EXERCICES – CHAPITRE 8

LIMITES ET CONTINUITÉ

⋆ *application directe* ⋆⋆ *mise en œuvre* ⋆⋆⋆ *problème* ⋆⋆⋆⋆ *problème long, en autonomie*

Limite d'une fonction en un point

EXERCICE 1 ⋆

Étudier l'existence et donner la valeur éventuelle des limites suivantes.

(a) $\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$ en 1

(b) $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ en 1

(c) $\sqrt{x^2+2x} - x$ en $+\infty$

(d) $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$ en $+\infty$

(e) $\dfrac{\sqrt{2x^2+5x+9}-3}{x}$ en 0

(f) $\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+4}}$ en $+\infty$

(g) $\dfrac{x+\cos x}{x+\sin x}$ en $+\infty$

(h) $\dfrac{4\sin^2 x + 3\cos(5x)}{x}$ en $+\infty$

(i) $\dfrac{x\sin(x^2)}{1+x^2}$ en $+\infty$

(j) $x^5 \mathrm{e}^{-x^2}$ en $+\infty$

(k) $\dfrac{\mathrm{e}^{3x}+2x+7}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$ en $+\infty$

(l) $\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$ en $+\infty$

EXERCICE 2 ⋆⋆

Calculer les limites suivantes, en faisant apparaître un taux d'accroissement ou une limite usuelle du cours.

(a) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ en $+\infty$

(b) $(1+x)^{1/x}$ en 0^+

(c) $x^{1/x}$ en $+\infty$

(d) $\dfrac{\cos(3x)-\cos x}{\sin(x^2)}$ en 0

(e) $\tan x \tan(2x)$ en $\dfrac{\pi}{2}$

(f) $x\left(\mathrm{e}^{1/x} - \cos\frac{1}{x}\right)$ en $+\infty$

(g) $\dfrac{1-x}{\arccos x}$ en 1^-

(h) $\dfrac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x^2}$ en 0

Pour (h), on multipliera par une quantité conjuguée bien choisie.

EXERCICE 3 ⋆

Étudier les limites à droite et à gauche en 0 des fonctions

$$f : x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, \qquad g : x \mapsto x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \qquad \text{et} \qquad h : x \mapsto x^2\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

Les fonctions g et h sont-elles prolongeables par continuité en 0 ?

EXERCICE 4 ⋆⋆

Revenir à la définition.

1. Écrire avec des quantificateurs la phrase « f ne tend pas vers $+\infty$ en $+\infty$ », puis montrer que la fonction $x \mapsto x \sin x$ ne tend pas vers $+\infty$ en $+\infty$, bien qu'elle ne soit majorée sur aucun intervalle $[A\,,+\infty[$.
2. Montrer, en exhibant pour tout $\varepsilon > 0$ un δ explicite, que $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 8$. On pourra se placer d'abord sur l'intervalle $[1\,,3]$.
3. Montrer, en exhibant un A explicite, que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{x-1} = 2$.
4. Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, avec $\ell > 0$. Montrer que $f(x) > \frac{\ell}{2}$ au voisinage de a. Que dire si $\ell = 0$?

EXERCICE 5 ⋆⋆

Montrer que les fonctions suivantes n'ont pas de limite en $+\infty$:

$$x \mapsto \cos(x^2), \qquad x \mapsto x - \lfloor x \rfloor \qquad \text{et} \qquad x \mapsto \frac{x\cos x}{1+|x|}.$$

Montrer en revanche que $x \mapsto \dfrac{\cos(x^2)}{x}$ admet une limite en $+\infty$.

EXERCICE 6 ⋆⋆

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \ell$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to 0} f(\sin x) = \ell$. On pourra utiliser la fonction Arcsin et sa continuité, établie par le théorème de la bijection continue.
Le résultat subsiste-t-il si l'on remplace sin par cos et 0 par $\frac{\pi}{2}$? par $x \mapsto x^2$?

EXERCICE 7 ⋆⋆

Soit $f : \mathbb{R} \to]0\,,+\infty[$ une fonction telle que $\lim\limits_{x\to 0} \left(f(x) + \dfrac{1}{f(x)}\right) = 2$. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.
On pourra commencer par montrer que f est majorée au voisinage de 0.

EXERCICE 8 ⋆⋆

Limite monotone.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante, et (ξ_n) une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \xi_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(\xi_n) = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.
2. Donner un contre-exemple lorsque f n'est plus supposée croissante.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une bijection croissante. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

EXERCICE 9 ⋆⋆

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique. Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si f est constante.
Application : soit a et b deux réels tels que la fonction $x \mapsto a\cos x + b\cos(2x)$ admette une limite finie en $+\infty$. Montrer que $a = b = 0$.

EXERCICE 10 ⋆⋆⋆

Une condition qui ne force pas la limite. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)f(2x) = 0$.

1. On suppose que f admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en 0. Montrer que $\ell = 0$.
2. Soit $E = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} [2^{-2k-1}, 2^{-2k}[$, et $f = \mathbf{1}_E$. Montrer que $f(x)f(2x) = 0$ pour tout réel x, mais que f n'a pas de limite en 0.

EXERCICE 11 ⋆⋆⋆

Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction croissante telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0$.

1. Soit $\varepsilon > 0$ et A tel que $f(x+1) - f(x) \leqslant \varepsilon$ pour $x \geqslant A$. Montrer que, pour tout $x \geqslant A$, on a $f(x) \leqslant f(A+1) + \varepsilon\,(x - A)$.
2. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.
3. Le résultat subsiste-t-il si f n'est plus supposée croissante ? On pourra chercher un contre-exemple périodique.

EXERCICE 12 ⋆⋆⋆

Discontinuités d'une fonction monotone. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante, et D l'ensemble des points en lesquels f n'est pas continue.

1. Pour $a \in D$, on note $f(a^-)$ et $f(a^+)$ les limites à gauche et à droite de f en a, qui existent d'après le cours. Montrer que $f(a^-) < f(a^+)$.
2. Montrer que, si $a < b$ sont deux éléments de D, les intervalles $]f(a^-), f(a^+)[$ et $]f(b^-), f(b^+)[$ sont disjoints.
3. En déduire qu'il existe une injection de D dans $\mathbb{Q}$.
4. Montrer que la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor$ est croissante, et déterminer l'ensemble D correspondant.

Continuité en un point

EXERCICE 13 ⋆

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes, étudier leur continuité et leurs éventuels prolongements par continuité.

(a) $x \mapsto \mathrm{e}^{-1/x^2}$

(b) $x \mapsto \mathrm{e}^{-1/x}$

(c) $x \mapsto \sin(x+1)\ln|1+x|$

(d) $x \mapsto \dfrac{x \ln x}{x-1}$

(e) $x \mapsto \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$

(f) $x \mapsto \dfrac{(x^2-1)^2}{|x-1|}$

(g) $x \mapsto \sin x \sin\dfrac{1}{x}$

(h) $x \mapsto \cos x \cos\dfrac{1}{x}$

EXERCICE 14 ⋆

Étudier la continuité des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$, et tracer leur courbe sur $[-2\,,3]$.

$$f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2 \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto \lfloor x \rfloor^2 + (2\lfloor x \rfloor + 1)(x - \lfloor x \rfloor).$$

Montrer que la courbe de g est formée de segments dont les extrémités sont sur la parabole d'équation $y = x^2$.

EXERCICE 15 ⋆

1. Montrer que si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en a, alors $|f|$ l'est aussi. Étudier la réciproque.
2. Soit f et g deux fonctions continues sur I. Exprimer $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ à l'aide de $f + g$ et de $|f - g|$, et en déduire qu'elles sont continues sur I.
3. Généraliser à $\max(f_1, \ldots, f_n)$ pour n fonctions continues sur I.

EXERCICE 16 ⋆⋆

Points de continuité. Construire, en s'inspirant des fonctions de la section 8.3 du cours, une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(a) continue en 1 et en 2, et en aucun autre point ;

(b) continue exactement en chaque entier ;

(c) discontinue en chaque entier, et continue partout ailleurs ;

(d) continue en 0, discontinue partout ailleurs, et dérivable en 0.

EXERCICE 17 ⋆⋆

Prolongement d'inégalités. Soit f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose que $f(x) < g(x)$ pour tout rationnel x. Montrer que $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout réel x, et que l'inégalité n'est pas nécessairement stricte.
2. On suppose que $f(x) < f(y)$ pour tous rationnels $x < y$. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 18 ⋆⋆

Trouver l'erreur. Un élève veut montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 et telle que $f(2x) = f(x)$ pour tout réel x est constante. Il écrit :

> Soit $x \in \mathbb{R}$. Par récurrence, $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quand n tend vers $+\infty$, $\frac{x}{2^n}$ tend vers 0, donc $f\left(\frac{x}{2^n}\right)$ tend vers $f(0)$ par continuité. Ainsi $f(x)$ tend vers $f(0)$, et f est constante.

1. La conclusion est-elle juste ? Repérer la maladresse de rédaction et récrire correctement la fin du raisonnement.
2. Déterminer de même les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $f(2x + 1) = f(x)$ pour tout réel x. On pourra introduire le point fixe de $x \mapsto 2x + 1$.
3. Que dire d'une fonction continue en 0 et en 1 telle que $f(x) = f(x^2)$ pour tout réel x ? On traitera séparément les réels de $[0\,,1[$, de $]1\,,+\infty[$ et les réels négatifs.

EXERCICE 19 ⋆⋆

Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(2x) - f(x) = x$ pour tout réel x.

1. Soit f une telle fonction. Montrer que, pour tout réel x et tout $n \geqslant 1$,
$$f(x) - f\Big(\frac{x}{2^n}\Big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{2^k}.$$
2. Conclure.

EXERCICE 20 ⋆⋆

Soit $f :]0\,,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrer que f est continue.
On pourra encadrer $f(x)$ pour x proche d'un réel $a > 0$, de part et d'autre de a, et utiliser les limites à gauche et à droite données par le théorème de la limite monotone.

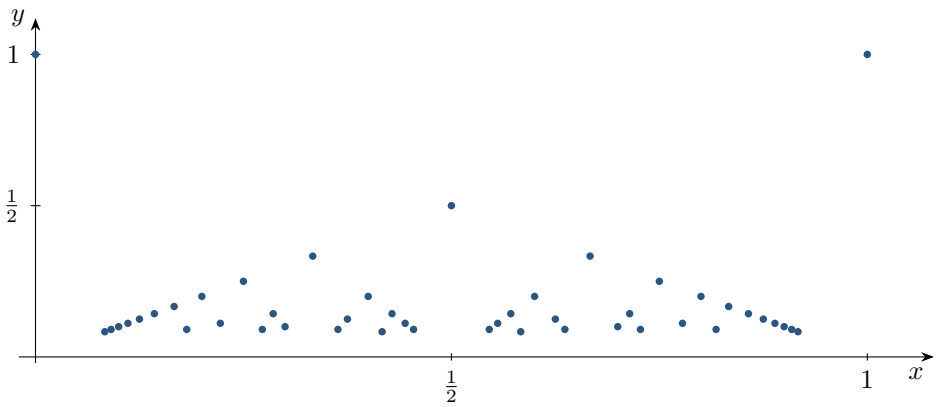
EXERCICE 21 ⋆⋆⋆

Équation de Jensen. On cherche les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

1. Vérifier que les fonctions affines conviennent. Soit f une solution ; on pose $g = f - f(0)$. Montrer que g est solution et que $g\big(\frac{x}{2}\big) = \frac{g(x)}{2}$ pour tout réel x.
2. En déduire que $g(x+y) = g(x) + g(y)$ pour tous réels x et y.
3. Conclure à l'aide de l'exemple de la section 8.3 du cours. Montrer que la continuité en un seul point suffit.

EXERCICE 22 ⋆⋆⋆

La fonction de Thomae. On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si x est irrationnel, et $f\big(\frac{p}{q}\big) = \frac{1}{q}$ si $\frac{p}{q}$ est l'écriture irréductible d'un rationnel, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. La figure représente les points de la courbe d'abscisse rationnelle dans $[0\,,1]$, pour $q \leqslant 12$.



1. Montrer que f est 1-périodique, et qu'elle n'est continue en aucun rationnel.
2. Soit a un irrationnel et $\varepsilon > 0$. Montrer que l'ensemble des rationnels $r \in [a-1\,,a+1]$ tels que $f(r) \geqslant \varepsilon$ est fini, et en déduire qu'il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) < \varepsilon$ pour tout $x \in [a-\delta\,,a+\delta]$.
3. Conclure : f est continue en tout irrationnel. Interpréter la figure.

Fonctions continues sur un intervalle

EXERCICE 23 ⋆

Soit $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 - 1$. Discuter, selon la valeur du réel a, le nombre de solutions réelles de l'équation $f(x) = a$.

EXERCICE 24 ⋆

1. Montrer que l'équation $x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$ admet exactement trois solutions réelles, et donner pour chacune un intervalle d'extrémités entières qui la contient.
2. À l'aide de l'algorithme de dichotomie, donner un encadrement d'amplitude inférieure à 10^{-1} de la plus grande des trois solutions. Combien d'étapes faut-il, au plus, pour obtenir un encadrement d'amplitude 10^{-6} ?
3. Écrire une fonction Python `dichotomie(f, a, b, eps)` qui renvoie un encadrement d'amplitude inférieure à `eps` d'une solution de $f(x) = 0$ dans $[a\,,b]$, lorsque f est continue et que $f(a)f(b) \leqslant 0$.

EXERCICE 25 ⋆

Montrer que l'équation $\cos x = \dfrac{1}{x}$ admet une infinité de solutions dans $]0\,,+\infty[$. On pourra chercher une solution dans chaque intervalle $\left[2k\pi\,, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$, pour $k \geqslant 1$.

EXERCICE 26 ⋆⋆

Soit a un réel. On considère l'équation $(E_a) : \ln x = ax$, d'inconnue $x > 0$.

1. Montrer que, si $a \leqslant 0$, l'équation (E_a) admet une unique solution, et qu'elle appartient à $]0\,,1]$.
2. Montrer que, si $0 < a < \frac{1}{\mathrm{e}}$, l'équation (E_a) admet exactement deux solutions.
3. Étudier les cas $a = \frac{1}{\mathrm{e}}$ et $a > \frac{1}{\mathrm{e}}$.

EXERCICE 27 ⋆

Soit I un intervalle.

1. Montrer que toute fonction continue $f : I \to \mathbb{Z}$ est constante.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x)^2 = 1$ pour tout réel x. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.
3. Soit f et g continues sur I, telles que f ne s'annule pas et que $f^2 = g^2$. Montrer que $f = g$ ou $f = -g$. Montrer que le résultat est faux si l'on supprime l'une des trois hypothèses : f continue, f ne s'annulant pas, I intervalle.

EXERCICE 28 ⋆⋆

Moyennes. Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ continue.

1. Soit p et q deux réels strictement positifs. Montrer qu'il existe $c \in [a\,,b]$ tel que
$$pf(a) + qf(b) = (p+q)f(c).$$
2. Soit $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de $[a\,,b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a\,,b]$ tel que
$$f(c) = \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$
3. Le résultat de la question 1 subsiste-t-il si p et q sont de signes contraires ?

EXERCICE 29 ⋆⋆

Points fixes. Montrer que les fonctions suivantes admettent un point fixe.

1. Une fonction continue $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ telle que $[a\,,b] \subset f([a\,,b])$.
2. Une fonction continue et décroissante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; montrer de plus que ce point fixe est unique.
3. Une fonction continue $f : [0\,,+\infty[\to [0\,,+\infty[$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$, avec $\ell < 1$.
4. Une fonction continue $f : I \to I$, où I est un intervalle, telle que $f \circ f$ admette un point fixe. Le résultat subsiste-t-il si f n'est plus supposée continue ?

EXERCICE 30 ⋆⋆

Une suite définie implicitement.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution x_n dans l'intervalle $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}\,, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.
2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n - n\pi) = \dfrac{\pi}{2}$.
3. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\Big(\dfrac{\pi}{2} + n\pi - x_n\Big) = \dfrac{1}{\pi}$. On pourra exprimer $\tan\left(\frac{\pi}{2} + n\pi - x_n\right)$ à l'aide de x_n.

EXERCICE 31 ⋆⋆

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, avec ℓ réel. Montrer que f n'est pas injective.
2. Même question pour $f :]a\,,b[\to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to b} f(x) = \ell$.
3. Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f \circ f = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. On commencera par montrer qu'une telle fonction serait injective.

EXERCICE 32 ⋆⋆

La réciproque du théorème des valeurs intermédiaires est fausse. Soit $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ pour $x > 0$.

1. Montrer que f n'est pas continue en 0.
2. Soit $0 \leqslant a < b \leqslant 1$ et y compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Montrer qu'il existe $c \in [a\,,b]$ tel que $f(c) = y$, en traitant d'abord le cas $a > 0$.

Ainsi f vérifie la conclusion du théorème des valeurs intermédiaires sans être continue.

EXERCICE 33 ⋆⋆

Soit $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ des réels, et $\varphi : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} |x - x_k|$.

1. Montrer que φ est continue, et que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = +\infty$. En déduire que φ admet un minimum sur $\mathbb{R}$, en appliquant le théorème des bornes atteintes sur un segment bien choisi.
2. Montrer que φ est affine sur chaque intervalle $[x_k\,, x_{k+1}]$, et déterminer sa pente.
3. Déterminer l'ensemble des points en lesquels φ atteint son minimum, en distinguant selon la parité de n.

EXERCICE 34 ⋆⋆

Bornes atteintes.

1. Soit f et g continues sur $[a\,,b]$, telles que $f(x) < g(x)$ pour tout $x \in [a\,,b]$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) + \varepsilon \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [a\,,b]$. Le résultat subsiste-t-il sur $]0\,,1]$?
2. Montrer qu'une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.
3. Soit $f : [0\,,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue, admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée. Atteint-elle nécessairement ses bornes ?
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $g \circ f$ est bornée. Et $f \circ g$?

EXERCICE 35 ⋆⋆

Soit $f : [0\,,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue. Pour $x \geqslant 0$, on pose $M(x) = \sup\limits_{t\in[0,x]} f(t)$.

1. Justifier l'existence de $M(x)$, et montrer que M est croissante.
2. Soit $a \geqslant 0$ et $x > a$. Montrer que $M(x) = \max\left(M(a), \max\limits_{[a,x]} f\right)$, et en déduire que M est continue à droite en a.
3. Montrer que M est continue à gauche en tout $a > 0$, et conclure.

EXERCICE 36 ⋆⋆

Deux fonctions qui se croisent. Soit f et g deux fonctions continues sur $[a\,,b]$.

1. On suppose que $\max\limits_{[a,b]} f = \max\limits_{[a,b]} g$. Montrer qu'il existe $x_0 \in [a\,,b]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.
2. On suppose que $f([a\,,b]) \subset g([a\,,b])$. Montrer la même conclusion.

EXERCICE 37 ⋆⋆⋆

Le théorème de la corde universelle. Soit $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$.

1. Soit $n \geqslant 2$ et $g : x \mapsto f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$, définie sur $[0\,,1 - \frac{1}{n}]$. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n})$, et en déduire qu'il existe $c \in [0\,,1 - \frac{1}{n}]$ tel que $f(c + \frac{1}{n}) = f(c)$.
2. Soit $\alpha \in]0\,,1[$ tel que $\frac{1}{\alpha}$ ne soit pas un entier. Montrer que la fonction
$$f : x \mapsto \cos\frac{2\pi x}{\alpha} - x\Big(\cos\frac{2\pi}{\alpha} - 1\Big)$$
vérifie $f(0) = f(1)$, mais que $f(x + \alpha) \neq f(x)$ pour tout $x \in [0\,,1 - \alpha]$.
3. Un cycliste parcourt 30 km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de dix minutes pendant lequel il a parcouru exactement 5 km. Existe-t-il nécessairement un intervalle de quarante minutes pendant lequel il a parcouru exactement 20 km ? On cherchera une distance parcourue de la forme $d(t) = ct + h\sin^2\left(\frac{3\pi t}{2}\right)$, qui soit bien croissante.

EXERCICE 38 ⋆⋆

Points antipodaux. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et 1-périodique.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0 + \frac{1}{2}) = f(x_0)$.
2. En déduire qu'il existe, à chaque instant, deux points diamétralement opposés de l'équateur terrestre où la température est la même, en admettant que celle-ci varie continûment le long de l'équateur.

EXERCICE 39 ⋆⋆

Soit $f : x \mapsto \ln(\mathrm{e}^x + 2)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f, ses limites en $\pm\infty$ et son sens de variation.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera, et déterminer f^{-1}. Justifier sans calcul que f^{-1} est continue.
3. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = 0$, et tracer sur une même figure les courbes de f et de f^{-1}, avec leurs asymptotes.

EXERCICE 40 ⋆⋆⋆

Involutions continues.

1. Soit $f : [0\,, +\infty[\to [0\,, +\infty[$ continue telle que $f \circ f = \mathrm{id}$. Montrer que f est bijective et strictement monotone, puis que f est croissante.
2. Montrer qu'une fonction strictement croissante f telle que $f \circ f = \mathrm{id}$ est l'identité. On pourra supposer $f(x) < x$ pour un réel x et composer par f.
3. Donner une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f \circ f = \mathrm{id}$, distincte de l'identité. Qu'est-ce qui, dans la question 1, ne s'étend pas à $\mathbb{R}$?

EXERCICE 41 ⋆⋆⋆

Plus petite période. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, périodique et non constante. On note

$$A = \{\tau > 0 \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(x + \tau) = f(x)\}$$

l'ensemble de ses périodes strictement positives.

1. Justifier que A admet une borne inférieure $T \geqslant 0$, et montrer qu'il existe une suite (τ_n) d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \tau_n = T$.
2. Montrer que $f(x + T) = f(x)$ pour tout réel x.
3. On suppose $T = 0$. Soit x et y deux réels. Montrer que, pour tout n, il existe un entier k_n tel que $|y - x - k_n\tau_n| \leqslant \tau_n$, et en déduire que $f(y) = f(x)$. Conclure que $T > 0$ est la plus petite période de f.
4. Montrer que l'hypothèse de continuité est indispensable, à l'aide de l'indicatrice de $\mathbb{Q}$.

Continuité uniforme et fonctions lipschitziennes

EXERCICE 42 ⋆

Montrer que les fonctions suivantes sont lipschitziennes, et donner une constante de Lipschitz.

(a) $x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$ sur $\mathbb{R}$

(b) $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $[1\,, +\infty[$

(c) $x \mapsto \sin(3x) - 2\cos x$ sur $\mathbb{R}$

(d) $x \mapsto \big||x| - 1\big|$ sur $\mathbb{R}$

Montrer que la composée de deux fonctions lipschitziennes est lipschitzienne, ainsi que leur somme.

EXERCICE 43 ⋆⋆

1. Montrer que le produit de deux fonctions lipschitziennes sur $[0\,,1]$ est lipschitzien.
2. Le résultat subsiste-t-il sur $\mathbb{R}$? Et si l'on suppose de plus les deux fonctions bornées ?
3. Montrer que la somme de deux fonctions uniformément continues sur I est uniformément continue, mais que ce n'est pas le cas du produit en général.

EXERCICE 44 ⋆⋆

En appliquant la méthode du cours, montrer que les fonctions suivantes ne sont pas uniformément continues :

$$x \mapsto \sin(x^2) \text{ sur } \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \ln x \text{ sur }]0\,,1], \qquad x \mapsto \mathrm{e}^x \text{ sur } \mathbb{R}.$$

La première est bornée : la bornitude ne suffit donc pas. Montrer en revanche que $x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$ est uniformément continue sur $]0\,,1]$, alors que $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ ne l'est pas.

EXERCICE 45 ⋆⋆

1. Soit $f : [0\,,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue, admettant une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue. On pourra séparer le cas de deux réels de $[0\,,A+1]$ et celui de deux réels de $[A\,,+\infty[$, pour un A bien choisi.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, admettant des limites finies en $-\infty$ et en $+\infty$. Montrer que f est bornée et uniformément continue.

EXERCICE 46 ⋆⋆⋆

Croissance au plus affine. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue.

1. Soit $\delta > 0$ associé à $\varepsilon = 1$ dans la définition de la continuité uniforme. Montrer que, pour tout réel x, on a $|f(x) - f(0)| \leqslant \dfrac{|x|}{\delta} + 1$.
2. En déduire qu'il existe deux réels α et β tels que $|f(x)| \leqslant \alpha|x| + \beta$ pour tout réel x.
3. Retrouver ainsi que les fonctions $x \mapsto x^2$ et exp ne sont pas uniformément continues sur $\mathbb{R}$. La réciproque du résultat de la question 2 est-elle vraie ?

EXERCICE 47 ⋆⋆⋆

Soit $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ continue. On pose, pour $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f\Big(\frac{k}{n}\Big).$$

1. Calculer u_n lorsque f est constante, puis lorsque $f = \mathrm{id}$.
2. Soit $\varepsilon > 0$, et δ associé à ε par le théorème de Heine. Montrer que, pour $n \geqslant \frac{1}{\delta}$, on a $|u_{2n}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
3. Conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, en traitant aussi les indices impairs.

Fonctions à valeurs complexes

EXERCICE 48 ⋆

Étudier l'existence des limites suivantes, en 0.

$$\text{(a) } \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1}{t} \qquad \text{(b) } t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}/t} \qquad \text{(c) } \mathrm{e}^{\mathrm{i}/t} \qquad \text{(d) } \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{-t}}$$

EXERCICE 49 ⋆⋆

Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{C}$ continue.

1. Montrer que $|f|$ est continue, que f est bornée, et que $|f|$ atteint ses bornes.
2. On suppose que f ne s'annule pas. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $|f(t)| \geqslant m$ pour tout $t \in [a\,,b]$, et que $\frac{1}{f}$ est continue.
3. Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{C}$ continue, telle que $\operatorname{Re} f(a) < 0 < \operatorname{Re} f(b)$. Montrer à l'aide d'un exemple que f ne s'annule pas nécessairement. Que peut-on affirmer en revanche ?

Exercices de synthèse

EXERCICE 50 ⋆⋆

Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

1. Si f admet une limite en a et que g n'en admet pas, alors $f+g$ n'admet pas de limite en a.
2. Une fonction continue sur un segment et à valeurs dans $\mathbb{Q}$ est constante.
3. L'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue est un intervalle ouvert.
4. Une fonction continue et injective sur un intervalle est strictement monotone.
5. Si $|f|$ est continue en a, alors f est continue en a.
6. Une fonction monotone sur un intervalle, dont l'image est un intervalle, est continue.
7. Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.
8. Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.
9. Si f est continue en a, alors f est continue sur un voisinage de a.
10. Une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ est uniformément continue.

EXERCICE 51 ⋆⋆

Les fonctions qui conservent les longueurs. On cherche les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels $a < b$, le segment $f([a\,,b])$ ait pour longueur $b-a$.

1. Justifier que, pour f continue, $f([a\,,b])$ est bien un segment. Vérifier que les fonctions $x \mapsto x+c$ et $x \mapsto c-x$, où c est un réel, conviennent.
2. Soit f une solution. Montrer que $|f(x)-f(y)| \leqslant |x-y|$ pour tous réels x et y.
3. Soit $a < b$. On note c et d deux points de $[a\,,b]$ en lesquels f atteint son minimum et son maximum sur ce segment. Montrer que $|d-c| = b-a$, et en déduire que $|f(b)-f(a)| = b-a$.
4. On pose $g = f - f(0)$. Montrer que, pour tout réel x, on a $g(x) = x$ ou $g(x) = -x$, puis que l'alternative ne dépend pas de x. Conclure.
5. On ne suppose plus f continue, mais seulement que $f([a\,,b])$ est, pour tous réels $a < b$, un segment de longueur $b-a$. Montrer que f est continue, et conclure.

EXERCICE 52 ⋆⋆

Échanger les rationnels et les irrationnels. On veut montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \qquad \text{et} \qquad f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}.$$

1. Soit f une telle fonction, et $g : x \mapsto f(x) - x$. Montrer que g ne prend aucune valeur rationnelle.
2. En déduire que g est constante, égale à un irrationnel c.
3. Obtenir une contradiction en calculant $f(c)$.
4. On s'intéresse aux trois autres répartitions possibles : $f(\mathbb{Q})$ est contenu dans $\mathbb{Q}$ ou dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, et $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ aussi. Pour chacune d'elles, existe-t-il une fonction continue *non constante* qui la réalise ?

EXERCICE 53 ⋆⋆⋆

Une équation fonctionnelle et le nombre d'or. On cherche les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(f(x)) = f(x) + x.$$

On note $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ les racines de l'équation $r^2 = r + 1$.

1. Vérifier que les fonctions $x \mapsto \varphi x$ et $x \mapsto \psi x$ conviennent.
2. Soit f une solution. Montrer que f est injective, puis strictement monotone. Montrer que $f(0)$ est un point fixe de f, et en déduire que $f(0) = 0$.
3. On suppose f strictement croissante. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, et en déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
4. On suppose toujours f strictement croissante. Soit x un réel non nul ; on définit la suite (v_n) par $v_0 = x$ et $v_{n+1} = f^{-1}(v_n)$. Montrer que $v_{n+2} = v_n - v_{n+1}$ et que v_n est du signe de x pour tout n. En déduire, à l'aide du théorème du chapitre 7 sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2, que $f(x) = \varphi x$.
5. On suppose f strictement décroissante. Soit x un réel non nul ; on définit la suite (u_n) par $u_0 = x$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Étudier le signe de u_n, et montrer que $f(x) = \psi x$.
6. Conclure. Quel lien y a-t-il avec la suite de Fibonacci ?

EXERCICE 54 ⋆⋆⋆

Fonctions qui commutent. Soit f et g deux fonctions continues de $[0\,,1]$ dans $[0\,,1]$ telles que $f \circ g = g \circ f$. On veut montrer qu'il existe $c \in [0\,,1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

1. Justifier que f admet un point fixe s. On définit la suite (u_n) par $u_0 = s$ et $u_{n+1} = g(u_n)$. Montrer que chaque u_n est un point fixe de f.
2. On suppose que (u_n) est monotone. Montrer qu'elle converge, et conclure.
3. On suppose que (u_n) n'est pas monotone. Montrer qu'il existe un entier n tel que

$$(u_{n+1} - u_n)(u_{n+2} - u_{n+1}) \leqslant 0,$$

exprimer ces deux différences à l'aide de $f - g$, et conclure.

EXERCICE 55 ⋆⋆⋆

Soit $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1) = 0$ et

$$\forall x \in \Big[0\,, \frac{7}{10}\Big], \qquad f\Big(x + \frac{3}{10}\Big) \neq f(x).$$

1. Montrer que la fonction $x \mapsto f(x + \frac{3}{10}) - f(x)$ garde un signe constant sur $[0\,, \frac{7}{10}]$; on la suppose strictement positive.
2. Déterminer le signe de f en $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{7}{10}$ et $\frac{9}{10}$.
3. En déduire que f s'annule au moins sept fois sur $[0\,,1]$.

EXERCICE 56 ⋆⋆⋆

Soit $f : [0\,, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et surjective. Montrer que f prend chaque valeur réelle une infinité de fois. On pourra raisonner par l'absurde en considérant le plus grand antécédent d'une valeur y prise un nombre fini de fois.
Existe-t-il une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui prenne chaque valeur de son image exactement deux fois ? On pourra admettre le résultat de l'exercice suivant.

EXERCICE 57 ⋆⋆⋆⋆

Au plus deux antécédents. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que tout réel ait au plus deux antécédents par f. On veut montrer qu'un réel au moins a exactement un antécédent.

1. Conclure si f est injective. On suppose désormais qu'il existe $a < b$ tels que $f(a) = f(b)$.
2. Montrer que f n'est pas constante sur $[a\,, b]$, et qu'elle atteint sur ce segment un maximum ou un minimum en un point c de $]a\,, b[$; on suppose, quitte à changer f en $-f$, qu'il s'agit d'un maximum $M > f(a)$.
3. On suppose que M a un second antécédent $c' \neq c$. Montrer, à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, que tout réel y de $]f(a)\,, M[$ suffisamment proche de M a au moins trois antécédents. On distinguera selon que c' appartient ou non à $[a\,, b]$.
4. Conclure.