur le segment $[0\,,A]$: elle y admet un minimum m (théorème 10). Alors $f(x) \geqslant \min(m, y)$ pour tout $x \geqslant 0$, et les réels strictement inférieurs à $\min(m, y)$ ne sont pas atteints, ce qui contredit la surjectivité. Le cas $f < y$ se traite de même avec le maximum.

$$\boxed{f \text{ prend chaque valeur une infinité de fois}}$$

Pour la seconde question, la réponse est non : une telle fonction aurait des valeurs à au plus deux antécédents, et l'exercice 57 montre qu'alors une valeur au moins a exactement un antécédent.

$$\boxed{\text{aucune fonction continue ne prend chaque valeur de son image exactement deux fois}}$$

EXERCICE 57 ⋆⋆⋆⋆

1. Si f est injective, toute valeur de $f(\mathbb{R})$ a exactement un antécédent, et $f(\mathbb{R})$ n'est pas vide.

$$\boxed{\text{c'est fini}}$$

2. Si f était constante sur $[a\,,b]$, la valeur $f(a)$ aurait une infinité d'antécédents : il existe donc $t \in]a\,,b[$ tel que $f(t) \neq f(a)$. Si $f(t) > f(a)$, le maximum M de f sur $[a\,,b]$, qui existe par le théorème 10, vérifie $M \geqslant f(t) > f(a) = f(b)$: il n'est atteint ni en a ni en b, donc en un point $c \in]a\,,b[$. Si $f(t) < f(a)$, le même raisonnement s'applique au minimum, ce qui revient à changer f en $-f$.

$$\boxed{M = f(c) > f(a),\ c \in]a\,,b[}$$

3. Soit $c' \neq c$ un second antécédent de M. Pour y compris entre $f(a)$ et M, le théorème des valeurs intermédiaires fournit un antécédent de y dans $]a\,,c[$ et un dans $]c\,,b[$. On en cherche un troisième.

- *Si* $c' \notin [a\,,b]$, par exemple $c' > b$: comme $f(b) < M = f(c')$, tout $y \in]f(b)\,,M[$ a aussi un antécédent dans $]b\,,c'[$, ce qui en fait trois. Le cas $c' < a$ est symétrique.

- *Si* $c' \in [a\,,b]$, alors $c' \in]a\,,b[$, et l'on peut supposer $c < c'$. Si f était constante égale à M sur $[c\,,c']$, la valeur M aurait une infinité d'antécédents ; il existe donc $t \in]c\,,c'[$ tel que $f(t) < M$. Tout $y \in]\max(f(a), f(t))\,, M[$ a alors un antécédent dans chacun des intervalles $]a\,,c[$, $]c\,,t[$, $]t\,,c'[$ et $]c'\,,b[$, soit quatre.

$$\boxed{\text{tout } y < M \text{ assez proche de } M \text{ a au moins trois antécédents}}$$

4. La question 3 contredit l'hypothèse. Le maximum M n'a donc pas de second antécédent :

$$\boxed{M \text{ a exactement un antécédent, } c}$$

À retenir. L'idée directrice est qu'au voisinage d'un extremum local strict, les valeurs proches sont prises *deux* fois, de part et d'autre : un second antécédent de l'extremum crée nécessairement un troisième antécédent pour les valeurs voisines. C'est le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué plusieurs fois, qui compte les antécédents.