CORRIGÉ – CHAPITRE 9

DÉRIVABILITÉ ET CONVEXITÉ

⋆ *application directe* ⋆⋆ *mise en œuvre* ⋆⋆⋆ *problème* ⋆⋆⋆⋆ *problème long, en autonomie*

Dérivabilité en un point

EXERCICE 1 ⋆

Chaque quotient est le taux d'accroissement $\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}$ d'une fonction φ dérivable en a : sa limite est $\varphi'(a)$, que l'on calcule avec les formules du cours.

(a) Avec $\varphi(x) = \mathrm{e}^{3x+2}$ et $a = 0$, on a $\varphi'(x) = 3\mathrm{e}^{3x+2}$, d'où $\boxed{3\mathrm{e}^2}$.

(b) Avec $\varphi(x) = \ln(2-x)$ et $a = 1$, on a $\varphi(1) = 0$ et $\varphi'(x) = -\frac{1}{2-x}$, d'où $\boxed{-1}$.

(c) Avec $\varphi(x) = \exp(\cos x)$ et $a = \frac{\pi}{2}$, on a $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $\varphi'(x) = -\sin x \exp(\cos x)$, d'où $\boxed{-1}$.

(d) Avec $\varphi = \mathrm{Arctan}$ et $a = 1$, puisque $\mathrm{Arctan}\, 1 = \frac{\pi}{4}$ et $\mathrm{Arctan}'(1) = \frac{1}{1+1^2}$, la limite vaut $\boxed{\frac{1}{2}}$.

(e) Avec $\varphi(x) = x^{100}$ et $a = 1$, la limite vaut $\boxed{100}$. On évite ainsi la factorisation de $x^{100} - 1$ par $x - 1$ du chapitre 3, qui donnerait la somme de cent termes égaux à 1.

(f) Avec $\varphi(x) = (1+2x)^{1/3}$ et $a = 0$, on a $\varphi'(x) = \frac{2}{3}(1+2x)^{-2/3}$, d'où $\boxed{\frac{2}{3}}$.

À retenir. Reconnaître un taux d'accroissement remplace un calcul de limite par un calcul de dérivée. Il faut seulement vérifier que le numérateur s'annule bien au point considéré.

EXERCICE 2 ⋆

(a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, puisque $1 + |x| > 0$, et $f(0) = 0$. Pour $x \neq 0$, le taux d'accroissement en 0 vaut

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{1+|x|} \xrightarrow[x\to 0]{} 1,$$

par continuité de la valeur absolue. De même, g est définie sur $\mathbb{R}$ et

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = |x| \frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \times 1 = 0.$$

$$\boxed{f \text{ et } g \text{ sont dérivables en 0, avec } f'(0) = 1 \text{ et } g'(0) = 0}$$

La valeur absolue, qui n'est pas dérivable en 0, n'empêche donc pas la dérivabilité d'un produit ou d'un quotient où elle apparaît.

(b) La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ et continue en 1, avec $h(1) = 0$. À gauche, le taux d'accroissement vaut $\frac{x-1}{x-1} = 1$; à droite, il vaut $\frac{(x-1)^2}{x-1} = x - 1$, qui tend vers 0. Ainsi $h'_g(1) = 1$ et $h'_d(1) = 0$.

$$\boxed{h \text{ n'est pas dérivable en 1}}$$

Sa courbe présente en 1 un point anguleux, comme celle de la valeur absolue en 0.

(c) On a $x^2 - x^3 = x^2(1-x)$, positif si et seulement si $x \leqslant 1$: le domaine est $]-\infty, 1]$. Sur $]-\infty, 1[$ privé de 0, la quantité sous la racine est strictement positive, et la fonction est dérivable par composition (théorème 2). Aux deux points restants, on revient au taux d'accroissement, en écrivant $\sqrt{x^2(1-x)} = |x|\sqrt{1-x}$.

— En 0, le taux vaut $\frac{|x|}{x}\sqrt{1-x}$, qui tend vers 1 à droite et vers -1 à gauche : la fonction n'est pas dérivable en 0, où sa courbe a un point anguleux.

— En 1, pour $0 < x < 1$, le taux vaut $\dfrac{x\sqrt{1-x}}{x-1} = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$, qui tend vers $-\infty$: la fonction n'est pas dérivable en 1, où sa courbe a une tangente verticale.

$$\boxed{\text{dérivable exactement sur }]-\infty\,,0[\cup]0\,,1[}$$

(d) La fonction Arccos est définie sur $[-1\,,1]$, donc le domaine est l'ensemble des x tels que $x^2 \leqslant 1$, soit $[-1\,,1]$. Comme Arccos est dérivable sur $]-1\,,1[$, la fonction est dérivable sur $]-1\,,1[$ par composition et produit. En 1, où elle s'annule, le taux d'accroissement vaut

$$\frac{(x^2-1)\operatorname{Arccos}(x^2)}{x-1} = (x+1)\operatorname{Arccos}(x^2) \xrightarrow[x\to 1^-]{} 2\operatorname{Arccos}(1) = 0,$$

par continuité de Arccos. La fonction étant paire, il en va de même en -1.

$$\boxed{\text{dérivable sur } [-1\,,1],\ \text{avec une dérivée nulle en } \pm 1}$$

Le facteur x^2-1 compense la tangente verticale de Arccos en 1 : c'est le phénomène inverse de celui de la question (c).

(e) La fonction est définie sur $[0\,,+\infty[$. On pose $u = \sqrt{x}$, qui tend vers 0^+ avec x, et l'on utilise $1-\cos u = 2\sin^2\frac{u}{2}$:

$$\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x} = \frac{\cos u - 1}{u^2} = -\frac{1}{2}\Big(\frac{\sin(u/2)}{u/2}\Big)^2 \xrightarrow[u\to 0^+]{} -\frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\text{dérivable (à droite) en 0, avec une dérivée égale à } -\tfrac{1}{2}}$$

Piège. La formule de dérivation d'une composée ne s'applique pas en 0, puisque la racine carrée n'y est pas dérivable : elle donnerait l'expression $-\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$, qui n'a pas de sens en 0. Seul le retour au taux d'accroissement permet de conclure, et la composée est dérivable bien que l'une des fonctions composées ne le soit pas.

EXERCICE 3 ⋆⋆

1. Supposons $f(a) > 0$. Comme f est continue en a (proposition 1), elle reste strictement positive sur un voisinage de a, où $|f| = f$. La dérivabilité étant une propriété locale, $|f|$ est dérivable en a et $|f|'(a) = f'(a)$. Si $f(a) < 0$, on obtient de même $|f|'(a) = -f'(a)$.

$$\boxed{|f|'(a) = \operatorname{signe}\big(f(a)\big)\, f'(a)}$$

2. Si $f(a) = 0$, on a, pour $x \neq a$,

$$\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a} = \Big|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\Big| \times \frac{|x-a|}{x-a}.$$

Le premier facteur tend vers $|f'(a)|$, et le second vaut 1 à droite et -1 à gauche. Ainsi $|f|'_d(a) = |f'(a)|$ et $|f|'_g(a) = -|f'(a)|$, qui sont égales si et seulement si $f'(a) = 0$.

$$\boxed{\text{si } f(a) = 0,\ |f| \text{ est dérivable en } a \iff f'(a) = 0}$$

3. En résumé, $|f|$ est dérivable en a si et seulement si $f(a) \neq 0$ ou $f'(a) = 0$: les seuls points à problème sont les zéros de f en lesquels la dérivée ne s'annule pas, où la courbe de f traverse l'axe des abscisses avec une pente non nulle.

— La fonction sin s'annule en $k\pi$, où $\cos(k\pi) = (-1)^k \neq 0$: $|\sin|$ est dérivable exactement sur $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$.

— La fonction $x \mapsto x^3 - x$ s'annule en -1, 0 et 1, où sa dérivée $3x^2-1$ vaut 2, -1 et 2 : $x \mapsto |x^3-x|$ est dérivable exactement sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$.

4. On a $\max(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$. Comme $f+g$ est dérivable, $\max(f,g)$ est dérivable en x_0 si et seulement si $|f-g|$ l'est, et la question 3 appliquée à $f-g$ donne la condition.

$$\boxed{\max(f,g) \text{ dérivable en } x_0 \iff f(x_0) \neq g(x_0) \text{ ou } f'(x_0) = g'(x_0)}$$

Géométriquement, aux points où les courbes se croisent, elles doivent avoir la même tangente pour que leur enveloppe supérieure n'ait pas de point anguleux.

EXERCICE 4 ⋆⋆

1. On fait apparaître deux taux d'accroissement en a : pour $h \neq 0$,

$$\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = \frac{1}{2}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right).$$

Les deux quotients tendent vers $f'(a)$ quand h tend vers 0, le second par composition avec $h \mapsto -h$.

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = f'(a)}$$

2. La réciproque est fausse. Pour $f = |\cdot|$ et $a = 0$, le quotient vaut $\frac{|h|-|-h|}{2h} = 0$ pour tout $h \neq 0$, et sa limite existe, alors que f n'est pas dérivable en 0.

$$\boxed{\text{la réciproque est fausse}}$$

Le quotient symétrique ne voit pas la différence entre les pentes à gauche et à droite : il en fait la moyenne, ici $\frac{1}{2}(1+(-1)) = 0$. Il ne voit même pas la continuité : la fonction indicatrice de $\{0\}$ donne aussi un quotient nul.

3. On ajoute et l'on retranche $af(a)$ au numérateur : pour $x \neq a$,

$$\frac{xf(a)-af(x)}{x-a} = \frac{(x-a)f(a)-a\big(f(x)-f(a)\big)}{x-a} = f(a) - a\,\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{xf(a)-af(x)}{x-a} = f(a)-af'(a)}$$

EXERCICE 5 ⋆⋆

La dérivabilité en 0 avec $f(0) = 0$ signifie que $\frac{f(x)}{x}$ tend vers $f'(0)$. On pose donc $\varepsilon(x) = \frac{f(x)}{x} - f'(0)$ pour $x \neq 0$ et $\varepsilon(0) = 0$, de sorte que $f(x) = x\big(f'(0)+\varepsilon(x)\big)$ pour tout x, avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. Alors

$$u_n = f'(0)\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\,\varepsilon\Big(\frac{k}{n^2}\Big), \qquad \text{avec} \qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}.$$

Soit $\eta > 0$, et $\delta > 0$ tel que $|\varepsilon(t)| \leqslant \eta$ pour $|t| \leqslant \delta$. Pour $n \geqslant \frac{1}{\delta}$, tous les points $\frac{k}{n^2}$, avec $k \leqslant n$, sont dans $\left[0\,,\frac{1}{n}\right] \subset [0\,,\delta]$, et le second terme est majoré en valeur absolue par $\eta\,\frac{n+1}{2n} \leqslant \eta$: il tend vers 0.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{f'(0)}{2}}$$

Par exemple, pour $f = \sin$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n^2} = \frac{1}{2}$: la somme se comporte comme celle des $\frac{k}{n^2}$, car tous les arguments sont proches de 0.

Piège. Il ne suffit pas de dire que chaque terme $\frac{k}{n^2}\varepsilon\big(\frac{k}{n^2}\big)$ est négligeable : le nombre de termes augmente avec n. Il faut une majoration *uniforme* de $|\varepsilon|$ sur $\left[0\,,\frac{1}{n}\right]$, que fournit la définition de la limite.

EXERCICE 6 ⋆⋆

1. Si f est paire, on dérive l'égalité $f(-x) = f(x)$ à l'aide du théorème 2 : $-f'(-x) = f'(x)$, donc f' est impaire. De même, la dérivée d'une fonction impaire est paire, et la dérivée d'une fonction T-périodique, obtenue en dérivant $f(x+T) = f(x)$, est T-périodique.

$$\boxed{f \text{ paire} \Rightarrow f' \text{ impaire}, \quad f \text{ impaire} \Rightarrow f' \text{ paire}, \quad f\ T\text{-périodique} \Rightarrow f'\ T\text{-périodique}}$$

Une seule réciproque est vraie : si f' est impaire, la fonction $x \mapsto f(x) - f(-x)$ a pour dérivée $f'(x) + f'(-x) = 0$, elle est donc constante, égale à sa valeur 0 en 0, et f est paire. Les deux autres sont fausses : $x \mapsto x+1$ a une dérivée paire sans être impaire, et $x \mapsto x$ a une dérivée périodique sans être périodique ; dans les deux cas, c'est la constante d'intégration qui fait défaut.

2. Sur $\left[0\,,\frac{1}{2}\right]$ et sur $\left]\frac{1}{2}\,,1\right]$, la fonction g est continue comme composée de fonctions continues. En $\frac{1}{2}$, on a $g\left(\frac{1}{2}\right) = f(1)$, et la limite à droite vaut $\lim\limits_{x\to 1/2^+} f(2x-1) = f(0)$, égale à $f(1)$ par hypothèse : g est continue sur $[0\,,1]$.

Sur $\left[0\,,\frac{1}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{2}\,,1\right]$, g est dérivable, avec $g'(x) = 2f'(2x)$ et $g'(x) = 2f'(2x-1)$ respectivement. En $\frac{1}{2}$, la dérivée à gauche vaut $2f'(1)$, et, pour $x > \frac{1}{2}$, en posant $h = 2x-1$,

$$\frac{g(x) - g\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = \frac{f(2x-1) - f(0)}{x - \frac{1}{2}} = 2\,\frac{f(h) - f(0)}{h} \xrightarrow[x\to 1/2^+]{} 2f'(0).$$

On a utilisé $g\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) = f(0)$.

$$\boxed{g \text{ est dérivable sur } [0\,,1] \iff f'(0) = f'(1)}$$

Si l'on prolonge f par 1-périodicité, la courbe de g est celle de f parcourue deux fois en accéléré : le raccord est lisse si et seulement si les pentes aux deux bouts coïncident.

EXERCICE 7 ⋆⋆

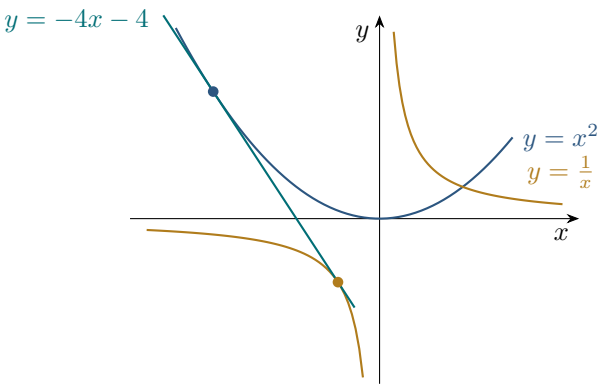
1. La tangente à la parabole au point d'abscisse a a pour équation $y = 2ax - a^2$, et la tangente à l'hyperbole au point d'abscisse $b \neq 0$ a pour équation $y = -\frac{x}{b^2} + \frac{2}{b}$. Une tangente commune correspond à un couple (a,b) tel que ces deux droites coïncident, c'est-à-dire

$$2a = -\frac{1}{b^2} \qquad \text{et} \qquad -a^2 = \frac{2}{b}.$$

La première équation donne $a = -\frac{1}{2b^2}$, et la seconde devient $-\frac{1}{4b^4} = \frac{2}{b}$, soit $8b^3 = -1$. On trouve $b = -\frac{1}{2}$, puis $a = -2$: le couple est unique.

$$\boxed{\text{l'unique tangente commune est la droite } y = -4x - 4}$$

Elle touche la parabole en $(-2,4)$ et l'hyperbole en $\left(-\frac{1}{2},-2\right)$.



La droite bleu pétrole touche la parabole bleue sur sa branche gauche et la branche négative de l'hyperbole ocre, sans couper ni l'une ni l'autre au voisinage des points de contact.

2. La fonction f_λ est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec

$$f'_\lambda(x) = \frac{(x^2+1) - 2x(x+\lambda)}{(x^2+1)^2} = \frac{1 - x^2 - 2\lambda x}{(x^2+1)^2}.$$

En 0, on a $f'_\lambda(0) = 1$ pour tout λ : les tangentes en 0 ont toutes la pente 1, et elles sont parallèles. En 1, on a $f_\lambda(1) = \frac{1+\lambda}{2}$ et $f'_\lambda(1) = -\frac{\lambda}{2}$, d'où la tangente

$$y = \frac{1+\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2}(x-1) = \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2}(2-x).$$

Pour $x = 2$, on trouve $y = \frac{1}{2}$, quel que soit λ.

$$\boxed{\text{les tangentes en 1 passent toutes par le point } \left(2, \tfrac{1}{2}\right)}$$

On trouve ce point en écrivant l'équation de la tangente sous la forme $A(x,y) + \lambda B(x,y) = 0$: le point commun est la solution du système $A = B = 0$.

EXERCICE 8 ⋆⋆

1. Soit f une solution. En prenant $x = y = 0$, on obtient $f(0) = 2f(0)$, donc $f(0) = 0$. À x fixé, on dérive par rapport à y les deux membres de l'égalité $f(x+y) = f(x) + f(y)$: $f'(x+y) = f'(y)$. En $y = 0$, il vient $f'(x) = f'(0)$ pour tout x. On pose $a = f'(0)$. La fonction $x \mapsto f(x) - ax$ a une dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$, elle est donc constante (théorème 7), égale à sa valeur $f(0) = 0$ en 0. Réciproquement, les fonctions linéaires conviennent.

$$\boxed{\text{les solutions sont les fonctions } x \mapsto ax,\ a \in \mathbb{R}}$$

Le chapitre 8 avait obtenu le même résultat sous la seule hypothèse de continuité, au prix d'un passage par les rationnels : la dérivabilité raccourcit nettement la démonstration.

2. Soit f une solution. En $x = 0$, on obtient $f(0) = 0$. Pour $x > 0$, on pose $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, qui vérifie $g(2x) = \frac{2f(x)}{2x} = g(x)$, donc, par récurrence, $g(x) = g\left(\frac{x}{2^n}\right)$ pour tout n. Or $g(t) = \frac{f(t)-f(0)}{t}$ tend vers $f'(0)$ quand t tend vers 0^+, et $\frac{x}{2^n}$ tend vers 0 : par composition, $g(x) = f'(0)$. Ainsi $f(x) = f'(0)\,x$ pour tout $x \geqslant 0$, et les fonctions linéaires conviennent.

$$\boxed{\text{les solutions sont les fonctions } x \mapsto ax,\ a \in \mathbb{R}}$$

La dérivabilité n'a servi qu'en 0 : il suffisait de supposer f dérivable à droite en 0.

EXERCICE 9 ⋆⋆⋆

1. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, le réel $t = \frac{x}{2^k}$ vérifie $|t| \leqslant \delta$, et $2t = \frac{x}{2^{k-1}}$. L'hypothèse donne

$$\left|f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^k}\right) - \frac{3x}{2^k}\right| \leqslant \varepsilon\,\frac{|x|}{2^k}.$$

On somme ces inégalités pour k allant de 1 à n. La somme des $f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^k}\right)$ est télescopique et vaut $f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right)$, et la somme géométrique $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$ vaut $1 - \frac{1}{2^n}$. L'inégalité triangulaire donne alors

$$\boxed{\left|f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) - 3x\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\right| \leqslant \varepsilon|x|\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \leqslant \varepsilon|x|}$$

2. On fait tendre n vers $+\infty$ à x fixé : par continuité de f en 0, $f\left(\frac{x}{2^n}\right)$ tend vers $f(0)$, et l'on obtient

$$|f(x) - f(0) - 3x| \leqslant \varepsilon|x|, \qquad \text{soit} \qquad \left|\frac{f(x) - f(0)}{x} - 3\right| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour } 0 < |x| \leqslant \delta.$$

C'est exactement la définition de la limite.

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } 0, \text{ et } f'(0) = 3}$$

3. L'hypothèse est nécessaire. La fonction f définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = 3x + 1$ pour $x \neq 0$ est de la forme suggérée, avec g égale à 1 sur $\mathbb{R}^*$ et nulle en 0, qui vérifie bien $g(2x) = g(x)$. Pour $x \neq 0$, on a $\frac{f(2x)-f(x)}{x} = \frac{6x+1-3x-1}{x} = 3$, mais f n'est pas continue en 0, donc pas dérivable (proposition 1).

$$\boxed{\text{sans continuité en } 0, \text{ la conclusion est fausse}}$$

L'hypothèse ne compare f qu'à elle-même, aux points x et $2x$: elle ne voit pas un saut placé en 0, que seule la continuité interdit.

EXERCICE 10 ⋆⋆

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = \mathrm{e}^x + 1 > 0$: elle est strictement croissante et continue, de limites $-\infty$ et $+\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$. Par le théorème de la bijection continue du chapitre 8, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Comme f' ne s'annule pas, le théorème 3 assure que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $(f^{-1})' = \frac{1}{f'\circ f^{-1}}$. Puisque $f(0) = 1$, on a $f^{-1}(1) = 0$, et

$$\boxed{(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}}$$

La fonction $(f^{-1})' = \frac{1}{f'\circ f^{-1}}$ est elle-même dérivable, comme inverse d'une composée de fonctions dérivables, et

$$(f^{-1})'' = -\frac{(f''\circ f^{-1}) \times (f^{-1})'}{(f'\circ f^{-1})^2} = -\frac{f''\circ f^{-1}}{(f'\circ f^{-1})^3}.$$

Avec $f''(0) = 1$ et $f'(0) = 2$, on obtient

$$\boxed{(f^{-1})''(1) = -\frac{1}{8}}$$

2. Pour $x \geqslant 0$, on a $1 + x + x^2 \geqslant 1$, donc g est bien définie, et

$$g'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} > 0.$$

La fonction g est continue et strictement croissante sur $[0\,,+\infty[$, avec $g(0) = 0$ et une limite infinie en $+\infty$: elle réalise une bijection de $[0\,,+\infty[$ sur lui-même. Pour $y \geqslant 0$, l'équation $g(x) = y$ s'écrit $x^2 + x + 1 - \mathrm{e}^y = 0$, de discriminant $4\mathrm{e}^y - 3 > 0$, dont la seule racine positive est

$$\boxed{g^{-1}(y) = \frac{-1+\sqrt{4\mathrm{e}^y-3}}{2}}$$

En dérivant directement, $(g^{-1})'(y) = \dfrac{\mathrm{e}^y}{\sqrt{4\mathrm{e}^y-3}}$. Par ailleurs, si $x = g^{-1}(y)$, on a $x^2 + x + 1 = \mathrm{e}^y$ et $2x + 1 = \sqrt{4\mathrm{e}^y - 3}$, donc

$$\frac{1}{g'(x)} = \frac{x^2+x+1}{2x+1} = \frac{\mathrm{e}^y}{\sqrt{4\mathrm{e}^y-3}},$$

et les deux calculs donnent bien le même résultat, conformément au théorème 3.
À retenir. Le théorème 3 donne la dérivée d'une réciproque sans connaître celle-ci : c'est tout son intérêt dans la question 1, où f^{-1} n'a pas d'expression à l'aide des fonctions usuelles.

EXERCICE 11 ⋆

1. On a $n^{1/n} = \exp(\varphi(n))$ avec $\varphi(x) = \frac{\ln x}{x}$, dérivable sur $]0\,,+\infty[$, de dérivée $\varphi'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$. Ainsi φ est croissante sur $]0\,,\mathrm{e}]$ et décroissante sur $[\mathrm{e}\,,+\infty[$ (théorème 7). Parmi les entiers, le maximum est donc atteint en 2 ou en 3, qui encadrent e. Or $(2^{1/2})^6 = 8 < 9 = (3^{1/3})^6$.

$$\boxed{\text{le plus grand élément est } 3^{1/3} \approx 1{,}442}$$

L'étude de la fonction continue φ ne donne que l'encadrement par 2 et 3 : la comparaison finale entre ces deux entiers est indispensable, car le maximum réel, atteint en e, n'est pas un entier.

2. La fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x$ a pour dérivée $3(x-1)(x+1)$. Par la proposition 2, ses extrema locaux sont à chercher parmi -1 et 1. Le signe de f' montre que f croît sur $]-\infty\,,-1]$, décroît sur $[-1\,,1]$ et croît sur $[1\,,+\infty[$: f a un maximum local en -1, de valeur 2, et un minimum local en 1, de valeur -2. Ces extrema ne sont pas globaux sur $\mathbb{R}$, puisque f tend vers $\pm\infty$ en $\pm\infty$.

Sur le segment $[-3\,,2]$, f atteint ses bornes (chapitre 8), en des points critiques ou aux extrémités. On compare donc $f(-3) = -18$, $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$ et $f(2) = 2$.

$$\boxed{\text{sur } [-3\,,2],\ \max f = 2,\ \text{atteint en } -1 \text{ et } 2,\quad \min f = -18,\ \text{atteint en } -3}$$

3. Pour $0 < x$ assez petit, on a $f(x) \geqslant f(0)$, donc le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ est positif, et sa limite aussi : $\boxed{f'(0) \geqslant 0}$. On ne peut pas dire mieux : $x \mapsto x$ a un minimum en 0 sur $[0\,,1]$, avec une dérivée égale à 1.

Piège. La proposition 2 exige un point *intérieur* à l'intervalle. En une extrémité, un extremum n'impose qu'une inégalité sur la dérivée, et c'est pourquoi on teste toujours séparément les bornes d'un segment.

EXERCICE 12 ⋆

Le membre de gauche est la dérivée de $x \mapsto ax^4 + bx^3 + cx^2$, qui vaut $a+b+c$ en 1 et 0 en 0. On pose donc

$$F(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a+b+c)x.$$

La fonction F est polynomiale, donc dérivable, et $F(0) = F(1) = 0$. Le théorème de Rolle fournit $x \in]0\,,1[$ tel que $F'(x) = 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a+b+c \text{ pour un } x \in]0\,,1[}$$

On ne pouvait pas conclure par le théorème des valeurs intermédiaires, car on ne connaît pas le signe de F' en 0 et en 1 : c'est en remontant à une primitive qu'on fait apparaître deux valeurs égales.

EXERCICE 13 ⋆⋆

Tout repose sur le principe suivant, conséquence du théorème de Rolle : si une fonction dérivable sur un intervalle s'annule en m points distincts $t_1 < \cdots < t_m$, sa dérivée s'annule en au moins $m-1$ points distincts, un dans chaque intervalle $]t_i\,,t_{i+1}[$.

1. On a $P''(x) = n(n-1)x^{n-2}$, qui ne s'annule qu'en 0 (ou jamais si $n = 2$). Si P avait quatre zéros distincts, P' en aurait trois et P'' deux, ce qui est impossible.

$$\boxed{P \text{ s'annule au plus trois fois}}$$

2. Si n est pair, $P'(x) = nx^{n-1} + p$ avec $n-1$ impair : la fonction $x \mapsto x^{n-1}$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, donc P' s'annule exactement une fois. Si P avait trois zéros, P' en aurait deux.

$$\boxed{\text{si } n \text{ est pair, } P \text{ s'annule au plus deux fois}}$$

Pour n impair, la borne 3 est atteinte : $x^3 - x$ s'annule en -1, 0 et 1.

3. On montre par récurrence finie que, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, la fonction $f^{(k)}$ s'annule en au moins $n+1-k$ points distincts de I. C'est l'hypothèse pour $k = 0$. Si c'est vrai pour un $k < n$, le principe ci-dessus, appliqué à $f^{(k)}$, qui est dérivable puisque $k < n$, donne $n-k$ zéros distincts de $f^{(k+1)}$. Pour $k = n$, on obtient

$$\boxed{f^{(n)} \text{ s'annule au moins une fois sur } I}$$

C'est ce que les questions 1 et 2 utilisaient, avec $f = P$ et $f^{(2)}$ ou f'.

EXERCICE 14 ⋆⋆

1. Supposons par exemple $f(c) > f(0)$, l'autre cas se traitant de même, et soit λ un réel tel que $f(0) < \lambda < f(c)$, par exemple $\lambda = \frac{f(0)+f(c)}{2}$.

— Sur $[0\,,c]$, f est continue et $f(0) < \lambda < f(c)$: le théorème des valeurs intermédiaires fournit $a \in]0\,,c[$ tel que $f(a) = \lambda$.

— Comme f tend vers $f(0) < \lambda$ en $+\infty$, il existe $X > c$ tel que $f(X) < \lambda$. Sur $[c\,,X]$, on obtient de même $b \in]c\,,X[$ tel que $f(b) = \lambda$.

Ainsi $0 < a < c < b$ et $f(a) = f(b)$. Le théorème de Rolle, appliqué sur $[a\,,b]$, fournit $\xi \in]a\,,b[$ tel que $f'(\xi) = 0$. Si f est constante, sa dérivée est nulle partout.

$$\boxed{f' \text{ s'annule sur }]0\,,+\infty[}$$

2. Notons L la limite commune. La fonction $\varphi : t \mapsto f(\tan t)$ est continue et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[$, et tend vers L en $\pm\frac{\pi}{2}$ par composition des limites. On la prolonge par continuité en posant $\varphi(\pm\frac{\pi}{2}) = L$: le théorème de Rolle s'applique, et fournit $c \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[$ tel que

$$\varphi'(c) = (1+\tan^2 c)\, f'(\tan c) = 0.$$

$$\boxed{f' \text{ s'annule en } \tan c}$$

Le changement de variable $x = \tan t$ ramène l'intervalle infini $\mathbb{R}$ à un intervalle borné : c'est la même idée que dans la question 1, réalisée d'un seul coup.

EXERCICE 15 ⋆⋆

La fonction $\varphi : x \mapsto \frac{f(x)}{x-d}$ est définie, continue sur $[a\,,b]$ et dérivable sur $]a\,,b[$, puisque $d \notin [a\,,b]$. Elle vérifie $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Le théorème de Rolle fournit $c \in]a\,,b[$ tel que

$$\varphi'(c) = \frac{f'(c)(c-d) - f(c)}{(c-d)^2} = 0, \qquad \text{soit} \qquad f(c) + f'(c)(d-c) = 0.$$

Or la tangente au point d'abscisse c a pour équation $y = f(c) + f'(c)(x-c)$: l'égalité obtenue dit qu'elle passe par le point $(d,0)$.

$$\boxed{\text{la tangente au point d'abscisse } c \text{ passe par } (d,0)}$$

La quantité $\varphi(x)$ est la pente de la droite joignant $(d,0)$ au point $(x,f(x))$. On cherche la position où cette pente est extrémale : la droite y est tangente à la courbe, comme un rayon lumineux issu de $(d,0)$ qui effleure la courbe.

EXERCICE 16 ⋆⋆

Si $P = 0$, l'équation n'a pas de solution. Sinon, soit d le degré de P, et $h : x \mapsto P(x)\mathrm{e}^{-x} - 1$, dont les zéros sont exactement les solutions de l'équation. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$h'(x) = (P'(x) - P(x))\mathrm{e}^{-x}.$$

Le polynôme $P - P'$ a le même terme dominant que P : il est de degré d, non nul, et s'annule donc au plus d fois (chapitre 3). Ainsi h' s'annule au plus d fois. Si h s'annulait en $d+2$ points distincts, le théorème de Rolle fournirait $d+1$ zéros distincts de h', ce qui est impossible.

$$\boxed{\text{l'équation } P(x) = \mathrm{e}^x \text{ a au plus } d+1 \text{ solutions}}$$

L'énoncé suggérait une récurrence sur le degré ; l'application directe du théorème de Rolle à h la rend inutile, et donne en outre une borne explicite. La borne est atteinte pour $d = 1$: l'équation $3x = \mathrm{e}^x$ a deux solutions, car la fonction $x \mapsto 3x\mathrm{e}^{-x}$ croît de 0 à $\frac{3}{\mathrm{e}} > 1$ sur $[0\,,1]$ puis décroît vers 0.

EXERCICE 17 ⋆

(a) La fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\frac{1}{1+x^2} \in]0\,,1]$. L'inégalité des accroissements finis (théorème 6) donne $\boxed{|\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} y| \leqslant |x-y|}$: la fonction Arctan est 1-lipschitzienne.

(b) Pour $x > 0$, le théorème des accroissements finis appliqué à exp sur $[0\,,x]$ fournit $c \in]0\,,x[$ tel que $\mathrm{e}^x - 1 = x\mathrm{e}^c$. Comme $1 \leqslant \mathrm{e}^c \leqslant \mathrm{e}^x$, on obtient $\boxed{x \leqslant \mathrm{e}^x - 1 \leqslant x\mathrm{e}^x}$, et l'inégalité est une égalité pour $x = 0$.

(c) Le théorème des accroissements finis appliqué à Arctan sur $[x\,,y]$ fournit $c \in]x\,,y[$ tel que $\operatorname{Arctan} y - \operatorname{Arctan} x = \frac{y-x}{1+c^2}$. Comme $0 < x < c < y$, on a $\frac{1}{1+y^2} < \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{1+x^2}$, d'où

$$\boxed{\frac{y-x}{1+y^2} < \operatorname{Arctan} y - \operatorname{Arctan} x < \frac{y-x}{1+x^2}}$$

Approximations. Pour la racine carrée sur $[10\,000\,,10\,001]$, il existe c dans cet intervalle tel que

$$\sqrt{10\,001} - 100 = \frac{1}{2\sqrt{c}}, \qquad \text{donc} \qquad 0 < \sqrt{10\,001} - 100 < \frac{1}{2\sqrt{10\,000}} = \boxed{5 \cdot 10^{-3}}.$$

La valeur exacte de l'erreur est $4{,}99987 \cdot 10^{-3}$: la majoration est presque optimale, car la dérivée varie très peu sur l'intervalle. Pour $u : t \mapsto \frac{1}{t^2}$, de dérivée $-\frac{2}{t^3}$, il existe $c \in]0{,}999\,,1[$ tel que

$$\frac{1}{0{,}999^2} - 1 = \frac{2}{c^3} \times 10^{-3}, \qquad \text{donc} \qquad 0 < \frac{1}{0{,}999^2} - 1 < \frac{2 \cdot 10^{-3}}{0{,}999^3} < \boxed{2{,}01 \cdot 10^{-3}}.$$

La valeur exacte est $2{,}0030 \cdot 10^{-3}$.

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. Le théorème des accroissements finis appliqué à ln sur $[x\,,x+1]$ fournit $c \in]x\,,x+1[$ tel que $\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c}$. Comme $x < c < x+1$,

$$\boxed{\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}}$$

2. Pour $k \geqslant 2$, la question 1 avec $x = k$, puis avec $x = k-1$, donne

$$\ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k} < \ln k - \ln(k-1).$$

On somme pour k allant de $n+1$ à $2n$: les sommes sont télescopiques, et

$$\ln(2n+1) - \ln(n+1) < v_n < \ln(2n) - \ln n = \ln 2.$$

Le minorant vaut $\ln\frac{2n+1}{n+1}$, qui tend vers $\ln 2$ par continuité du logarithme. Par encadrement,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \ln 2}$$

3. De même, en sommant de $k=1$ à n la minoration, puis de $k=2$ à n la majoration, on obtient

$$\ln(n+1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \ln n.$$

Pour $n \geqslant 2$, on divise par $\ln n > 0$: le minorant $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}$ et le majorant $1 + \frac{1}{\ln n}$ tendent tous deux vers 1.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1}$$

La somme harmonique tend donc vers $+\infty$ à la vitesse du logarithme, ce que le chapitre 7 n'avait pas pu préciser.

EXERCICE 19 ⋆⋆

1. La fonction f' est continue sur le segment $[0\,,1]$: elle y atteint son minimum m (chapitre 8), et $m > 0$ puisque ce minimum est une valeur de f'. Pour $x \in]0\,,1]$, le théorème des accroissements finis fournit $c \in]0\,,x[$ tel que $f(x) = f(x) - f(0) = xf'(c) \geqslant mx$, et l'inégalité est une égalité en 0.

$$\boxed{f(x) \geqslant mx \text{ sur } [0\,,1], \text{ avec } m = \min_{[0,1]} f' > 0}$$

2. Le résultat subsiste. Soit g définie par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ pour $x \in]0\,,1]$ et $g(0) = f'(0)$. Elle est continue sur $]0\,,1]$, et en 0 par définition de $f'(0)$, puisque $f(0) = 0$. Pour $x > 0$, le théorème des accroissements finis donne $f(x) = xf'(c) > 0$, donc $g(x) > 0$, et $g(0) = f'(0) > 0$. La fonction continue g atteint son minimum m sur le segment $[0\,,1]$, et $m > 0$.

$$\boxed{\text{le résultat subsiste, avec } m = \min_{[0,1]} g}$$

Piège. Dans la question 1, il est tentant de poser $m = \inf f'$ sans justifier qu'il est strictement positif. Une fonction strictement positive peut avoir une borne inférieure nulle, comme $x \mapsto x$ sur $]0\,,1]$: c'est le théorème des bornes atteintes, sur un segment, qui garantit $m > 0$. Dans la question 2, on ne peut plus l'appliquer à f', qui peut être discontinue, d'où le recours à g.

EXERCICE 20 ⋆⋆

1. Supposons d'abord $\ell = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, et $A > 0$ tel que $|f'(t)| \leqslant \varepsilon$ pour $t \geqslant A$. Pour $x > A$, l'inégalité des accroissements finis sur $[A\,,x]$ donne $|f(x) - f(A)| \leqslant \varepsilon(x - A) \leqslant \varepsilon x$, d'où

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \frac{|f(A)|}{x} + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon \qquad \text{pour } x \geqslant \max\left(A, \frac{|f(A)|}{\varepsilon}\right).$$

Ainsi $\frac{f(x)}{x}$ tend vers 0. Dans le cas général, on applique ce résultat à $g : x \mapsto f(x) - \ell x$, dont la dérivée $f' - \ell$ tend vers 0 : $\frac{f(x)}{x} - \ell$ tend vers 0.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell}$$

2. La réciproque est fausse : $f : x \mapsto \sin(x^2)$ vérifie $\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x}$, mais $f'(x) = 2x\cos(x^2)$ vaut $2\sqrt{2n\pi}$ en $\sqrt{2n\pi}$ et 0 en $\sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$: elle n'a pas de limite. La réciproque est fausse.

3. Soit $A > 0$ tel que $f'(t) \geqslant 1$ pour $t \geqslant A$. Le théorème des accroissements finis sur $[A\,,x]$ donne $f(x) \geqslant f(A) + (x - A)$, qui tend vers $+\infty$: par minoration, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

4. Si f est bornée par M, alors $\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \frac{M}{x}$, qui tend vers 0. La question 1 et l'unicité de la limite donnent $\boxed{\ell = 0}$. En revanche, une fonction bornée dérivable n'a pas nécessairement une dérivée de limite nulle : l'exemple $x \mapsto \sin(x^2)$ de la question 2 est borné, et sa dérivée n'a pas de limite. La question 4 suppose l'existence de la limite de f' ; elle n'en détermine que la valeur.

EXERCICE 21 ⋆⋆

On applique la méthode du point fixe attractif (proposition 3) : on trouve un intervalle stable J sur lequel $|\varphi'| \leqslant k < 1$, et l'inégalité des accroissements finis donne $|u_{n+1} - \ell| = |\varphi(u_n) - \varphi(\ell)| \leqslant k|u_n - \ell|$, d'où $|u_n - \ell| \leqslant k^n|u_0 - \ell|$.

(a) La fonction $\varphi : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$ est dérivable, avec

$$\varphi'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} > 0.$$

Comme φ est croissante, $\varphi([0\,,1]) = \left[\frac{1}{2}\,, \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}\right] \subset [0\,,1]$: l'intervalle $[0\,,1]$ est stable. Par ailleurs, en posant $s = \mathrm{e}^x$, on a $\varphi'(x) = \frac{s}{(1+s)^2} \leqslant \frac{1}{4}$, puisque $(1+s)^2 - 4s = (1-s)^2 \geqslant 0$. La fonction $x \mapsto \varphi(x) - x$ est continue, strictement décroissante puisque sa dérivée est inférieure à $\frac{1}{4} - 1$, positive en 0 et négative en 1 : elle s'annule en un unique point $\ell \in [0\,,1]$. Ainsi

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers l'unique point fixe } \ell \approx 0{,}6590, \text{ avec } |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{4^n}}$$

(b) Soit $\varphi(x) = \sqrt{1+x}$. L'intervalle $J = [1\,,+\infty[$ est stable, et pour $x \geqslant 1$,

$$0 < \varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Le point fixe vérifie $\ell^2 = 1 + \ell$ et $\ell \geqslant 1$, donc $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, le nombre d'or.

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \text{ avec } |u_n - \ell| \leqslant \frac{2-\ell}{(2\sqrt{2})^n} \leqslant \frac{0{,}39}{(2\sqrt{2})^n}}$$

(c) Par récurrence, $u_n > 0$ pour tout n, donc $u_{n+1} = u_n\mathrm{e}^{-u_n} < u_n$: la suite est décroissante et minorée par 0, elle converge vers un réel $\ell \geqslant 0$. Par continuité de $\varphi : x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$, on a $\ell = \ell\mathrm{e}^{-\ell}$, donc $\ell = 0$. On a $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

La méthode du point fixe attractif ne s'applique pas, car $\varphi'(0) = 1$: aucun intervalle contenant 0 ne vérifie $|\varphi'| \leqslant k < 1$. Et la conclusion de la méthode est effectivement fausse ici. Si l'on avait $u_n \leqslant Cq^n$ avec $0 < q < 1$, on pourrait choisir q' tel que $q < q' < 1$. Puisque $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \mathrm{e}^{-u_n}$ tend vers 1, on aurait $u_{n+1} \geqslant q'u_n$ à partir d'un rang N, donc $u_n \geqslant u_N q'^{n-N}$, et $\left(\frac{q'}{q}\right)^n$ serait bornée, ce qui est absurde. La convergence est plus lente que toute suite géométrique ; on observe numériquement que nu_n est proche de 1 pour n grand.

EXERCICE 22 ⋆⋆

Soit $x \in I$. Pour $y \in I$ distinct de x,

$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \leqslant C|y-x|^{\alpha-1} \xrightarrow[y\to x]{} 0,$$

puisque $\alpha - 1 > 0$. Ainsi f est dérivable en x, avec $f'(x) = 0$. La dérivée étant nulle sur l'intervalle I, le théorème 7 conclut.

$$\boxed{\text{si } \alpha > 1,\ f \text{ est constante}}$$

Pour $\alpha = 1$, ce sont les fonctions lipschitziennes : il en existe de nombreuses non constantes, comme $x \mapsto x$, et même non dérivables, comme $x \mapsto |x|$. Pour $0 < \alpha < 1$, la racine carrée est $\frac{1}{2}$-höldérienne sur $[0\,,+\infty[$: pour $0 \leqslant y \leqslant x$, on a $\left(\sqrt{y}+\sqrt{x-y}\right)^2 = x + 2\sqrt{y(x-y)} \geqslant x$, donc $\sqrt{x}-\sqrt{y} \leqslant \sqrt{x-y}$. Elle n'est pourtant pas lipschitzienne, puisque son taux d'accroissement en 0 tend vers $+\infty$. L'hypothèse avec $\alpha > 1$ est donc très forte : elle impose une pente nulle partout.

EXERCICE 23 ⋆⋆⋆

1. La fonction f est continue sur le segment $[a\,,b]$, puisqu'elle y est dérivable : elle y atteint son minimum en un point c. Comme $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers $f'(a) < 0$ quand x tend vers a^+, il existe $x \in]a\,,b[$ tel que $f(x) < f(a)$: le minimum n'est pas atteint en a. De même, $\frac{f(x)-f(b)}{x-b}$ tend vers $f'(b) > 0$ quand x tend vers b^-, donc il existe $x < b$ tel que $f(x) < f(b)$, et le minimum n'est pas atteint en b. Ainsi $c \in]a\,,b[$ est un point intérieur, et la proposition 2 donne $\boxed{f'(c) = 0}$.

2. Soit $a < b$ dans I et λ un réel strictement compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$. Si $f'(a) < \lambda < f'(b)$, la fonction $g : x \mapsto f(x) - \lambda x$ vérifie $g'(a) < 0 < g'(b)$, et la question 1 fournit $c \in]a\,,b[$ tel que $g'(c) = 0$, soit $f'(c) = \lambda$. Si $f'(a) > \lambda > f'(b)$, on applique ce qui précède à $-f$. Ainsi $f'(I)$ contient tout réel compris entre deux de ses éléments : c'est un intervalle, d'après la caractérisation des intervalles du chapitre 7.

$$\boxed{f'(I) \text{ est un intervalle}}$$

3. L'image de $\mathbb{R}$ par la partie entière est $\mathbb{Z}$, qui n'est pas un intervalle : elle contient 0 et 1, mais pas $\frac{1}{2}$. Par la question 2, $\boxed{\text{la partie entière n'est la dérivée d'aucune fonction}}$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $g'(0) = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$ et $g'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$. Cette dérivée n'a pas de limite en 0, elle n'est donc pas continue. Ce n'est pas un contre-exemple : le théorème de Darboux affirme justement que g', bien que discontinue, vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, et c'est le cas, puisque g' oscille entre des valeurs proches de -1 et de 1 au voisinage de 0, en passant par 0. $\boxed{\text{Ce n'est pas un contre-exemple.}}$

À retenir. Une dérivée peut être discontinue, mais pas n'importe comment : elle ne peut pas faire de saut. C'est pourquoi une fonction présentant un saut, comme la partie entière, n'a pas de primitive sur $\mathbb{R}$; le chapitre sur l'intégration le confirmera.

EXERCICE 24 ⋆⋆⋆

1. Si l'on avait $g(a) = g(b)$, le théorème de Rolle ferait s'annuler g' sur $]a\,,b[$: ainsi $g(b) \neq g(a)$. On pose

$$\varphi(x) = \big(f(b)-f(a)\big)g(x) - \big(g(b)-g(a)\big)f(x).$$

La fonction φ est continue sur $[a\,,b]$, dérivable sur $]a\,,b[$, et un calcul direct donne

$$\varphi(a) = \varphi(b) = f(b)g(a) - f(a)g(b).$$

Le théorème de Rolle fournit $c \in]a\,,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, c'est-à-dire

$$\big(f(b)-f(a)\big)g'(c) = \big(g(b)-g(a)\big)f'(c).$$

On divise par le produit $g'(c)(g(b)-g(a))$, qui est non nul.

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ pour un } c \in]a\,,b[}$$

Pour $g(x)=x$, on retrouve le théorème des accroissements finis.

2. Pour $x \in]a\,,b]$, on applique la question 1 sur $[a\,,x]$: il existe $c_x \in]a\,,x[$ tel que

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Soit $\varepsilon > 0$, et $\delta > 0$ tel que $\left|\frac{f'(t)}{g'(t)} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$ pour $a < t < a+\delta$. Pour $a < x < a+\delta$, on a $a < c_x < a+\delta$, donc le quotient étudié est à distance au plus ε de ℓ.

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \ell}$$

3. On pose $f(x) = \cos x - \mathrm{e}^x$ et $g(x) = (x+1)\mathrm{e}^x - 1$ sur $[0\,,1]$. On a $f(0) = g(0) = 0$, $f'(x) = -\sin x - \mathrm{e}^x$, et $g'(x) = (x+2)\mathrm{e}^x$, qui ne s'annule pas sur $]0\,,1[$. Comme

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-\sin x - \mathrm{e}^x}{(x+2)\mathrm{e}^x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{-1}{2},$$

la question 2 donne

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - \mathrm{e}^x}{(x+1)\mathrm{e}^x - 1} = -\frac{1}{2}}$$

Piège. La règle de L'Hospital donne la limite du quotient *si* celle des dérivées existe. La réciproque est fausse : avec $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ et $g(x) = x$ en 0, le quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 0, alors que $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ n'a pas de limite. Dans ce cours, on préférera reconnaître un taux d'accroissement, ou attendre les développements limités du chapitre 10.

EXERCICE 25 ⋆⋆⋆

1. La tangente au point d'abscisse c a pour pente $f'(c)$, et la corde joignant l'origine, qui est sur la courbe puisque $f(0) = 0$, au point $(c, f(c))$ a pour pente $\frac{f(c)}{c}$. La conclusion dit que ces deux droites, qui passent par le point $(c, f(c))$, ont la même pente :

$$\boxed{\text{la tangente au point d'abscisse } c \text{ passe par l'origine}}$$

Elle est alors confondue avec la corde.

2. La fonction g est continue et dérivable sur $]0\,,1]$ comme quotient, et continue en 0 puisque $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x}$ tend vers $f'(0) = 0 = g(0)$. Pour $x \in]0\,,1]$,

$$\boxed{g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}}$$

La conclusion cherchée équivaut donc à l'annulation de g' en un point $c \in]0\,,1]$.

3. Si $f(1) = 0$, alors $g(0) = g(1) = 0$, et le théorème de Rolle fournit $c \in]0\,,1[$ tel que $g'(c) = 0$.

Si $f(1) > 0$, on a $g'(1) = f'(1) - f(1) = -f(1) < 0$. Comme $\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$ tend vers $g'(1) < 0$ quand x tend vers 1^-, il existe $x < 1$ tel que $g(x) > g(1)$. De plus $g(1) = f(1) > 0 = g(0)$. La fonction continue g atteint son maximum sur $[0\,,1]$ en un point c, qui n'est ni 0, puisque $g(1) > g(0)$, ni 1, puisque $g(x) > g(1)$. Ainsi $c \in]0\,,1[$ est intérieur, et $g'(c) = 0$ par la proposition 2.

Si $f(1) < 0$, on applique ce qui précède à $-f$, qui vérifie les mêmes hypothèses. Dans tous les cas,

$$\boxed{\text{il existe } c \in]0\,,1[\text{ tel que } f'(c) = \frac{f(c)}{c}}$$

Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Flett (1958). L'hypothèse $f'(0) = f'(1)$ y joue le rôle de l'hypothèse $f(a) = f(b)$ du théorème de Rolle.

EXERCICE 26 ⋆⋆⋆

1. On construit les y_k de proche en proche. On pose $y_0 = 0$ et $y_n = 1$. Si $y_{k-1} < 1$ est construit avec $f(y_{k-1}) = \frac{k-1}{n}$, où $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on a $f(y_{k-1}) < \frac{k}{n} < 1 = f(1)$. Le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué à la fonction continue f sur $[y_{k-1}\,,1]$, fournit $y_k \in]y_{k-1}\,,1[$ tel que $f(y_k) = \frac{k}{n}$.

$$\boxed{0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = 1, \quad f(y_k) = \frac{k}{n}}$$

2. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, le théorème des accroissements finis sur $[y_{k-1}\,,y_k]$ fournit $x_k \in]y_{k-1}\,,y_k[$ tel que

$$f'(x_k)(y_k - y_{k-1}) = f(y_k) - f(y_{k-1}) = \frac{1}{n}.$$

En particulier $f'(x_k) \neq 0$, et $\frac{1}{f'(x_k)} = n(y_k - y_{k-1})$. La somme est télescopique :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f'(x_k)} = n \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1}) = n(y_n - y_0) = n}$$

Les x_k sont strictement croissants, car ils sont dans les intervalles disjoints $]y_{k-1}\,,y_k[$.

3. On découpe cette fois l'intervalle de départ, et non l'intervalle d'arrivée. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, le théorème des accroissements finis fournit $z_k \in \left]\frac{k-1}{n}\,,\frac{k}{n}\right[$ tel que

$$f\Big(\frac{k}{n}\Big) - f\Big(\frac{k-1}{n}\Big) = \frac{1}{n} f'(z_k).$$

En sommant ces n égalités,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} f'(z_k) = n(f(1) - f(0)) = n}$$

Les deux questions sont symétriques : la première découpe les ordonnées en parts égales, la seconde les abscisses.

FONCTIONS DE CLASSE $\mathcal{C}^k$

EXERCICE 27 ⋆

Toutes ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine, par les opérations de la proposition 4. Les formules ci-dessous s'établissent par une récurrence immédiate, ou par la formule de Leibniz (théorème 9), et ont été contrôlées par le calcul formel pour $n \leqslant 5$.

(a) On écrit $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$, et chaque dérivation fait sortir un facteur $\ln a$:

$$\boxed{(a^x)^{(n)} = (\ln a)^n\, a^x}$$

(b) On raisonne par récurrence : la dérivée de $(-1)^n n!\, x^{-n-1}$ est

$$(-1)^n n!\,(-n-1)x^{-n-2} = (-1)^{n+1}(n+1)!\, x^{-n-2},$$

et

$$\boxed{\Big(\frac{1}{x}\Big)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}}$$

(c) La formule de Leibniz ne comporte que trois termes non nuls, puisque les dérivées de x^2 d'ordre au moins 3 sont nulles, et $(\mathrm{e}^{3x})^{(j)} = 3^j \mathrm{e}^{3x}$:

$$(x^2 \mathrm{e}^{3x})^{(n)} = x^2 \cdot 3^n \mathrm{e}^{3x} + n \cdot 2x \cdot 3^{n-1} \mathrm{e}^{3x} + \binom{n}{2} \cdot 2 \cdot 3^{n-2} \mathrm{e}^{3x},$$

$$\boxed{(x^2\mathrm{e}^{3x})^{(n)} = 3^{n-2}\,\mathrm{e}^{3x}(9x^2+6nx+n(n-1))}$$

La formule reste juste pour $n=0$ et $n=1$, où les termes en $\binom{n}{2}$ ou en n sont nuls.

(d) Avec $P(x)=x^3+2x-7$, de dérivées $P'=3x^2+2$, $P''=6x$ et $P'''=6$, la formule de Leibniz donne

$$\boxed{\big(P(x)\mathrm{e}^x\big)^{(n)} = \mathrm{e}^x\big(x^3+2x-7+n(3x^2+2)+3n(n-1)x+n(n-1)(n-2)\big)}$$

Les coefficients $\binom{n}{2}P''$ et $\binom{n}{3}P'''$ valent $3n(n-1)x$ et $n(n-1)(n-2)$.

(e) On a $21+5x-4x^2=(3-x)(4x+7)$. La décomposition

$$\frac{1}{(3-x)(4x+7)} = \frac{1}{19}\Big(\frac{1}{3-x}+\frac{4}{4x+7}\Big)$$

se vérifie en réduisant au même dénominateur, puisque $(4x+7)+4(3-x)=19$. Or $\big(\frac{1}{3-x}\big)^{(n)} = \frac{n!}{(3-x)^{n+1}}$ et $\big(\frac{1}{4x+7}\big)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!\,4^n}{(4x+7)^{n+1}}$, comme en (b), d'où, pour $x\notin\{3,-\frac{7}{4}\}$,

$$\boxed{\Big(\frac{1}{21+5x-4x^2}\Big)^{(n)} = \frac{n!}{19}\Big(\frac{1}{(3-x)^{n+1}}+\frac{(-1)^n 4^{n+1}}{(4x+7)^{n+1}}\Big)}$$

(f) La formule de Moivre, ou les formules d'Euler du chapitre 4, donnent $\cos^3 x = \frac{3\cos x+\cos(3x)}{4}$. Comme $\cos^{(n)}(x)=\cos\big(x+\frac{n\pi}{2}\big)$,

$$\boxed{(\cos^3)^{(n)}(x) = \frac{1}{4}\Big(3\cos\Big(x+\frac{n\pi}{2}\Big)+3^n\cos\Big(3x+\frac{n\pi}{2}\Big)\Big)}$$

À retenir. La formule de Leibniz est efficace quand l'un des facteurs est polynomial : la somme s'arrête après quelques termes. Pour une fraction rationnelle, on la décompose d'abord en éléments simples, dont les dérivées successives se calculent à vue. Pour une puissance de cos ou de sin, on linéarise.

EXERCICE 28 ⋆⋆

1. Pour $0\leqslant k\leqslant n-1$, on a $(x^{n-1})^{(k)} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}x^{n-1-k}$, et la dérivée n-ième est nulle. Pour le logarithme, $\ln(1+x)' = \frac{1}{1+x}$, puis, comme à l'exercice 27(b), pour $k\geqslant 1$,

$$\boxed{\big(\ln(1+x)\big)^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}}$$

2. La formule de Leibniz ne fait intervenir que les termes $k\leqslant n-1$ pour le premier facteur, donc des dérivées du logarithme d'ordre $n-k\geqslant 1$:

$$\big(x^{n-1}\ln(1+x)\big)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}x^{n-1-k}\times\frac{(-1)^{n-k-1}(n-k-1)!}{(1+x)^{n-k}}.$$

Les factorielles $(n-1-k)!$ se simplifient. On pose $j=n-k$, qui varie de 1 à n, et l'on utilise $\binom{n}{n-j}=\binom{n}{j}$:

$$\big(x^{n-1}\ln(1+x)\big)^{(n)} = (n-1)!\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\frac{(-1)^{j-1}x^{j-1}}{(1+x)^j}.$$

Pour $x\neq 0$, on factorise par $-\frac{1}{x}$ et l'on reconnaît la formule du binôme, privée de son terme $j=0$:

$$\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{j-1}\frac{x^{j-1}}{(1+x)^j} = -\frac{1}{x}\Big(\Big(1-\frac{x}{1+x}\Big)^n-1\Big) = \frac{1}{x}\Big(1-\frac{1}{(1+x)^n}\Big).$$

$$\boxed{\left(x^{n-1}\ln(1+x)\right)^{(n)} = \frac{(n-1)!\left((1+x)^n-1\right)}{x(1+x)^n} \quad \text{pour } x \neq 0}$$

En 0, la somme vaut $(n-1)!\binom{n}{1} = n!$, qui est aussi la limite du membre de droite, puisque $\frac{(1+x)^n-1}{x}$ tend vers la dérivée n de $x \mapsto (1+x)^n$ en 0. Pour $n=2$, on trouve $\frac{x+2}{(1+x)^2}$, résultat confirmé par le calcul formel.

Piège. L'erreur la plus répandue est d'oublier que la dérivée n-ième de x^{n-1} est nulle, et de conserver un terme $k=n$ qui ferait intervenir la « dérivée d'ordre 0 » du logarithme : la somme s'arrête à $k=n-1$, ce qui fait disparaître le logarithme du résultat.

EXERCICE 29 ⋆⋆

(a) Les deux fonctions tendent vers 0 en 0, comme produits d'une fonction bornée par une fonction de limite nulle : on les prolonge par 0. Notons f et g les prolongements.

— Le taux d'accroissement de f en 0 est $x\sin\frac{1}{x}$, qui tend vers 0 : f est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(0)=0$ et $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$. Cette dérivée n'a pas de limite en 0, car $\cos\frac{1}{x}$ vaut 1 en $\frac{1}{2k\pi}$ et -1 en $\frac{1}{(2k+1)\pi}$.

— Le taux d'accroissement de g en 0 est $x^2\sin\frac{1}{x}$, qui tend vers 0, et $g'(x) = 3x^2\sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}$ tend vers 0 : g est de classe $\mathcal{C}^1$. Le taux d'accroissement de g' en 0 vaut $3x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$, qui n'a pas de limite : g n'est pas deux fois dérivable en 0.

$$\boxed{f \text{ est dérivable mais pas de classe } \mathcal{C}^1; \quad g \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ mais pas deux fois dérivable}}$$

(b) Avec $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ et $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, on obtient, pour $x \in \left]0\,,\frac{\pi}{2}\right]$,

$$\frac{\cos x - 1}{\sin x} = -\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = -\tan\frac{x}{2}.$$

Le prolongement par 0 en 0 est la fonction $x \mapsto -\tan\frac{x}{2}$ sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$.

$$\boxed{\text{le prolongement est de classe } \mathcal{C}^\infty}$$

Le quotient n'avait qu'une indétermination apparente : la formule de l'angle moitié la fait disparaître.

(c) La fonction f est 1-périodique, puisque $\lfloor x+1\rfloor = \lfloor x\rfloor + 1$, et vaut $(x-n)(x-n-1)$ sur $[n\,,n+1[$. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur chaque intervalle $]n\,,n+1[$. En l'entier $n+1$, la limite à gauche vaut $1\times 0 = 0 = f(n+1)$: elle est continue sur $\mathbb{R}$. Sur $]n\,,n+1[$, sa dérivée vaut $2(x-n)-1$, qui tend vers -1 à droite de n et vers 1 à gauche de $n+1$. Par le théorème de la limite de la dérivée, appliqué de chaque côté, $f'_d(n) = -1$ et $f'_g(n) = 1$.

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ mais n'est pas dérivable aux entiers}}$$

La courbe est une suite d'arches de parabole, qui se raccordent aux entiers avec des pentes opposées.

(d) Notons f la fonction obtenue. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty\,,0[$ et sur $]0\,,+\infty[$.

— La continuité en 0 demande que la limite à gauche, 1, soit égale à $f(0) = a+b$.

— On a $f'(x) = 1 + be^x$ pour $x>0$, de limite $1+b$, et $f'(x) = -\sin x - 1$ pour $x<0$, de limite -1. Par le théorème de la limite de la dérivée, f est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si $1+b=-1$.

On obtient $b=-2$ et $a=3$. Alors $f''(x) = -2e^x$ tend vers -2 à droite, et $f''(x) = -\cos x$ tend vers -1 à gauche : par le théorème de la limite de la dérivée appliqué à f' de chaque côté, f' a en 0 une dérivée à droite égale à -2 et une dérivée à gauche égale à -1.

$$\boxed{a=3,\ b=-2;\ f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ mais n'est pas deux fois dérivable en } 0}$$

EXERCICE 30 ⋆⋆⋆

1. Sur $]0,+\infty[$, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. On montre l'existence de P_n par récurrence, avec $P_0 = 1$. Si $f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})\mathrm{e}^{-1/x}$, la dérivation d'une composée et d'un produit donne

$$f^{(n+1)}(x) = \Big(-\frac{1}{x^2}P_n'\Big(\frac{1}{x}\Big) + \frac{1}{x^2}P_n\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big)\mathrm{e}^{-1/x},$$

et l'on pose

$$\boxed{P_{n+1}(X) = X^2(P_n(X) - P_n'(X))}$$

qui est polynomiale. On trouve $P_1 = X^2$ et $P_2 = X^4 - 2X^3$.

2. Pour tout polynôme P, $\lim\limits_{x\to 0^+} P(\frac{1}{x})\mathrm{e}^{-1/x} = \lim\limits_{u\to+\infty} P(u)\mathrm{e}^{-u} = 0$, par croissances comparées (chapitre 5) et composition. On montre par récurrence sur n la propriété : « f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, et $f^{(k)}(0) = 0$ pour $k \leqslant n$ ».

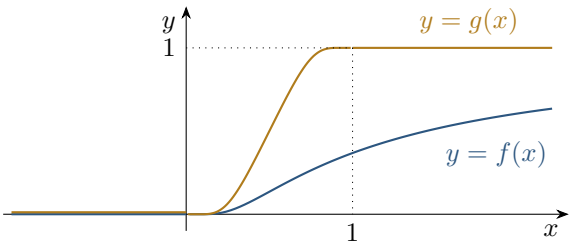
Pour $n = 0$, f est continue en 0 puisque $\mathrm{e}^{-1/x}$ tend vers 0 quand x tend vers 0^+. Supposons la propriété vraie au rang n. La fonction $f^{(n)}$ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et sa dérivée $f^{(n+1)}$ tend vers 0 en 0 : à droite d'après ce qui précède, à gauche puisqu'elle y est nulle. Le théorème de la limite de la dérivée (théorème 8) montre que $f^{(n)}$ est dérivable en 0, avec $f^{(n+1)}(0) = 0$, et que $f^{(n+1)}$ est continue en 0.

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}, \text{ et } f^{(n)}(0) = 0 \text{ pour tout } n}$$

3. Pour tout réel x, on a $x > 0$ ou $1 - x > 0$, donc $f(x) + f(1-x) > 0$: la fonction g est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, comme quotient. Pour $x \leqslant 0$, $f(x) = 0$, donc $g(x) = 0$; pour $x \geqslant 1$, $f(1-x) = 0$, donc $g(x) = 1$.

$$\boxed{g(x) = \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)} \text{ convient}}$$

4. La fonction $h : x \mapsto f(x-a)\,f(b-x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, strictement positive sur $]a,b[$, et nulle en dehors, puisque l'un des deux facteurs s'y annule. $\boxed{h \text{ convient.}}$



La fonction f, en bleu, quitte l'axe des abscisses en 0 de façon si plate qu'aucune dérivée ne le détecte, et la fonction g, en ocre, réalise un passage de 0 à 1 sans aucun point anguleux, contrairement à une fonction affine par morceaux.

EXERCICE 31 ⋆⋆⋆

1. On a $f_0'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, donc $f_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$. Puis

$$f_1'(x) = \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3}, \qquad \text{donc} \qquad \boxed{f_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad f_2(x) = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}}$$

2. On raisonne par récurrence, avec $P_0 = 1$. Si $f_n = \frac{P_n}{(1-x)^{n+1}}$, alors

$$f_n' = \frac{P_n'}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(n+1)P_n}{(1-x)^{n+2}} = \frac{(1-x)P_n' + (n+1)P_n}{(1-x)^{n+2}},$$

donc $f_{n+1} = \frac{P_{n+1}}{(1-x)^{n+2}}$ avec

$$\boxed{P_{n+1} = x\big((1-x)P_n' + (n+1)P_n\big)}$$

Écrivons $P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k$, avec $p_k \in \mathbb{N}$ et $p_n = 1$. Le coefficient de x^{k+1} dans P_{n+1} provient des termes $x \cdot (k+1)p_{k+1}x^k$, $-x \cdot x \cdot kp_k x^{k-1}$ et $x \cdot (n+1)p_k x^k$; il vaut

$$(k+1)p_{k+1} + (n+1-k)p_k,$$

avec la convention $p_{n+1} = 0$. C'est un entier naturel, puisque $k \leqslant n$. Le terme constant de P_{n+1} est nul, et le coefficient de x^{n+1} vaut $(n+1-n)p_n = 1$: P_{n+1} est de degré $n+1$, de coefficient dominant 1, à coefficients entiers naturels.

3. Pour $x \in]0\,,1[$, tous les termes de $P_n(x)$ sont positifs, et le terme dominant vaut $x^n > 0$, donc $P_n(x) > 0$. Comme $(1-x)^{n+1} > 0$, on a $\boxed{f_n > 0 \text{ sur }]0\,,1[}$.

On trouve $P_3 = x + 4x^2 + x^3$ et $P_4 = x + 11x^2 + 11x^3 + x^4$. Ces coefficients symétriques sont les *nombres eulériens*, qui comptent les permutations de $[\![1\,;n]\!]$ selon leur nombre de montées ; la somme des coefficients de P_n vaut d'ailleurs $n!$, comme on le vérifie sur ces exemples.

EXERCICE 32 ⋆⋆⋆

1. La fonction $h : x \mapsto \mathrm{e}^x(f'(x) - f(x))$ est dérivable sur $[a\,,b]$, puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$, et

$$h'(x) = \mathrm{e}^x(f'(x) - f(x)) + \mathrm{e}^x(f''(x) - f'(x)) = \mathrm{e}^x(f''(x) - f(x)).$$

Les hypothèses donnent $h(a) = h(b) = 0$. Le théorème de Rolle fournit $c \in]a\,,b[$ tel que $h'(c) = 0$, et comme $\mathrm{e}^c \neq 0$,

$$\boxed{f''(c) = f(c) \text{ pour un } c \in]a\,,b[}$$

Le facteur e^x est choisi pour que h' fasse apparaître $f'' - f$: c'est le facteur intégrant des équations différentielles du chapitre 6, appliqué à $y' - y$.

2. On construit par récurrence des réels $b = c_0 > c_1 > \cdots > c_n > a$ tels que $f^{(k)}(c_k) = 0$. On pose $c_0 = b$. Si c_k est construit, avec $k \leqslant n-1$, la fonction $f^{(k)}$ est dérivable sur $[a\,,c_k]$ et vérifie $f^{(k)}(a) = 0 = f^{(k)}(c_k)$. Le théorème de Rolle fournit $c_{k+1} \in]a\,,c_k[$ tel que $f^{(k+1)}(c_{k+1}) = 0$. Pour $k = n$, on obtient

$$\boxed{f^{(n)}(c) = 0 \text{ avec } c = c_n \in]a\,,b[}$$

À chaque étape, on utilise un nouveau zéro en a : c'est pourquoi il faut que f et ses $n-1$ premières dérivées s'annulent en a.

Fonctions à valeurs complexes

EXERCICE 33 ⋆

On a $f = \mathrm{Im}(\varphi)$ avec $\varphi(x) = \mathrm{e}^{x\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^{(\sqrt{3}+\mathrm{i})x}$. Par la proposition 5, $\varphi^{(n)}(x) = (\sqrt{3}+\mathrm{i})^n\mathrm{e}^{(\sqrt{3}+\mathrm{i})x}$, et la dérivation commute avec la partie imaginaire. Or $\sqrt{3}+\mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$, donc

$$\varphi^{(n)}(x) = 2^n\mathrm{e}^{x\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+n\pi/6)}, \qquad \text{et} \qquad \boxed{f^{(n)}(x) = 2^n\mathrm{e}^{x\sqrt{3}}\sin\Big(x + \frac{n\pi}{6}\Big)}$$

Sans les nombres complexes. Pour tout réel θ, la dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{x\sqrt{3}}\sin(x+\theta)$ est

$$\mathrm{e}^{x\sqrt{3}}\big(\sqrt{3}\sin(x+\theta) + \cos(x+\theta)\big) = 2\mathrm{e}^{x\sqrt{3}}\Big(\cos\frac{\pi}{6}\sin(x+\theta) + \sin\frac{\pi}{6}\cos(x+\theta)\Big) = 2\mathrm{e}^{x\sqrt{3}}\sin\Big(x+\theta+\frac{\pi}{6}\Big),$$

et une récurrence immédiate conclut. Chaque dérivation multiplie l'amplitude par le module 2 de $\sqrt{3}+\mathrm{i}$ et décale la phase de son argument $\frac{\pi}{6}$.

EXERCICE 34 ⋆⋆

1. La fonction $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $|\varphi'(t)| = |\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}| = 1$. L'inégalité des accroissements finis pour les fonctions à valeurs complexes (proposition 6) donne

$$\boxed{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}s}| \leqslant |t - s|}$$

Le membre de gauche est la longueur de la corde joignant les points du cercle unité d'angles s et t, le membre de droite la longueur d'un arc qui les joint : la corde est plus courte que l'arc.

2. Soit $T > 0$ une période de f. La fonction réelle $|f'|$ est continue sur le segment $[0\,,T]$: elle y atteint sa borne supérieure M (chapitre 8). Par T-périodicité de f' (exercice 6), elle est bornée par M sur $\mathbb{R}$. La proposition 6 donne alors $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$ pour tous réels x et y.

$$\boxed{f \text{ est } M\text{-lipschitzienne, avec } M = \max_{[0,T]} |f'|}$$

3. On a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} - \mathrm{e}^0 = -2$. S'il existait $c \in]0\,,\pi[$ tel que $-2 = \pi\varphi'(c) = \mathrm{i}\pi\mathrm{e}^{\mathrm{i}c}$, on aurait en prenant les modules $2 = \pi$, ce qui est faux.

$$\boxed{\text{aucun } c \in]0\,,\pi[\text{ ne vérifie } \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} - 1 = \pi\,\varphi'(c)}$$

Sur $[0\,,2\pi]$, l'échec est encore plus visible, puisque le membre de gauche est nul alors que $|\varphi'| = 1$. Le contre-exemple ne vient donc pas de la périodicité : c'est la proposition 6, et non le théorème des accroissements finis, qui s'étend aux fonctions complexes.

FONCTIONS CONVEXES

EXERCICE 35 ⋆

(a) La fonction $\varphi : x \mapsto (1+x)^n$ est deux fois dérivable sur $[-1\,,+\infty[$, avec

$$\varphi''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} \geqslant 0 :$$

elle est convexe (théorème 11). Sa courbe est au-dessus de sa tangente en 0, d'équation $y = 1 + nx$ (théorème 10).

$$\boxed{(1+x)^n \geqslant 1 + nx \text{ pour } x \geqslant -1}$$

(b) À λ fixé, $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ est convexe, de dérivée seconde $\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda x} \geqslant 0$. On écrit $x \in [-1\,,1]$ sous la forme $x = (1-\mu)(-1) + \mu \cdot 1$, avec $\mu = \frac{1+x}{2} \in [0\,,1]$. La définition de la convexité donne

$$\mathrm{e}^{\lambda x} \leqslant \frac{1-x}{2}\,\mathrm{e}^{-\lambda} + \frac{1+x}{2}\,\mathrm{e}^{\lambda} = \frac{\mathrm{e}^{\lambda} + \mathrm{e}^{-\lambda}}{2} + x\,\frac{\mathrm{e}^{\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda}}{2},$$

$$\boxed{\mathrm{e}^{\lambda x} \leqslant \operatorname{ch}\lambda + x \operatorname{sh}\lambda \text{ pour } x \in [-1\,,1]}$$

Le membre de droite est l'ordonnée sur la corde joignant les points d'abscisses -1 et 1.

(c) Par concavité de ln, $\ln\frac{a+b}{2} \geqslant \frac{1}{2}\ln a + \frac{1}{2}\ln b = \ln\sqrt{ab}$, et la croissance de exp donne $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$. On applique ce résultat à $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$: $\frac{1}{\sqrt{ab}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$, et l'on passe aux inverses.

$$\boxed{\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}}$$

La moyenne harmonique est inférieure à la moyenne géométrique, elle-même inférieure à la moyenne arithmétique.

(d) La fonction cos est concave sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$, où $\cos'' = -\cos \leqslant 0$. Sa courbe est au-dessus de sa corde joignant $(0,1)$ à $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, d'équation $y = 1 - \frac{2x}{\pi}$.

$$\boxed{\cos x \geqslant 1 - \frac{2x}{\pi} \text{ sur } \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]}$$

C'est l'inégalité de Jordan du cours, après le changement de variable $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$.

EXERCICE 36 ⋆⋆

1. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, avec

$$\varphi'(t) = -\frac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}, \qquad \varphi''(t) = \frac{\mathrm{e}^t(\mathrm{e}^t-1)}{(1+\mathrm{e}^t)^3}.$$

Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est concave sur }]-\infty\,,0] \text{ et convexe sur } [0\,,+\infty[}$, avec un point d'inflexion en $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ (proposition 10).

Soit $x_1,\dots,x_n \geqslant 1$ et $t_k = \ln x_k \geqslant 0$. L'inégalité de Jensen (proposition 7) pour φ, convexe sur $[0\,,+\infty[$, avec les coefficients $\frac{1}{n}$, donne

$$\varphi\Big(\frac{t_1+\cdots+t_n}{n}\Big) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \varphi(t_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+x_k}.$$

Or $\exp\left(\frac{t_1+\cdots+t_n}{n}\right) = \sqrt[n]{x_1\cdots x_n}$, d'où

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+x_k} \geqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}}}$$

Piège. L'hypothèse $x_k \geqslant 1$ est indispensable : elle place les t_k dans l'intervalle où φ est convexe. Pour $n=2$, $x_1 = \frac{1}{100}$ et $x_2 = 1$, l'inégalité est fausse : le membre de gauche vaut environ 1,490, et le membre de droite $\frac{2}{1+0{,}1} \approx 1{,}818$.

2. Par l'inégalité arithmético-géométrique, démontrée dans le cours par la concavité de ln,

$$\frac{1}{n}\Big(\frac{x_1}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}\Big) \geqslant \sqrt[n]{\frac{x_1}{x_2}\cdots\frac{x_{n-1}}{x_n}\cdot\frac{x_n}{x_1}} = 1.$$

$$\boxed{\frac{x_1}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1} \geqslant n}$$

Le produit télescopique vaut 1 : c'est ce qui rend la moyenne géométrique si simple ici.

EXERCICE 37 ⋆⋆

1. On a $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ et $f''(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} > 0$: $\boxed{f \text{ est convexe sur } \mathbb{R}}$.

2. On pose $t_k = \ln x_k$. L'inégalité de Jensen avec les coefficients $\frac{1}{n}$ donne

$$\ln\Big(1+\exp\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n t_k\Big)\Big) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln(1+x_k) = \ln\Big(\prod_{k=1}^n (1+x_k)\Big)^{1/n}.$$

Comme $\exp\left(\frac{1}{n}\sum t_k\right) = \left(\prod x_k\right)^{1/n}$, la croissance de exp donne

$$\boxed{1+\Big(\prod_{k=1}^n x_k\Big)^{1/n} \leqslant \Big(\prod_{k=1}^n (1+x_k)\Big)^{1/n}}$$

3. On applique la question 2 à $x_k = \frac{b_k}{a_k}$, puis on multiplie par $\left(\prod a_k\right)^{1/n}$:

$$\Big(\prod_{k=1}^n a_k\Big)^{1/n}\Big(1+\Big(\prod_{k=1}^n \frac{b_k}{a_k}\Big)^{1/n}\Big) \leqslant \Big(\prod_{k=1}^n a_k\Big)^{1/n}\Big(\prod_{k=1}^n \frac{a_k+b_k}{a_k}\Big)^{1/n},$$

$$\boxed{\Big(\prod_{k=1}^n a_k\Big)^{1/n} + \Big(\prod_{k=1}^n b_k\Big)^{1/n} \leqslant \Big(\prod_{k=1}^n (a_k+b_k)\Big)^{1/n}}$$

C'est une inégalité triangulaire renversée pour la moyenne géométrique : la moyenne d'une somme dépasse la somme des moyennes.

EXERCICE 38 ⋆⋆

1. Soit x, $y \in I$ et $\lambda \in [0\,,1]$. Par convexité de f, $f((1-\lambda)x+\lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$, et ce dernier réel est dans J, qui est un intervalle contenant $f(x)$ et $f(y)$. La croissance de g, puis sa convexité, donnent

$$g(f((1-\lambda)x+\lambda y)) \leqslant g((1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)) \leqslant (1-\lambda)g(f(x))+\lambda g(f(y)).$$

$$\boxed{g\circ f \text{ est convexe}}$$

L'hypothèse de croissance est utile : avec $f(x)=x^2$ et $g(t)=-t$, convexe car affine, mais décroissante, $g\circ f=-x^2$ est concave et non convexe. Ainsi e^f est convexe dès que f l'est, mais pas $\frac{1}{f}$ en général.

2. Soit $h=\max(f,g)$. Avec les mêmes notations,

$$f\big((1-\lambda)x+\lambda y\big) \leqslant (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y) \leqslant (1-\lambda)h(x)+\lambda h(y),$$

et de même pour g ; le maximum des deux membres de gauche vérifie donc la même inégalité : $\boxed{\max(f,g) \text{ est convexe}}$. En revanche, $\min(f,g)$ et fg ne le sont pas en général : avec $f(x)=x$ et $g(x)=-x$, on obtient $\min(f,g)=-|x|$, qui est concave ; avec $f(x)=x$ et $g(x)=x^2$, on obtient x^3, qui n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$. $\boxed{\min(f,g) \text{ et } fg \text{ ne sont pas convexes en général.}}$

3. L'ensemble $f(I)$ est un intervalle, par le théorème des valeurs intermédiaires, et f^{-1} est strictement croissante. Soit u, $v \in f(I)$, $x=f^{-1}(u)$, $y=f^{-1}(v)$ et $\lambda \in [0\,,1]$. Par convexité de f,

$$f\big((1-\lambda)x+\lambda y\big) \leqslant (1-\lambda)u+\lambda v,$$

et l'on applique la fonction croissante f^{-1} :

$$(1-\lambda)f^{-1}(u)+\lambda f^{-1}(v) \leqslant f^{-1}\big((1-\lambda)u+\lambda v\big).$$

$$\boxed{f^{-1} \text{ est concave sur } f(I)}$$

C'est la situation de exp, convexe et croissante, et de ln, concave : la symétrie par rapport à la première bissectrice échange le dessus et le dessous des cordes. Si f était convexe et décroissante, f^{-1} serait convexe, comme le montre $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0\,,+\infty[$.

EXERCICE 39 ⋆⋆

1. Soit $\eta>0$ tel que $f(a) \leqslant f(x)$ pour $|x-a|<\eta$, et y un réel distinct de a. Pour $\lambda \in]0\,,1]$ assez petit, le point $x=(1-\lambda)a+\lambda y$ vérifie $|x-a|=\lambda|y-a|<\eta$, donc

$$f(a) \leqslant f(x) \leqslant (1-\lambda)f(a)+\lambda f(y), \qquad \text{d'où} \qquad \lambda f(a) \leqslant \lambda f(y).$$

On divise par $\lambda>0$: $\boxed{f(a) \leqslant f(y) \text{ pour tout } y, \text{ le minimum est global}}$.

Pour un maximum local en a, avec $f(a) \geqslant f(x)$ pour $|x-a|<\eta$, on écrit, pour $0<h<\eta$, que a est le milieu de $a-h$ et $a+h$:

$$f(a) \leqslant \frac{f(a-h)+f(a+h)}{2} \leqslant f(a).$$

Les deux valeurs $f(a\pm h)$ sont inférieures à $f(a)$ et de moyenne au moins $f(a)$: elles sont égales à $f(a)$. Ainsi $\boxed{f \text{ est constante au voisinage de } a}$, mais ce maximum n'est pas nécessairement global : $x \mapsto \max(0,x)$, convexe par l'exercice 38, a un maximum local en -1, qui n'est pas global.

2. Supposons f croissante et non constante : il existe $x<y$ tels que $f(x)<f(y)$, et la pente $s=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ est strictement positive. Par la proposition 9, la courbe est au-dessus de la sécante (xy) en dehors de $[x\,,y]$: pour $t>y$, $f(t) \geqslant f(y)+s(t-y)$, qui tend vers $+\infty$.

$$\boxed{f \text{ est constante, ou } \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$$

3. Montrons que f est décroissante. Sinon, il existe $x < y$ tels que $f(x) < f(y)$, et l'argument de la question 2, qui n'utilisait que cette inégalité, donne $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi f est décroissante, et pour tout réel x, $f(x) \geqslant \lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

$$\boxed{f \text{ est décroissante et positive}}$$

Une fonction convexe qui tend vers 0 en $+\infty$ y arrive donc par valeurs supérieures, en décroissant, comme $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.

4. La fonction $g : x \mapsto f(x) - \alpha x - \beta$ est convexe, comme somme d'une fonction convexe et d'une fonction affine, et tend vers 0 en $+\infty$ par définition de l'asymptote. Par la question 3, $g \geqslant 0$:

$$\boxed{\text{la courbe de } f \text{ est au-dessus de son asymptote en } +\infty}$$

Par exemple, la courbe de $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est au-dessus de son asymptote $y = x$ en $+\infty$.

EXERCICE 40 ⋆⋆

1. La fonction $|f''|$ est continue sur le segment $[a\,,b]$: elle y est bornée et atteint sa borne supérieure M (chapitre 8). La fonction $q : x \mapsto (x-a)(b-x)$ a pour dérivée seconde -2, donc

$$g'' = f'' + M \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad h'' = f'' - M \leqslant 0.$$

Par le théorème 11, $\boxed{g \text{ est convexe et } h \text{ est concave}}$.

2. On a $g(a) = g(b) = 0$, et la courbe de la fonction convexe g est au-dessous de sa corde joignant ces deux points, qui est le segment $[a\,,b]$ de l'axe des abscisses : $g \leqslant 0$. De même, $h(a) = h(b) = 0$ et h est concave, donc $h \geqslant 0$. Ces deux inégalités s'écrivent

$$\boxed{|f(x)| \leqslant \frac{M}{2}(x-a)(b-x) \text{ pour } x \in [a\,,b]}$$

Le maximum de $(x-a)(b-x)$ est atteint au milieu $\frac{a+b}{2}$, où il vaut $\frac{(b-a)^2}{4}$, d'où

$$\boxed{|f| \leqslant \frac{M(b-a)^2}{8}}$$

La majoration est optimale : pour $f(x) = (x-a)(b-x)$, on a $M = 2$, et l'inégalité est une égalité au milieu du segment. Cette estimation sera utilisée pour majorer l'erreur commise lorsqu'on remplace une fonction par son interpolation affine.

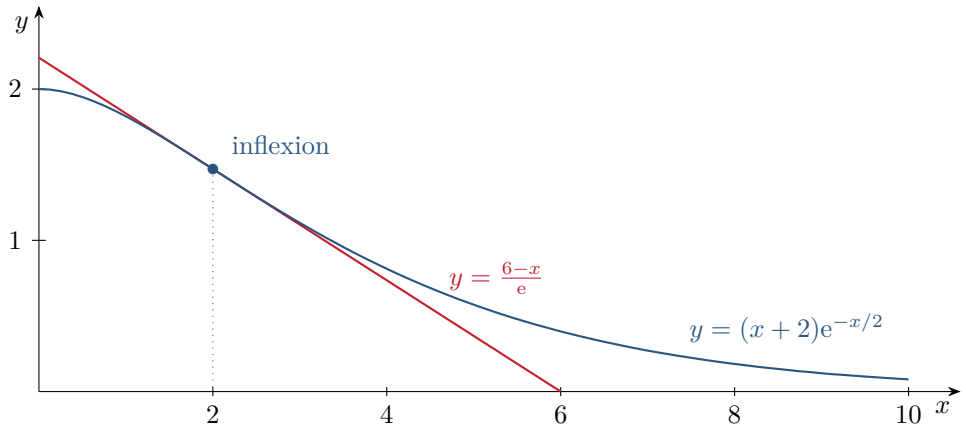
EXERCICE 41 ⋆⋆

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0\,,+\infty[$, et

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x/2}\Big(1 - \frac{x+2}{2}\Big) = -\frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{-x/2}, \qquad f''(x) = \mathrm{e}^{-x/2}\Big(-\frac{1}{2} + \frac{x}{4}\Big) = \frac{x-2}{4}\,\mathrm{e}^{-x/2}.$$

La fonction f est donc décroissante sur $[0\,,+\infty[$, de $f(0) = 2$ vers 0, par croissances comparées. Elle est concave sur $[0\,,2]$ et convexe sur $[2\,,+\infty[$. Comme f'' s'annule en 2 en changeant de signe, le point d'abscisse 2 est un point d'inflexion, d'après la réciproque de la proposition 10. On a $f(2) = \frac{4}{\mathrm{e}} \approx 1{,}47$ et $f'(2) = -\frac{1}{\mathrm{e}}$, d'où la tangente $y = \frac{4}{\mathrm{e}} - \frac{x-2}{\mathrm{e}}$.

$$\boxed{\text{point d'inflexion } \big(2, \tfrac{4}{\mathrm{e}}\big), \text{ de tangente } y = \frac{6-x}{\mathrm{e}}}$$



La courbe bleue est au-dessous de sa tangente rouge avant 2, où elle est concave, et au-dessus après, où elle est convexe : elle la traverse au point d'inflexion.

2. La vitesse de baisse de la concentration est $|f'(x)| = \frac{x}{2}e^{-x/2}$. Sa dérivée est $-f''(x)$, positive sur $[0\,,2]$ et négative ensuite : la baisse s'accélère pendant deux heures, puis ralentit.

la baisse commence à ralentir au bout de deux heures

C'est exactement l'abscisse du point d'inflexion : la pente f', croissante sur la partie convexe et décroissante sur la partie concave, y atteint son minimum, c'est-à-dire la baisse la plus rapide, égale à $\frac{1}{e} \approx 0{,}37$ unité par heure.

3. Soit $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, avec $\alpha \neq 0$. On a $P''(x) = 6\alpha x + 2\beta$, qui s'annule uniquement en $a = -\frac{\beta}{3\alpha}$, en changeant de signe. Par la réciproque de la proposition 10, le point $A = (a, P(a))$ est un point d'inflexion, et c'est le seul, puisque tout point d'inflexion annule P''. Développons ensuite $P(a+t)$ par la formule du binôme : c'est un polynôme de degré 3 en t, qu'on écrit $\alpha t^3 + bt^2 + ct + P(a)$. Sa dérivée seconde en $t = 0$ vaut $2b$, et aussi $P''(a) = 0$, donc $b = 0$. Ainsi

$$P(a+t) = \alpha t^3 + ct + P(a), \qquad \text{d'où} \qquad P(a+t) + P(a-t) = 2P(a) \text{ pour tout } t.$$

la courbe d'un polynôme de degré 3 a un unique point d'inflexion A, dont elle est symétrique

L'égalité obtenue dit que A est le milieu des points d'abscisses $a+t$ et $a-t$ de la courbe.

EXERCICE 42 ⋆⋆

1. Supposons $\mu \geqslant 0$, et soit $x \in]a_2\,, b]$. Le lemme des trois pentes (proposition 8), appliqué à $a_1 < a_2 < x$, donne

$$\frac{f(x) - f(a_2)}{x - a_2} \geqslant \frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1} = \mu \geqslant 0,$$

donc $f(x) \geqslant f(a_2)$. La fonction continue f atteint son minimum sur le segment $[a\,, a_2]$ en un point c (chapitre 8), et $f(c) \leqslant f(a_2) \leqslant f(x)$ pour tout $x > a_2$: c réalise le minimum sur $[a\,, b]$. Si $\mu \leqslant 0$, le lemme appliqué à $x < a_1 < a_2$ donne de même $\frac{f(a_1)-f(x)}{a_1-x} \leqslant \mu \leqslant 0$, donc $f(x) \geqslant f(a_1)$ pour $x < a_1$, et le minimum est atteint sur $[a_1\,, b]$.

$\mu \geqslant 0$: minimum sur $[a\,, a_2]$; $\quad \mu \leqslant 0$: minimum sur $[a_1\,, b]$

2. À chaque étape, on élimine un tiers du segment, et l'amplitude est multipliée par $\frac{2}{3}$. Le signe de μ est celui de $f(a_2) - f(a_1)$:

```
def trichotomie(f, a, b, eps):
    n = 0                              # nombre d'etapes
    while b - a >= eps:
        a1 = (2*a + b) / 3
        a2 = (a + 2*b) / 3
```

```
        if f(a2) >= f(a1):        # mu >= 0 : minimum dans [a, a2]
            b = a2
        else:                     # mu < 0 : minimum dans [a1, b]
            a = a1
        n += 1
    return a, b, n
```

L'invariant de boucle est « f atteint son minimum sur $[a\,,b]$ en un point du segment courant », conservé d'après la question 1, et la boucle termine puisque l'amplitude tend vers 0.

3. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x + x^2$ est convexe, de dérivée seconde $\mathrm{e}^x + 2 > 0$. Après n étapes, l'amplitude vaut $\left(\frac{2}{3}\right)^n$, et

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n < 10^{-6} \iff n > \frac{6\ln 10}{\ln 3 - \ln 2} \approx 34{,}07.$$

$$\boxed{35 \text{ étapes}}$$

L'appel `trichotomie(lambda x: exp(x) + x**2, -1, 0, 1e-6)` renvoie bien 35 étapes et un encadrement de $-0{,}351734$, qui est la solution de $\mathrm{e}^x + 2x = 0$, où s'annule la dérivée. La dichotomie du chapitre 8 aurait demandé 20 étapes : la trichotomie, qui n'élimine qu'un tiers à chaque fois, est plus lente, mais elle ne demande pas de connaître la dérivée.

EXERCICE 43 ⋆⋆⋆

1. Notons $z_k = (1-\frac{k}{2^n})x + \frac{k}{2^n}y$; l'inégalité à établir est $f(z_k) \leqslant (1-\frac{k}{2^n})f(x) + \frac{k}{2^n}f(y)$. Pour $n = 0$, les seules valeurs sont $k = 0$ et $k = 1$, qui donnent les égalités $f(x) = f(x)$ et $f(y) = f(y)$. Supposons la propriété vraie au rang n, et soit $k \in [\![0\,;2^{n+1}]\!]$.

— Si $k = 2j$ est pair, alors $\frac{k}{2^{n+1}} = \frac{j}{2^n}$ avec $j \in [\![0\,;2^n]\!]$, et c'est l'hypothèse de récurrence.

— Si $k = 2j+1$ est impair, avec $0 \leqslant j < 2^n$, le point de rang $n+1$ associé à k est le milieu des points de rang n associés à j et $j+1$. L'hypothèse sur f, puis l'hypothèse de récurrence pour j et $j+1$, donnent une majoration par la moyenne des deux membres de droite, qui vaut

$$\Big(1 - \frac{2j+1}{2^{n+1}}\Big)f(x) + \frac{2j+1}{2^{n+1}}\,f(y).$$

$$\boxed{\text{l'inégalité de convexité est vraie pour tout } \lambda = \tfrac{k}{2^n} \in [0\,,1]}$$

2. Soit $\lambda \in [0\,,1]$, et $k_n = \lfloor 2^n\lambda \rfloor \in [\![0\,;2^n]\!]$. On a $0 \leqslant \lambda - \frac{k_n}{2^n} < \frac{1}{2^n}$, donc $\lambda_n = \frac{k_n}{2^n}$ tend vers λ : c'est la suite des approximations dyadiques du chapitre 7. On écrit la question 1 avec λ_n :

$$f\big((1-\lambda_n)x + \lambda_n y\big) \leqslant (1-\lambda_n)f(x) + \lambda_n f(y).$$

Quand n tend vers $+\infty$, le membre de gauche tend vers $f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big)$ par continuité de f, et l'inégalité passe à la limite.

$$\boxed{f \text{ est convexe}}$$

À retenir. Sans l'hypothèse de continuité, le résultat est faux, mais les contre-exemples sont des fonctions très irrégulières, dont la construction repose sur l'axiome du choix : aucun ne peut être écrit explicitement.

EXERCICE 44 ⋆⋆⋆

1. D'après le lemme des trois pentes, τ_a est croissante sur $I \setminus \{a\}$. Pour $x \in [u\,,v] \setminus \{a\}$, on a donc $\tau_a(u) \leqslant \tau_a(x) \leqslant \tau_a(v)$.

$$\boxed{|\tau_a| \leqslant K = \max\left(|\tau_a(u)|, |\tau_a(v)|\right) \text{ sur } [u\,,v] \setminus \{a\}}$$

Il est essentiel que a soit intérieur à I pour trouver u et v de part et d'autre : c'est là que sert l'hypothèse d'intervalle ouvert.

2. Pour $x \in [u\,,v]$, on a $|f(x)-f(a)| \leqslant K|x-a|$, qui tend vers 0 : f est continue en a. Sur $]a\,,v]$, la fonction τ_a est croissante et minorée par $\tau_a(u)$; par le théorème de la limite monotone du chapitre 8, elle admet en a^+ une limite finie, égale à sa borne inférieure. De même, sur $[u\,,a[$, elle est croissante et majorée par $\tau_a(v)$, et admet en a^- une limite finie, égale à sa borne supérieure. Ainsi f est dérivable à gauche et à droite en a. Enfin, pour $x < a < y$, on a $\tau_a(x) \leqslant \tau_a(y)$, et le passage à la limite donne $f'_g(a) \leqslant f'_d(a)$.

$$\boxed{f \text{ est continue en } a, \text{ dérivable à gauche et à droite, avec } f'_g(a) \leqslant f'_d(a)}$$

L'inégalité peut être stricte : pour $x \mapsto |x|$ en 0, on a $f'_g(0) = -1 < 1 = f'_d(0)$. Une fonction convexe peut avoir des points anguleux, mais toujours « vers le bas ».

3. Soit f définie sur $[0\,,1]$ par $f(0) = f(1) = 1$ et $f(x) = 0$ pour $0 < x < 1$. Pour $x < y$ dans $[0\,,1]$ et $\lambda \in]0\,,1[$, le point $(1-\lambda)x + \lambda y$ est dans $]0\,,1[$, où f est nulle, et le membre de droite de l'inégalité de convexité est positif ; pour $\lambda \in \{0,1\}$ ou $x = y$, l'inégalité est une égalité. Ainsi

$$\boxed{f \text{ est convexe sur } [0\,,1] \text{ mais discontinue en 0 et en 1}}$$

Aux extrémités, une fonction convexe ne peut que « sauter vers le haut ».

EXERCICE 45 ⋆⋆⋆

1. Par concavité de ln avec les coefficients $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{q}$, de somme 1,

$$\ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) \geqslant \frac{1}{p}\ln(x^p) + \frac{1}{q}\ln(y^q) = \ln x + \ln y = \ln(xy),$$

et la croissance de exp conclut.

$$\boxed{xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}}$$

2. On applique la question 1 à chaque couple (a_i, b_i) et l'on somme :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \frac{1}{p}\sum_{i=1}^n a_i^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^n b_i^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant 1}$$

3. On pose

$$A = \Big(\sum_{i=1}^n a_i^p\Big)^{1/p} > 0 \qquad \text{et} \qquad B = \Big(\sum_{i=1}^n b_i^q\Big)^{1/q} > 0.$$

Les réels $\frac{a_i}{A}$ et $\frac{b_i}{B}$ vérifient $\sum\left(\frac{a_i}{A}\right)^p = \sum\left(\frac{b_i}{B}\right)^q = 1$, et la question 2 donne $\sum \frac{a_i b_i}{AB} \leqslant 1$, soit

$$\boxed{\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \Big(\sum_{i=1}^n a_i^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{i=1}^n b_i^q\Big)^{1/q}}$$

Pour $p = q = 2$, on obtient $\sum a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum a_i^2}\sqrt{\sum b_i^2}$: c'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que le chapitre sur les espaces préhilbertiens démontrera par une autre voie.

À retenir. La normalisation de la question 3 est un procédé classique : on démontre d'abord une inégalité homogène dans un cas normalisé, puis on se ramène à ce cas en divisant par la bonne quantité.

EXERCICE 46 ⋆⋆⋆

Notons $g(x) = xf(x)$ et $k(x) = f(\frac{1}{x})$, deux fois dérivables sur $]0\,,+\infty[$. On a

$$g''(y) = 2f'(y) + yf''(y), \qquad k'(x) = -\frac{1}{x^2}f'\Big(\frac{1}{x}\Big), \qquad k''(x) = \frac{2}{x^3}f'\Big(\frac{1}{x}\Big) + \frac{1}{x^4}f''\Big(\frac{1}{x}\Big).$$

En comparant avec $g''(\frac{1}{x}) = 2f'(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x}f''(\frac{1}{x})$, on obtient la relation

$$\boxed{k''(x) = \frac{1}{x^3}\,g''\Big(\frac{1}{x}\Big) \text{ pour tout } x > 0}$$

Comme $x^3 > 0$ et que $x \mapsto \frac{1}{x}$ est une bijection de $]0\,,+\infty[$ sur lui-même, k'' est positive sur $]0\,,+\infty[$ si et seulement si g'' l'est. Le théorème 11 conclut : $x \mapsto xf(x)$ est convexe si et seulement si $x \mapsto f(\frac{1}{x})$ l'est.

Application. Pour $f = \ln$, on a $g(x) = x\ln x$, de dérivée seconde $\frac{1}{x} > 0$, donc convexe, et $k(x) = \ln\frac{1}{x} = -\ln x$. L'équivalence montre que la convexité de $x \mapsto x\ln x$ et celle de $x \mapsto -\ln x$, c'est-à-dire la concavité de ln, sont une seule et même propriété.

Exercices de synthèse

EXERCICE 47 ⋆⋆

1. Faux. La fonction $f : x \mapsto x^2\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$, qui vaut x^2 sur $\mathbb{Q}$ et 0 ailleurs, vérifie $|\frac{f(x)-f(0)}{x}| \leqslant |x|$: elle est dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$. Mais elle n'est continue en aucun point $a \neq 0$: par densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (chapitre 7), il existe des suites de rationnels et d'irrationnels tendant vers a, le long desquelles f tend vers a^2 et vers 0 respectivement. La dérivabilité en un point n'apporte rien au voisinage de ce point.

2. Vrai. C'est le théorème 8, de la limite de la dérivée. L'hypothèse de continuité en a est indispensable : la fonction indicatrice de $]0\,,+\infty[$ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}^*$, mais elle n'est pas dérivable en 0.

3. Vrai. Si $|f'| \leqslant M$, l'inégalité des accroissements finis donne $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|$: f est lipschitzienne, donc uniformément continue (chapitre 8), avec $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ si $M > 0$.

4. Faux. La fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée s'annule en 0. Le théorème 7 donne seulement $f' \geqslant 0$; la stricte croissance autorise des zéros isolés de la dérivée.

5. Vrai. C'est l'exercice 6 : on dérive l'égalité $f(-x) = f(x)$.

6. Faux. Soit $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Elle tend vers 0 en $+\infty$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et en 0, puisque $\frac{f(x)}{x} = \frac{\sin(x^2)}{x^2}$ tend vers 1. Pour $x \neq 0$, $f'(x) = 2\cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2}$, qui vaut 2 en $x = \sqrt{2n\pi}$: f' ne tend pas vers 0. Une fonction peut tendre vers 0 en oscillant de plus en plus vite.

7. Vrai. Par le théorème 10, la courbe de f est au-dessus de sa tangente en a, qui est horizontale : $f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x-a) = f(a)$ pour tout x. Pour une fonction convexe dérivable, la condition nécessaire de la proposition 2 devient suffisante.

8. Faux. Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ sont convexes, mais leur produit $x \mapsto x^3$ ne l'est pas, puisque sa dérivée seconde $6x$ est négative sur $]-\infty\,,0[$.

9. Vrai. Si $f'' > 0$, la dérivée f' est strictement croissante (théorème 7), donc injective : elle s'annule au plus une fois.

10. Vrai. Une fonction dérivable sur $[a\,,b]$ y est continue (proposition 1), et dérivable sur $]a\,,b[$: ce sont les hypothèses du théorème de Rolle, et même un peu plus.

$$\boxed{\text{vrais : } 2,3,5,7,9,10; \quad \text{faux : } 1,4,6,8}$$

EXERCICE 48 ⋆⋆

1. Sur $\mathbb{R}^*$, la fonction f est dérivable comme somme, produit et composée de fonctions dérivables (théorèmes 1 et 2). La dérivée de $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ étant $x \mapsto -\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$, on obtient, pour $x \neq 0$,

$$\boxed{f'(x) = 1 + 4x\sin\frac{1}{x} - 2\cos\frac{1}{x}}$$

En 0, on revient au taux d'accroissement : pour $x \neq 0$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = 1 + 2x\sin\frac{1}{x}, \qquad \text{avec} \qquad \left|2x\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant 2|x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}, \text{ et } f'(0) = 1}$$

2. Pour $0 < |x| < \frac{1}{2}$, l'encadrement précédent donne

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + 2x\sin\frac{1}{x} \geqslant 1 - 2|x| > 0,$$

donc $f(x)$ est du signe de x, et l'on a $f(x) < f(0) < f(y)$ dès que $-\frac{1}{2} < x < 0 < y < \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\eta = \tfrac{1}{2} \text{ convient}}$$

La fonction est « croissante au point 0 », au sens où elle y sépare les valeurs plus petites et plus grandes ; c'est tout ce que dit le signe de $f'(0)$.

3. Comme $\sin(2k\pi) = 0$ et $\cos(2k\pi) = 1$, la formule de la question 1 donne

$$\boxed{f'\Big(\frac{1}{2k\pi}\Big) = 1 - 2 = -1}$$

Soit $\eta > 0$. On choisit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_k = \frac{1}{2k\pi} < \eta$. La fonction f' est continue sur $\mathbb{R}^*$, d'après sa formule, et $f'(x_k) < 0$: il existe donc un segment $[x_k - r\,,x_k + r]$, contenu dans $]0\,,\eta[$, sur lequel $f' < 0$, et f y est strictement décroissante par le théorème 7. Ainsi f n'est pas croissante sur $]-\eta\,,\eta[$. Elle n'y est pas non plus décroissante, puisqu'une fonction décroissante a une dérivée négative (théorème 7) alors que $f'(0) = 1$.

$$\boxed{f \text{ n'est monotone sur aucun intervalle }]-\eta\,,\eta[}$$

4. Comme g' est continue en a et que $g'(a) > 0$, il existe $r > 0$ tel que $]a - r\,,a + r[\subset I$ et que $|g'(x) - g'(a)| < \frac{g'(a)}{2}$ pour $|x - a| < r$, ce qui donne $g'(x) > \frac{g'(a)}{2} > 0$. La dérivée ne s'annulant pas sur $]a - r\,,a + r[$, le théorème 7 (iii) montre que

$$\boxed{g \text{ est strictement croissante sur }]a - r\,,a + r[}$$

Pour la fonction f, on a $f'(0) = 1 > 0$ et f n'est croissante sur aucun intervalle ouvert contenant 0, d'après la question 3 : f' n'est donc pas continue en 0, et $\boxed{f \text{ n'est pas de classe } \mathcal{C}^1}$. On le voit aussi directement : $f'(x_k) = -1$ ne tend pas vers $f'(0) = 1$.

Piège. L'erreur la plus répandue est de conclure de $f'(a) > 0$ que f est croissante « au voisinage de a ». Le théorème 7 relie le signe de f' *sur un intervalle* à la monotonie sur cet intervalle ; le signe de la dérivée en un seul point ne donne que la question 2. Il faut une hypothèse supplémentaire, comme la continuité de f' en a de la question 4.

À retenir. La fonction f est la somme de l'identité et du double de la fonction $x \mapsto x^2\sin\frac{1}{x}$ du cours (section 9.2), dérivable sans être de classe $\mathcal{C}^1$. Près de 0, sa dérivée oscille : on a aussi

$$f'\Big(\frac{1}{(2k+1)\pi}\Big) = 1 + 2 = 3,$$

et, f' étant continue sur $]0\,,\eta[$, le théorème des valeurs intermédiaires montre qu'elle y prend toutes les valeurs de $[-1\,,3]$, quel que soit $\eta > 0$. C'est un exemple concret de la situation de l'exercice 23 : une dérivée discontinue en 0, qui vérifie pourtant la propriété des valeurs intermédiaires. L'item 4 du vrai ou faux de l'exercice 47 montrait l'autre sens : une fonction strictement croissante peut avoir une dérivée nulle en un point.

EXERCICE 49 ⋆⋆

1. On raisonne par récurrence sur n. Pour $n=0$, la somme se réduit à $f(x)$. Supposons la formule vraie au rang n. Par définition, $\Delta^{n+1}f(x)=\Delta^n f(x+1)-\Delta^n f(x)$, et l'hypothèse de récurrence donne, après le changement d'indice $k\leftarrow k+1$ dans la première somme,

$$\Delta^{n+1}f(x)=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{n+1-k}\binom{n}{k-1}f(x+k)+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+1-k}\binom{n}{k}f(x+k).$$

Avec les conventions $\binom{n}{-1}=\binom{n}{n+1}=0$, la formule de Pascal du chapitre 3, $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$, regroupe les deux sommes :

$$\boxed{\Delta^n f(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(x+k)}$$

2. On démontre par récurrence sur $n\geqslant 1$ la propriété suivante : pour toute fonction f qui est n fois dérivable sur I et tout $x\in I$, il existe $c\in]x\,,x+n[$ tel que $\Delta^n f(x)=f^{(n)}(c)$.

Pour $n=1$, la fonction f est continue et dérivable sur le segment $[x\,,x+1]$, contenu dans I, et le théorème 5 des accroissements finis fournit $c\in]x\,,x+1[$ tel que $f(x+1)-f(x)=f'(c)$.

Supposons la propriété vraie au rang n, et soit f une fonction $n+1$ fois dérivable sur I. La fonction $g=\Delta f$ est n fois dérivable sur I, par composition avec $t\mapsto t+1$ (théorème 2), et $g^{(n)}(t)=f^{(n)}(t+1)-f^{(n)}(t)$. Par une récurrence immédiate, $\Delta^n(\Delta f)=\Delta^{n+1}f$. L'hypothèse de récurrence appliquée à g fournit $c'\in]x\,,x+n[$ tel que

$$\Delta^{n+1}f(x)=\Delta^n g(x)=g^{(n)}(c')=f^{(n)}(c'+1)-f^{(n)}(c').$$

La fonction $f^{(n)}$ est dérivable sur I, donc continue, et le théorème 5 sur $[c'\,,c'+1]$ fournit $c\in]c'\,,c'+1[$ tel que $f^{(n)}(c'+1)-f^{(n)}(c')=f^{(n+1)}(c)$. Enfin $x<c'<c<c'+1<x+n+1$.

$$\boxed{\Delta^n f(x)=f^{(n)}(c)\text{ avec }c\in]x\,,x+n[}$$

C'est une égalité des accroissements finis d'ordre n : la différence n-ième « discrète », formée avec un pas égal à 1, est une dérivée n-ième prise en un point inconnu.

3. On applique la question 2 à $f:t\mapsto t^p$ sur $\mathbb{R}$, au point $x=0$. Par la question 1, $\Delta^n f(0)$ est la somme cherchée. Or $f^{(n)}$ est la fonction nulle si $p<n$, et la constante $n!$ si $p=n$.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p=0\ \text{ si }1\leqslant p\leqslant n-1,\qquad\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^n=n!}$$

Pour $n=3$, on vérifie que $3-3\times 2^3+3^3=6=3!$ ✓. Ces sommes ont un sens combinatoire : avec les outils de dénombrement du chapitre 21, on pourra montrer que $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p$ compte les surjections d'un ensemble à p éléments sur un ensemble à n éléments. Il n'y en a aucune si $p<n$, et il y en a $n!$ si $p=n$, puisque ce sont alors les bijections. Pour $p=n+1$, le calcul est plus riche : avec $n=2$, la somme vaut $-2+2^3=6$, et $f''(t)=6t$ impose $c=1$, le milieu de $]0\,,2[$.

4. Soit n un entier strictement supérieur à α, et $f:t\mapsto t^\alpha=\mathrm{e}^{\alpha\ln t}$ sur $]0\,,+\infty[$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, avec

$$f^{(n)}(t)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\,t^{\alpha-n}.$$

Pour tout entier $k\geqslant 1$, la question 1 montre que $\Delta^n f(k)$ est une combinaison à coefficients entiers des entiers $(k+i)^\alpha$: c'est un entier. La question 2 fournit $c_k\in]k\,,k+n[$ tel que $\Delta^n f(k)=f^{(n)}(c_k)$. Comme $\alpha-n<0$ et que $c_k>k$, on a $\lim\limits_{k\to+\infty}f^{(n)}(c_k)=0$. Une suite d'entiers de limite nulle est nulle à partir d'un certain rang, puisque ses termes finissent par être dans $]-\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}[$. Il existe donc k tel que $f^{(n)}(c_k)=0$, avec $c_k>0$, ce qui impose $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)=0$, soit $\alpha\in[\![0\,;n-1]\!]$.

$$\boxed{\alpha\in\mathbb{N}^*}$$

À retenir. La question 4 associe deux informations de natures différentes : une information arithmétique, les valeurs entières, et une information analytique, la petitesse de $f^{(n)}$. Ensemble, elles forcent une différence n-ième à être nulle, ce qui est très contraignant. Ce procédé, qui fait passer d'un entier petit à un entier nul, est au cœur de nombreuses démonstrations d'irrationalité ; l'exercice 52 en donne un autre exemple.

EXERCICE 50 ⋆⋆⋆

1. Les deux termes de la somme sont positifs, donc chacun est inférieur à 1. De $f(x)^2 \leqslant 1$, on tire $|f(x)| \leqslant 1$; de $\left(1+f'(x)\right)^2 \leqslant 1$, on tire $-1 \leqslant 1+f'(x) \leqslant 1$, soit

$$\boxed{|f| \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad -2 \leqslant f' \leqslant 0}$$

Ainsi f est décroissante (théorème 7) et bornée : par le théorème de la limite monotone du chapitre 8, elle admet des limites finies L en $+\infty$ et L' en $-\infty$, avec $L \leqslant f \leqslant L'$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le théorème des accroissements finis fournit un réel $c_n \in]n\,,n+1[$ tel que

$$f'(c_n) = f(n+1) - f(n).$$

On a $c_n \geqslant n$, donc c_n tend vers $+\infty$, et $f(n+1)-f(n)$ tend vers $L-L=0$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} f'(c_n) = 0}$$

3. L'hypothèse en c_n donne $f(c_n)^2 \leqslant 1-\left(1+f'(c_n)\right)^2$. Quand n tend vers $+\infty$, le membre de droite tend vers $1-1=0$, et le membre de gauche vers L^2, par composition des limites. Ainsi $L^2 \leqslant 0$, et $L=0$. Le même raisonnement, sur les segments $[-n-1\,,-n]$, donne $L'=0$. Finalement $0 = L \leqslant f(x) \leqslant L' = 0$ pour tout x.

$$\boxed{f = 0}$$

Réciproquement, la fonction nulle vérifie l'hypothèse avec égalité. Géométriquement, le point de coordonnées $f(x)$ et $1+f'(x)$ est dans le disque unité fermé ; la seule façon d'y rester sur tout $\mathbb{R}$ est d'être immobile en son point $(0,1)$.

EXERCICE 51 ⋆⋆⋆

1. Soit a le coefficient dominant de P. En $+\infty$, $P(x)$ a le signe de a pour x assez grand, et tend vers $\pm\infty$; comme $P \geqslant 0$, on a $a>0$. En $-\infty$, $P(x)$ a le signe de $(-1)^n a$, d'où $(-1)^n > 0$: n est pair. Enfin, $Q = P + P' + \cdots + P^{(n)}$ a le même terme dominant ax^n que P, puisque les dérivées sont de degré strictement inférieur. Avec n pair et $a>0$,

$$\boxed{n \text{ est pair},\ a>0,\ \lim_{x\to\pm\infty} Q(x) = +\infty}$$

2. D'après la question 1, il existe $A>0$ tel que $Q(x) > Q(0)$ pour $|x|>A$. La fonction continue Q atteint son minimum sur le segment $[-A\,,A]$ en un point x_0 (chapitre 8), et $Q(x_0) \leqslant Q(0) < Q(x)$ pour $|x|>A$: $\boxed{Q \text{ admet en } x_0 \text{ un minimum global}}$.

3. Comme $P^{(n+1)}=0$, la différence est télescopique :

$$Q - Q' = \left(P + P' + \cdots + P^{(n)}\right) - \left(P' + P'' + \cdots + P^{(n+1)}\right) = P.$$

Le minimum x_0 est intérieur à $\mathbb{R}$, donc $Q'(x_0)=0$ par la proposition 2, et $Q(x_0) = P(x_0) \geqslant 0$. Pour tout réel x, $Q(x) \geqslant Q(x_0) \geqslant 0$.

$$\boxed{Q \geqslant 0 \text{ sur } \mathbb{R}}$$

L'idée est de regarder Q là où il est le plus petit : en ce point, la relation $Q = P + Q'$ se réduit à $Q = P$, dont on connaît le signe.

EXERCICE 52 ⋆⋆⋆

1.(a) La fonction P est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et sa dérivée n-ième est la constante $n!\,c_n$, non nulle. Si P s'annulait en $n+1$ points distincts, la question 3 de l'exercice 13 fournirait un zéro de $P^{(n)}$, ce qui est absurde. Ainsi $\boxed{P \text{ s'annule au plus } n \text{ fois sur } \mathbb{R}}$.

Notons $z_1, \dots, z_r$ les zéros de P distincts de x, en nombre fini $r \leqslant n-1$. On pose $\delta = 1$ si $r = 0$, et sinon

$$\delta = \min\Big(1, \frac{1}{2} \min_{1 \leqslant i \leqslant r} |z_i - x|\Big) > 0.$$

Aucun z_i n'est dans $[x-\delta\,, x+\delta]$: $\boxed{x \text{ est le seul zéro de } P \text{ sur } [x-\delta\,, x+\delta]}$.

(b) La fonction $|P'|$ est continue sur le segment $[x-1\,, x+1]$, donc bornée et atteint son maximum M (chapitre 8, théorème 10). Si l'on avait $M = 0$, la dérivée P' serait nulle sur $[x-1\,, x+1]$, et P y serait constante par le théorème 7, égale à $P(x) = 0$: elle aurait une infinité de zéros, ce qui contredit la question (a). Donc $\boxed{M > 0}$.

(c) On développe :

$$b^n P\Big(\frac{a}{b}\Big) = \sum_{k=0}^{n} c_k\, a^k b^{n-k},$$

qui est un entier, puisque les c_k, a et b sont entiers et que $n-k \geqslant 0$. On distingue alors deux cas.

— Si $\big|x - \frac{a}{b}\big| \geqslant \delta$, on a directement $\big|x - \frac{a}{b}\big| \geqslant \delta \geqslant \frac{\delta}{b^n} \geqslant \frac{C}{b^n}$, puisque $b \geqslant 1$.

— Si $\big|x - \frac{a}{b}\big| < \delta$, le rationnel $\frac{a}{b}$ est dans $[x-\delta\,, x+\delta]$ et distinct de x : par la question (a), $P\big(\frac{a}{b}\big) \neq 0$. L'entier $b^n P\big(\frac{a}{b}\big)$ est donc non nul, d'où $\big|P\big(\frac{a}{b}\big)\big| \geqslant \frac{1}{b^n}$. Par ailleurs, $\frac{a}{b}$ et x sont dans $[x-1\,, x+1]$, où $|P'| \leqslant M$, et l'inégalité des accroissements finis (théorème 6) donne

$$\frac{1}{b^n} \leqslant \Big|P\Big(\frac{a}{b}\Big) - P(x)\Big| \leqslant M\,\Big|x - \frac{a}{b}\Big|, \qquad \text{soit} \qquad \Big|x - \frac{a}{b}\Big| \geqslant \frac{1}{Mb^n} \geqslant \frac{C}{b^n}.$$

$$\boxed{\Big|x - \frac{a}{b}\Big| \geqslant \frac{C}{b^n} \text{ pour tous } a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } \frac{a}{b} \neq x}$$

Piège. L'hypothèse $\frac{a}{b} \neq x$ est indispensable : si x est rationnel, égal à $\frac{a}{b}$, le membre de gauche est nul. L'argument repose entièrement sur le fait qu'un entier non nul est au moins égal à 1 en valeur absolue, et il faut donc s'assurer que $P\big(\frac{a}{b}\big)$ n'est pas nul.

2.(a) La suite (s_N) est strictement croissante. Comme $k! \geqslant k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $2^{-k!} \leqslant 2^{-k}$, d'où

$$s_N \leqslant \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^N} < 2.$$

Croissante et majorée, la suite $\boxed{(s_N) \text{ converge}}$ par le théorème de la limite monotone (chapitre 7, théorème 8).

(b) Pour $k \geqslant 1$, on a $(k+1)!-k! = k\cdot k! \geqslant 1$: la suite des factorielles augmente d'au moins 1 à chaque pas à partir du rang 1, et l'on obtient, par récurrence sur $k \geqslant N+1$, l'inégalité $k! \geqslant (N+1)!+(k-N-1)$. Pour $m > N$, on en déduit

$$s_m - s_N = \sum_{k=N+1}^{m} 2^{-k!} \leqslant 2^{-(N+1)!} \sum_{k=N+1}^{m} 2^{-(k-N-1)} < 2 \cdot 2^{-(N+1)!}.$$

En faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient $L - s_N \leqslant 2 \cdot 2^{-(N+1)!}$. Enfin $L \geqslant s_{N+1}$, puisque la suite est croissante, donc $L - s_N \geqslant 2^{-(N+1)!} > 0$.

$$\boxed{0 < L - s_N \leqslant 2 \cdot 2^{-(N+1)!}}$$

(c) Supposons L algébrique, racine d'une fonction polynomiale non nulle P à coefficients entiers. Une constante non nulle n'a pas de racine : P est de degré $n \geqslant 1$, et la question 1 s'applique avec

$x = L$. Pour tout N, on écrit

$$s_N = \frac{a_N}{b_N}, \qquad \text{avec} \qquad b_N = 2^{N!} \qquad \text{et} \qquad a_N = \sum_{k=0}^{N} 2^{N!-k!} \in \mathbb{N},$$

puisque $k! \leqslant N!$ pour $k \leqslant N$. Comme $s_N \neq L$ par la question (b), les questions 1.(c) et 2.(b) donnent

$$\frac{C}{2^{nN!}} \leqslant L - s_N \leqslant \frac{2}{2^{(N+1)!}}, \qquad \text{soit} \qquad 0 < C \leqslant 2^{1+nN!-(N+1)!} = 2^{1-N!\,(N+1-n)}.$$

Pour $N \geqslant n$, l'exposant est inférieur à $1 - N!$, qui tend vers $-\infty$: le majorant tend vers 0, ce qui contredit $C > 0$.

$$\boxed{L \text{ est transcendant}}$$

En particulier, L n'est pas rationnel, puisqu'un rationnel est algébrique.
À retenir. La question 1 dit qu'un nombre algébrique de degré n se laisse mal approcher par les rationnels : l'erreur commise avec un dénominateur b est au moins de l'ordre de $\frac{1}{b^n}$. Le nombre L est au contraire trop bien approché : avec $b_N = 2^{N!}$, l'erreur est au plus $\frac{2}{b_N^{N+1}}$, et l'exposant $N+1$ dépasse tout degré n fixé. C'est par cet argument que Joseph Liouville a établi en 1844 l'existence de nombres transcendants. Le seul outil d'analyse utilisé est l'inégalité des accroissements finis, et le seul outil d'arithmétique est qu'un entier non nul vaut au moins 1 en valeur absolue, comme à la question 4 de l'exercice 49.

EXERCICE 53 ⋆⋆⋆

1. Sur un segment $I_{n,j}$ où f_n va de la valeur A à la valeur B, de pente $s = 3^n(B - A)$, on pose $d = B - A$. Les valeurs de f_n au tiers et aux deux tiers sont $A + \frac{d}{3}$ et $A + \frac{2d}{3}$; celles de f_{n+1} aux quatre points de rang $n+1$ de $I_{n,j}$ sont donc, dans l'ordre,

$$A, \qquad A + \frac{2d}{3}, \qquad A + \frac{d}{3}, \qquad B = A + d.$$

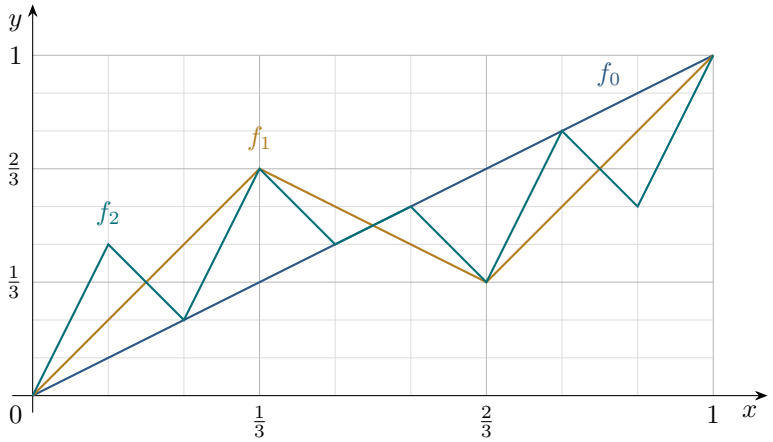
Sur chaque tiers, de longueur $3^{-(n+1)}$, les accroissements sont $\frac{2d}{3}$, $-\frac{d}{3}$ et $\frac{2d}{3}$, d'où les pentes

$$\boxed{2s, \qquad -s, \qquad 2s}$$

Comme f_0 a pour pente 1, une récurrence immédiate montre que chaque pente de f_n est de la forme $\pm 2^p$ avec $0 \leqslant p \leqslant n$: $\boxed{\text{les pentes de } f_n \text{ sont non nulles, de valeur absolue au plus } 2^n}$.

On en déduit les valeurs aux points de rang 1 et 2 : f_1 prend les valeurs 0, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, 1 aux points 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1, et f_2 prend aux points $\frac{i}{9}$, pour i allant de 0 à 9, les valeurs

$$0, \quad \tfrac{4}{9}, \quad \tfrac{2}{9}, \quad \tfrac{2}{3}, \quad \tfrac{4}{9}, \quad \tfrac{5}{9}, \quad \tfrac{1}{3}, \quad \tfrac{7}{9}, \quad \tfrac{5}{9}, \quad 1.$$



Chaque fonction coïncide avec la précédente aux points de rang précédent (lignes grises foncées pour le rang 1) ; sur chaque segment, elle remplace la pente s par le motif « monter du double, redescendre, remonter du double », de sorte que la courbe devient de plus en plus hérissée.

2. Sur $I_{n,j}$, avec les notations de la question 1, la fonction $f_{n+1}-f_n$ est affine sur chaque tiers, nulle aux extrémités, et vaut $\frac{2d}{3}-\frac{d}{3}=\frac{d}{3}$ au tiers et $\frac{d}{3}-\frac{2d}{3}=-\frac{d}{3}$ aux deux tiers. Une fonction affine sur un segment atteint ses extrema aux extrémités, donc $|f_{n+1}-f_n|\leqslant\frac{|d|}{3}$ sur $I_{n,j}$. Or $|d|=|s|\,3^{-n}\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n$ par la question 1.

$$\boxed{|f_{n+1}(x)-f_n(x)|\leqslant\frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3}\Big)^n}$$

Posons $u_n=f_n(x)-\left(\frac{2}{3}\right)^n$ et $v_n=f_n(x)+\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Comme $\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$, on a

$$u_{n+1}-u_n=f_{n+1}(x)-f_n(x)+\frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3}\Big)^n\geqslant 0\qquad\text{et}\qquad v_{n+1}-v_n=f_{n+1}(x)-f_n(x)-\frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3}\Big)^n\leqslant 0.$$

De plus $v_n-u_n=2\left(\frac{2}{3}\right)^n$ tend vers 0 : les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Par le théorème des suites adjacentes (chapitre 7, théorème 9), elles convergent vers une limite commune $f(x)$, avec $u_n\leqslant f(x)\leqslant v_n$, et $(f_n(x))$, qui est leur demi-somme, converge aussi vers $f(x)$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=f(x)\qquad\text{et}\qquad|f_n(x)-f(x)|\leqslant\Big(\frac{2}{3}\Big)^n}$$

3. Soit $x\in[0\,,1]$ et $\varepsilon>0$. On choisit n tel que $\left(\frac{2}{3}\right)^n\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$, puis, f_n étant continue en x, un réel $\delta>0$ tel que $|f_n(y)-f_n(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$ pour $y\in[0\,,1]$ et $|y-x|\leqslant\delta$. Pour ces y, la question 2 donne

$$|f(y)-f(x)|\leqslant|f(y)-f_n(y)|+|f_n(y)-f_n(x)|+|f_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Ainsi $\boxed{f\text{ est continue sur }[0\,,1]}$. Le majorant $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ne dépendant pas de x, une seule fonction f_n sert pour tous les points : c'est ce qui rend l'argument possible.

Un point de rang n est aussi de rang m pour tout $m\geqslant n$, puisque $\frac{j}{3^n}=\frac{3^{m-n}j}{3^m}$, et f_{m+1} coïncide avec f_m aux points de rang m. La suite $(f_m(x))_{m\geqslant n}$ est donc constante, et sa limite est son premier terme.

$$\boxed{f(x)=f_n(x)\text{ pour tout point }x\text{ de rang }n}$$

4. Pour $m\geqslant N$, le point x est de rang m, extrémité gauche du segment $J_m=[x\,,x+3^{-m}]$ de rang m ; notons s_m la pente de f_m sur J_m, de sorte que $s_N=s$. Le segment J_{m+1} est le premier tiers de J_m, où la pente de f_{m+1} est $2s_m$ par la question 1 : ainsi $s_m=2^{m-N}s$. Les deux extrémités de J_m étant de rang m, la question 3 donne

$$3^m\big(f(x+3^{-m})-f(x)\big)=3^m\big(f_m(x+3^{-m})-f_m(x)\big)=s_m=2^{m-N}s.$$

Comme $|s|\geqslant 1$, ce taux d'accroissement tend vers $\pm\infty$ quand m tend vers $+\infty$, alors que 3^{-m} tend vers 0. Si f était dérivable en x, ce taux tendrait vers $f'(x)$ par composition des limites.

$$\boxed{f\text{ n'est pas dérivable en }x}$$

Pour $x=0$, on a $N=0$ et $s=1$, d'où $\boxed{f(3^{-m})=\left(\frac{2}{3}\right)^m}$: la fonction f coïncide avec $x\mapsto 2^m x$ sur $[0\,,3^{-m}]$ en ses deux extrémités, et sa pente moyenne y vaut 2^m. Au point 1, on raisonne de même avec les segments $[1-3^{-m}\,,1]$: chacun est le dernier tiers du précédent, où la pente est aussi doublée, et le taux $3^m\big(f(1)-f(1-3^{-m})\big)=2^m$ tend vers $+\infty$. Le même raisonnement, à gauche, s'applique d'ailleurs à tout point de rang N strictement positif.

5.(a) Posons $T(t)=\frac{h(t)-h(a)}{t-a}$ pour $t\neq a$, de limite $h'(a)$ en a. En écrivant

$$h(a+\eta_n)-h(a-\xi_n)=\big(h(a+\eta_n)-h(a)\big)+\big(h(a)-h(a-\xi_n)\big),$$

on obtient

$$\frac{h(a+\eta_n)-h(a-\xi_n)}{\xi_n+\eta_n} = \lambda_n\, T(a+\eta_n) + (1-\lambda_n)\, T(a-\xi_n), \qquad \text{avec} \qquad \lambda_n = \frac{\eta_n}{\xi_n+\eta_n} \in]0\,,1[.$$

Le quotient est une moyenne pondérée de deux taux d'accroissement. Comme λ_n et $1-\lambda_n$ sont positifs de somme 1,

$$\Big|\frac{h(a+\eta_n)-h(a-\xi_n)}{\xi_n+\eta_n} - h'(a)\Big| \leqslant |T(a+\eta_n)-h'(a)| + |T(a-\xi_n)-h'(a)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

par la caractérisation séquentielle de la limite (chapitre 8, théorème 1).

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{h(a+\eta_n)-h(a-\xi_n)}{\xi_n+\eta_n} = h'(a)}$$

La positivité de ξ_n et de η_n est essentielle : elle garantit que $\lambda_n \in]0\,,1[$, donc que le quotient est une moyenne des deux taux et que leurs erreurs ne sont pas amplifiées. Le point a doit être situé entre les deux points de la corde.

(b) Comme x n'est pas un point de rang n, il est intérieur à un unique segment $I_{n,j_n} = \big[\frac{j_n}{3^n}\,,\frac{j_n+1}{3^n}\big]$. Le segment $I_{n+1,j_{n+1}}$ contient x et est l'un des trois tiers d'un segment de rang n, qui contient donc aussi x : c'est I_{n,j_n}. Par la question 1, $\boxed{\sigma_{n+1} \in \{2\sigma_n, -\sigma_n\}}$.

Supposons f dérivable en x, et posons $\xi_n = x - \frac{j_n}{3^n} > 0$ et $\eta_n = \frac{j_n+1}{3^n} - x > 0$, de somme 3^{-n}. Les extrémités de I_{n,j_n} étant de rang n, la question 3 donne

$$\frac{f(x+\eta_n)-f(x-\xi_n)}{\xi_n+\eta_n} = 3^n\Big(f_n\Big(\frac{j_n+1}{3^n}\Big) - f_n\Big(\frac{j_n}{3^n}\Big)\Big) = \sigma_n,$$

et la question (a) montre que (σ_n) converge vers $f'(x)$. Or $|\sigma_n| = 2^{p_n}$, où (p_n) est une suite croissante d'entiers, qui augmente de 1 à chaque doublement. Si (p_n) augmentait une infinité de fois, elle tendrait vers $+\infty$, et (σ_n) ne serait pas bornée. Elle est donc constante à partir d'un rang n_0, et alors $\sigma_{n+1} = -\sigma_n$ pour $n \geqslant n_0$: la suite (σ_n) prend alternativement les valeurs σ_{n_0} et $-\sigma_{n_0}$, distinctes puisque $\sigma_{n_0} \neq 0$, et elle ne converge pas. C'est une contradiction.

$$\boxed{f \text{ n'est dérivable en aucun point de } [0\,,1]}$$

À retenir. Le chapitre 8 a annoncé l'existence de fonctions continues dérivables nulle part, comme celle que Weierstrass a présentée en 1872 ; on en a construit une ici avec les seuls outils de l'année : suites adjacentes, continuité par une majoration uniforme, et taux d'accroissement. L'idée tient en une phrase : à chaque étape, sur chaque segment, la pente est multipliée par 2 ou par -1, de sorte que les pentes moyennes autour d'un point ou bien explosent, ou bien changent de signe indéfiniment. Ni l'un ni l'autre n'est compatible avec l'existence d'une tangente. La proposition 1 du cours, selon laquelle une fonction dérivable est continue, n'a donc aucune réciproque, même partielle.

EXERCICE 54 ⋆⋆⋆⋆

1. On choisit $K = \frac{2}{h^2}(f(x+h)-f(x)-hf'(x))$, de sorte que $\varphi(h) = 0$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0\,,h]$, avec

$$\varphi(0) = 0, \qquad \varphi'(t) = f'(x+t) - f'(x) - tK, \qquad \varphi'(0) = 0, \qquad \varphi''(t) = f''(x+t) - K.$$

— Comme $\varphi(0) = \varphi(h) = 0$, le théorème de Rolle fournit $t_1 \in]0\,,h[$ tel que $\varphi'(t_1) = 0$.

— Comme $\varphi'(0) = \varphi'(t_1) = 0$, le théorème de Rolle appliqué à φ' fournit $t_2 \in]0\,,t_1[$ tel que $\varphi''(t_2) = 0$.

Avec $c = x + t_2 \in]x\,,x+h[$, on a $K = f''(c)$, et l'égalité $\varphi(h) = 0$ s'écrit

$$\boxed{f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(c)}$$

C'est le cas $n = 2$ de l'exercice 32, déguisé : φ s'annule en 0 avec sa dérivée, et en h.

2. On applique la question 1 à la fonction $u : t \mapsto f(-t)$, de classe $\mathcal{C}^2$, au point $-x$: il existe $c' \in]x-h\,,x[$ tel que

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(c').$$

En soustrayant les deux égalités, $f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{h^2}{2}(f''(c) - f''(c'))$, donc

$$2h|f'(x)| \leqslant |f(x+h)| + |f(x-h)| + \frac{h^2}{2}(|f''(c)| + |f''(c')|) \leqslant 2M_0 + h^2M_2.$$

On divise par $2h$:

$$\boxed{|f'(x)| \leqslant \frac{M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}}$$

3. Le membre de droite ne dépend pas de x : avec $h = 1$, f' est bornée par $M_0 + \frac{M_2}{2}$. Si $M_0 = 0$, f est nulle et le résultat est évident. Sinon, on étudie $\psi : h \mapsto \frac{M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$ sur $]0\,,+\infty[$. Sa dérivée $-\frac{M_0}{h^2} + \frac{M_2}{2}$ s'annule en $h_0 = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$, en passant du négatif au positif : ψ y atteint son minimum,

$$\psi(h_0) = M_0\sqrt{\frac{M_2}{2M_0}} + \frac{M_2}{2}\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}} = \sqrt{\frac{M_0M_2}{2}} + \sqrt{\frac{M_0M_2}{2}} = \sqrt{2M_0M_2}.$$

$$\boxed{\sup_{\mathbb{R}} |f'| \leqslant \sqrt{2M_0M_2}}$$

4. Si $M_2 = 0$, la question 2 donne $|f'(x)| \leqslant \frac{M_0}{h}$ pour tout $h > 0$, et en faisant tendre h vers $+\infty$, $f' = 0$: $\boxed{f \text{ est constante}}$. On le voit aussi directement : $f'' = 0$, donc f est affine, et une fonction affine bornée sur $\mathbb{R}$ est constante.

À retenir. Cette inégalité, dite de Landau, dit que la taille d'une fonction et celle de sa dérivée seconde contrôlent celle de sa dérivée première. Pour $f = \sin$, on a $M_0 = M_2 = 1$ et $\sup|f'| = 1 \leqslant \sqrt{2}$: l'ordre de grandeur $\sqrt{M_0M_2}$ est le bon. La méthode, qui choisit le pas h pour équilibrer deux erreurs de sens contraires, se retrouve en analyse numérique dans le choix du pas d'une dérivée approchée.

EXERCICE 55 ⋆⋆⋆⋆

1. Écrivons $P(x) = a_dx^d(1 + \frac{a_{d-1}}{a_dx} + \cdots + \frac{a_0}{a_dx^d})$: comme $d \geqslant 1$, $|P(x)|$ tend vers $+\infty$ quand $|x|$ tend vers $+\infty$. Il existe donc $A > 0$ tel que $|P(x)| > 1$ pour $|x| > A$. Une solution x vérifie $|P(x)| = |\cos x| \leqslant 1$, donc $|x| \leqslant A$: toutes les solutions sont dans le segment $[-A\,,A]$.

L'ensemble S des solutions est infini : on peut y choisir une suite (s_n) de solutions deux à deux distinctes, en prenant pour s_n un élément de $S \setminus \{s_0, \ldots, s_{n-1}\}$, qui est non vide. Cette suite est bornée ; par le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une sous-suite (x_n) convergeant vers un réel c, et les x_n sont encore deux à deux distincts.

$$\boxed{\text{il existe des solutions } x_n \text{ deux à deux distinctes, avec } \lim_{n\to+\infty} x_n = c}$$

2. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Montrons par récurrence sur k que $g^{(k)}$ s'annule en une suite de points deux à deux distincts convergeant vers c. Pour $k = 0$, c'est la question 1.

Supposons que $g^{(k)}$ s'annule en des points y_n deux à deux distincts, de limite c. Au plus un des y_n est égal à c, donc une infinité d'entre eux sont du même côté de c, disons strictement supérieurs, l'autre cas étant symétrique. On en extrait une suite strictement décroissante (y'_n) : on choisit $y'_0 > c$

parmi eux, puis, $y'_n > c$ étant choisi, un terme y_m vérifiant $c < y_m < y'_n$, qui existe puisque (y_m) tend vers c et qu'une infinité de termes sont strictement supérieurs à c. Le théorème de Rolle, appliqué à $g^{(k)}$ sur $[y'_{n+1}\,,y'_n]$, fournit $z_n \in]y'_{n+1}\,,y'_n[$ tel que $g^{(k+1)}(z_n) = 0$. Les intervalles étant disjoints, les z_n sont deux à deux distincts, et $c < z_n < y'_n$ montre que (z_n) tend vers c.

Enfin, $g^{(k)}$ est continue, donc $g^{(k)}(c) = \lim\limits_{n\to+\infty} g^{(k)}(y_n) = 0$.

$$\boxed{g^{(k)}(c) = 0 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}}$$

3. Pour $k \geqslant d+1$, on a $P^{(k)} = 0$, donc $g^{(k)} = -\cos^{(k)}$. Or $\cos^{(k)}(c) = \cos\left(c + \frac{k\pi}{2}\right)$, donc

$$g^{(d+1)}(c)^2 + g^{(d+2)}(c)^2 = \cos^2\left(c + \frac{(d+1)\pi}{2}\right) + \sin^2\left(c + \frac{(d+1)\pi}{2}\right) = 1,$$

puisque $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta$. Ces deux nombres ne peuvent pas être nuls tous les deux, ce qui contredit la question 2.

$$\boxed{P \text{ est constant}}$$

Réciproquement, si P est une constante de $[-1\,,1]$, l'équation $P = \cos x$ a bien une infinité de solutions, par périodicité. La question 2 montre plus généralement que si les zéros d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ s'accumulent en un point c, toutes ses dérivées s'annulent en c : c'est le germe du principe des zéros isolés, que l'on retrouvera pour les séries entières. La fonction plate de l'exercice 30 montre que cela n'oblige pas la fonction à être nulle.