EXERCICES – CHAPITRE 9

DÉRIVABILITÉ ET CONVEXITÉ

⋆ *application directe* ⋆⋆ *mise en œuvre* ⋆⋆⋆ *problème* ⋆⋆⋆⋆ *problème long, en autonomie*

Dérivabilité en un point

EXERCICE 1 ⋆

En reconnaissant un taux d'accroissement, calculer les limites suivantes.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{3x+2}-\mathrm{e}^2}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(2-x)}{x-1}$

(c) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\exp(\cos x)-1}{x-\frac{\pi}{2}}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{Arctan}(1+x)-\frac{\pi}{4}}{x}$

(e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{100}-1}{x-1}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}$

EXERCICE 2 ⋆

Préciser le domaine de définition des fonctions suivantes, puis étudier leur dérivabilité aux points indiqués, ou en tout point du domaine.

(a) $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$ en 0, et $g : x \mapsto |x| \sin x$ en 0.

(b) h définie par $h(x) = x-1$ si $x \leqslant 1$, et $h(x) = (x-1)^2$ si $x > 1$, en 1.

(c) $x \mapsto \sqrt{x^2-x^3}$, sur son domaine de définition.

(d) $x \mapsto (x^2-1)\,\mathrm{Arccos}(x^2)$, sur son domaine de définition.

(e) $x \mapsto \cos\sqrt{x}$, en 0.

EXERCICE 3 ⋆⋆

Dérivabilité de $|f|$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, et $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose $f(a) \neq 0$. Montrer que $|f|$ est dérivable en a, et calculer $|f|'(a)$.
2. On suppose $f(a) = 0$. Montrer que $|f|$ est dérivable en a si et seulement si $f'(a) = 0$.
3. Énoncer le résultat obtenu, puis l'appliquer aux fonctions $x \mapsto |\sin x|$ et $x \mapsto |x^3 - x|$.
4. Soit f et g dérivables sur $\mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\max(f,g)$ soit dérivable en un point x_0.

EXERCICE 4 ⋆⋆

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose f dérivable en a. Montrer que
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a).$$
2. La réciproque est-elle vraie ?
3. On suppose encore f dérivable en a. Déterminer $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{xf(a) - af(x)}{x-a}$.

EXERCICE 5 ⋆⋆

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en 0, avec $f(0) = 0$. Montrer que la suite de terme général
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n^2}\Big)$$
converge, et déterminer sa limite. On pourra écrire $f(x) = x\big(f'(0) + \varepsilon(x)\big)$, avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

EXERCICE 6 ⋆⋆

1. Que peut-on dire de la dérivée d'une fonction dérivable paire ? impaire ? périodique ?
2. Soit $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ dérivable, telle que $f(0) = f(1)$. On définit g sur $[0\,,1]$ par $g(x) = f(2x)$ si $x \leqslant \frac{1}{2}$, et $g(x) = f(2x-1)$ sinon. Montrer que g est continue. À quelle condition sur f est-elle dérivable sur $[0\,,1]$?

EXERCICE 7 ⋆⋆

Tangentes.

1. Montrer que les courbes d'équations $y = x^2$ et $y = \frac{1}{x}$ admettent une unique tangente commune, et en donner une équation.
2. Pour tout réel λ, on note $\mathcal{C}_\lambda$ la courbe de $f_\lambda : x \mapsto \dfrac{x+\lambda}{x^2+1}$. Montrer que les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_\lambda$ au point d'abscisse 0 sont parallèles, et que les tangentes au point d'abscisse 1 sont concourantes.

EXERCICE 8 ⋆⋆

Équations fonctionnelles et dérivabilité.

1. Déterminer les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous réels x et y. On dérivera par rapport à y, sans utiliser l'exemple du chapitre 8.
2. Déterminer les fonctions $f : [0\,,+\infty[\to \mathbb{R}$, dérivables, telles que $f(2x) = 2f(x)$ pour tout $x \geqslant 0$. On pourra étudier $\frac{f(x)}{x}$ et utiliser la dérivabilité en 0.

EXERCICE 9 ⋆⋆⋆

Soit f une fonction définie au voisinage de 0, continue en 0, telle que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(2x)-f(x)}{x} = 3.$$

1. Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tel que $|f(2t) - f(t) - 3t| \leqslant \varepsilon|t|$ pour $|t| \leqslant \delta$. Soit x tel que $0 < |x| \leqslant \delta$. En sommant ces inégalités pour $t = \frac{x}{2^k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, majorer $\left|f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) - 3x\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\right|$.
2. En déduire que f est dérivable en 0, et que $f'(0) = 3$.
3. L'hypothèse de continuité en 0 est-elle nécessaire ? On pourra écrire $f(x) = 3x + g(x)$, où g vérifie $g(2x) = g(x)$ pour tout x.

EXERCICE 10 ⋆⋆

Dérivée d'une réciproque.

1. Montrer que $f : x \mapsto \mathrm{e}^x + x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Justifier que f^{-1} est dérivable, et calculer $(f^{-1})'(1)$, puis $(f^{-1})''(1)$, sans expliciter f^{-1}.
2. Montrer que $g : x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$ réalise une bijection de $[0\,,+\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera. Déterminer g^{-1}, et vérifier sur cet exemple la formule de dérivation d'une réciproque.

Extrema, théorèmes de Rolle et des accroissements finis

EXERCICE 11 ⋆

1. Déterminer le plus grand élément de l'ensemble $\{n^{1/n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.
2. Déterminer les extrema locaux de $x \mapsto x^3 - 3x$ sur $\mathbb{R}$, puis ses extrema globaux sur $[-3\,,2]$.
3. Soit $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ dérivable, admettant un minimum local en 0. Que peut-on dire de $f'(0)$?

EXERCICE 12 ⋆

Soit a, b et c trois réels. Montrer qu'il existe $x \in]0\,,1[$ tel que

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c.$$

EXERCICE 13 ⋆⋆

Pas trop de racines. Soit $n \geqslant 2$, p et q deux réels, et $P : x \mapsto x^n + px + q$.

1. Montrer que P s'annule au plus trois fois sur $\mathbb{R}$.
2. Si n est pair, montrer que P s'annule au plus deux fois sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $n \geqslant 1$ et f une fonction n fois dérivable sur un intervalle I, qui s'annule en $n+1$ points distincts de I. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur I.

EXERCICE 14 ⋆⋆

Rolle à l'infini.

1. Soit $f : [0\,,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]0\,,+\infty[$, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(0)$. On suppose f non constante. En considérant un réel $c > 0$ tel que $f(c) \neq f(0)$, montrer qu'il existe $a < c < b$ tels que $f(a) = f(b)$, et en déduire que f' s'annule sur $]0\,,+\infty[$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, admettant la même limite finie en $-\infty$ et en $+\infty$. Montrer que f' s'annule, en appliquant le théorème de Rolle à $\varphi : t \mapsto f(\tan t)$, prolongée sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]$.

EXERCICE 15 ⋆⋆

Une tangente passant par un point donné. Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a\,,b[$, telle que $f(a) = f(b) = 0$, et d un réel extérieur à $[a\,,b]$. Montrer qu'il existe une tangente à la courbe de f qui passe par le point $(d, 0)$. On pourra appliquer le théorème de Rolle à $x \mapsto \frac{f(x)}{x-d}$.

EXERCICE 16 ⋆⋆

Soit P une fonction polynomiale. Montrer que l'équation $P(x) = \mathrm{e}^x$ n'a qu'un nombre fini de solutions réelles. On raisonnera par récurrence sur le degré de P, en appliquant le théorème de Rolle à $x \mapsto P(x)\mathrm{e}^{-x} - 1$.

EXERCICE 17 ⋆

Inégalités par les accroissements finis. Démontrer les inégalités suivantes.

(a) Pour tous réels x et y, $|\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} y| \leqslant |x - y|$.

(b) Pour tout $x \geqslant 0$, $x \leqslant \mathrm{e}^x - 1 \leqslant x\mathrm{e}^x$.

(c) Pour tous $0 < x < y$, $\dfrac{y-x}{1+y^2} < \operatorname{Arctan} y - \operatorname{Arctan} x < \dfrac{y-x}{1+x^2}$.

Majorer ensuite l'erreur commise dans les approximations $\sqrt{10\,001} \approx 100$ et $\dfrac{1}{0{,}999^2} \approx 1$.

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \dfrac{1}{x}$.
2. Soit $v_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k}$. Montrer que $\ln(2n+1) - \ln(n+1) < v_n < \ln(2n) - \ln n$, et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
3. Montrer de même que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\ln n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = 1$.

EXERCICE 19 ⋆⋆

Soit $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $f(0) = 0$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [0\,,1]$.

1. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $f(x) \geqslant mx$ pour tout $x \in [0\,,1]$.
2. Le résultat subsiste-t-il si l'on suppose seulement f dérivable ? On pourra étudier la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$, prolongée en 0.

EXERCICE 20 ⋆⋆

Comportement à l'infini. Soit $f :]0\,,+\infty[\to \mathbb{R}$ dérivable.

1. On suppose $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \ell$, avec ℓ réel. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$. On traitera d'abord le cas $\ell = 0$, en appliquant l'inégalité des accroissements finis sur $[A\,, x]$.
2. La réciproque est-elle vraie ?
3. On suppose $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
4. On suppose f bornée et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \ell$. Montrer que $\ell = 0$. Une fonction bornée dérivable a-t-elle nécessairement une dérivée de limite nulle en $+\infty$?

EXERCICE 21 ⋆⋆

Suites récurrentes. Étudier la convergence des suites suivantes, et, lorsque c'est possible, majorer $|u_n - \ell|$ par une suite géométrique.

(a) $u_0 \in [0\,,1]$ et $u_{n+1} = \dfrac{\mathrm{e}^{u_n}}{\mathrm{e}^{u_n}+1}$.

(b) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

(c) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n}$. Peut-on, ici, appliquer la méthode du point fixe attractif ?

EXERCICE 22 ⋆⋆

Fonctions höldériennes. Soit $\alpha > 1$ et $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle, telle qu'il existe $C > 0$ vérifiant $|f(x)-f(y)| \leqslant C|x-y|^\alpha$ pour tous x, $y \in I$. Montrer que f est constante. Que dire si $\alpha = 1$? si $0 < \alpha < 1$?

EXERCICE 23 ⋆⋆⋆

Théorème de Darboux. Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. Soit $a < b$ dans I tels que $f'(a) < 0 < f'(b)$. Montrer que f atteint son minimum sur $[a\,,b]$ en un point de $]a\,,b[$, et en déduire que f' s'annule sur $]a\,,b[$.
2. En déduire que $f'(I)$ est un intervalle : une dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, même si elle n'est pas continue.
3. Montrer qu'aucune fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ n'a pour dérivée la partie entière. La fonction $g : x \mapsto x^2 \sin\frac{1}{x}$, prolongée par $g(0) = 0$, fournit-elle un contre-exemple au résultat de la question 2 ?

EXERCICE 24 ⋆⋆⋆

Accroissements finis généralisés. Soit f et g continues sur $[a\,,b]$, dérivables sur $]a\,,b[$, telles que g' ne s'annule pas sur $]a\,,b[$.

1. Montrer que $g(b) \neq g(a)$, et qu'il existe $c \in]a\,,b[$ tel que
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
On appliquera le théorème de Rolle à une combinaison bien choisie de f et de g.
2. *Règle de L'Hospital.* On suppose de plus que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$. Montrer que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \ell$.
3. Application : déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cos x - \mathrm{e}^x}{(x+1)\mathrm{e}^x - 1}$.

EXERCICE 25 ⋆⋆⋆

Corde et tangente. Soit $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$. On veut montrer qu'il existe $c \in]0\,,1]$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(c)}{c}$.

1. Interpréter géométriquement la conclusion, à l'aide de la tangente au point d'abscisse c et de la corde joignant l'origine à ce point.
2. On pose $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ pour $x \in]0\,,1]$, et $g(0) = 0$. Montrer que g est continue sur $[0\,,1]$ et dérivable sur $]0\,,1]$, et calculer g'.
3. Conclure si $f(1) = 0$. Si $f(1) > 0$, montrer que $g'(1) < 0$, en déduire que g atteint son maximum en un point de $]0\,,1[$, et conclure. Traiter enfin le cas $f(1) < 0$.

EXERCICE 26 ⋆⋆⋆

Soit $n \geqslant 1$ et $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ dérivable, telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

1. Montrer qu'il existe des réels $0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = 1$ tels que $f(y_k) = \frac{k}{n}$ pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$.
2. En déduire l'existence de réels $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ de $]0\,,1[$ tels que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f'(x_k)} = n.$$
3. Montrer de même qu'il existe des réels $z_1 < \cdots < z_n$ de $]0\,,1[$ tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} f'(z_k) = n$.

Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

EXERCICE 27 ⋆

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième des fonctions suivantes, en choisissant à chaque fois la méthode la plus adaptée.

(a) $x \mapsto a^x$, avec $a > 0$

(b) $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$

(c) $x \mapsto x^2 \mathrm{e}^{3x}$

(d) $x \mapsto (x^3 + 2x - 7)\,\mathrm{e}^x$

(e) $x \mapsto \dfrac{1}{21 + 5x - 4x^2}$

(f) $x \mapsto \cos^3 x$

Pour (e), on écrira la fonction comme combinaison linéaire de $x \mapsto \frac{1}{3-x}$ et $x \mapsto \frac{1}{4x+7}$; pour (f), on linéarisera $\cos^3$, comme au chapitre 4.

EXERCICE 28 ⋆⋆

Soit $n \geqslant 1$.

1. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, calculer les dérivées k-ièmes de $x \mapsto x^{n-1}$ et de $x \mapsto \ln(1 + x)$.
2. En déduire, à l'aide de la formule de Leibniz, la dérivée n-ième de $x \mapsto x^{n-1} \ln(1 + x)$ sur $]-1\,,+\infty[$, et l'écrire sous forme d'un seul quotient.

EXERCICE 29 ⋆⋆

Prolonger si nécessaire par continuité les fonctions suivantes, puis déterminer la plus grande classe $\mathcal{C}^k$ de la fonction obtenue.

(a) $x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$ et $x \mapsto x^3 \sin \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

(b) $x \mapsto \dfrac{\cos x - 1}{\sin x}$ sur $]0\,,\frac{\pi}{2}]$.

(c) $x \mapsto (x - \lfloor x \rfloor)(x - \lfloor x \rfloor - 1)$ sur $\mathbb{R}$.

(d) $x \mapsto x + a + b\,\mathrm{e}^x$ sur $[0\,,+\infty[$ et $x \mapsto \cos x - x$ sur $]-\infty\,,0[$, où a et b sont deux réels à choisir pour que la fonction soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Est-elle alors de classe $\mathcal{C}^2$?

EXERCICE 30 ⋆⋆⋆

Une fonction plate. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x}$ si $x > 0$, et $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,,+\infty[$, et qu'il existe pour tout n une fonction polynomiale P_n telle que $f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})\mathrm{e}^{-1/x}$ pour $x > 0$.
2. Montrer par récurrence, à l'aide du théorème de la limite de la dérivée, que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n.
3. Construire une fonction g de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty\,,0]$ et égale à 1 sur $[1\,,+\infty[$. On pourra considérer $\dfrac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}$.
4. Construire une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, non nulle, et nulle en dehors d'un segment $[a\,,b]$ donné.

Toutes les dérivées de f en 0 sont nulles, alors que f n'est nulle sur aucun voisinage de 0 : on verra plus tard dans l'année que f n'est donc pas approchée en 0 par les polynômes construits à partir de ses dérivées successives.

EXERCICE 31 ⋆⋆⋆

On définit sur $]0\,,1[$ une suite de fonctions par $f_0(x) = \dfrac{1}{1-x}$ et $f_{n+1}(x) = x\,f_n'(x)$.

1. Calculer f_1 et f_2.
2. Montrer que, pour tout n, il existe une fonction polynomiale P_n, de degré n, à coefficients entiers naturels, de coefficient dominant 1, telle que $f_n(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1-x)^{n+1}}$. On exprimera P_{n+1} en fonction de P_n et P_n'.
3. En déduire que chaque f_n est strictement positive sur $]0\,,1[$.

EXERCICE 32 ⋆⋆⋆

Rolle et dérivées successives.

1. Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a\,,b]$, telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a\,,b[$ tel que $f''(c) = f(c)$. On pourra introduire $h : x \mapsto \mathrm{e}^x\big(f'(x) - f(x)\big)$.
2. Soit $n \geqslant 1$ et f une fonction n fois dérivable sur $[a\,,b]$, telle que $f(b) = 0$ et

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in]a\,,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Fonctions à valeurs complexes

EXERCICE 33 ⋆

Soit $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x\sqrt{3}} \sin x$. En écrivant f comme la partie imaginaire d'une fonction à valeurs complexes, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n)}(x) = 2^n\, \mathrm{e}^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right).$$

Retrouver ce résultat par récurrence, sans les nombres complexes.

EXERCICE 34 ⋆⋆

1. Montrer que, pour tous réels s et t, $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}s}| \leqslant |t-s|$. Interpréter géométriquement cette inégalité.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et périodique. Montrer que f est lipschitzienne.
3. Montrer que l'égalité des accroissements finis est fausse pour $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ sur $[0\,,\pi]$, et non seulement sur $[0\,,2\pi]$.

Fonctions convexes

EXERCICE 35 ⋆

Démontrer les inégalités suivantes, en reconnaissant chaque fois la position d'une courbe par rapport à une tangente ou à une corde.

(a) *Bernoulli.* Pour tout $n \geqslant 2$ et tout $x \geqslant -1$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

(b) Pour tout $x \in [-1\,,1]$ et tout réel λ, $\mathrm{e}^{\lambda x} \leqslant \operatorname{ch}\lambda + x \operatorname{sh}\lambda$.

(c) Pour tous a, $b > 0$, $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$, et $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab}$.

(d) Pour tout $x \in [0\,,\frac{\pi}{2}]$, $\cos x \geqslant 1 - \dfrac{2x}{\pi}$.

EXERCICE 36 ⋆⋆

Avec l'inégalité de Jensen.

1. Étudier la convexité de $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^t}$ sur $\mathbb{R}$. En déduire que, pour tous réels $x_1, \dots, x_n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+x_k} \geqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}}.$$

2. Soit $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs. Montrer que $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_3} + \cdots + \dfrac{x_{n-1}}{x_n} + \dfrac{x_n}{x_1} \geqslant n$.

EXERCICE 37 ⋆⋆

1. Montrer que $f : x \mapsto \ln(1+\mathrm{e}^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que, pour tous réels $x_1, \dots, x_n$ strictement positifs,
$$1 + \Big(\prod_{k=1}^{n} x_k\Big)^{1/n} \leqslant \Big(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\Big)^{1/n}.$$
3. En déduire que, pour tous réels $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n$ strictement positifs,
$$\Big(\prod_{k=1}^{n} a_k\Big)^{1/n} + \Big(\prod_{k=1}^{n} b_k\Big)^{1/n} \leqslant \Big(\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\Big)^{1/n}.$$

EXERCICE 38 ⋆⋆

Opérations sur les fonctions convexes. Soit I un intervalle.

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe et $g : J \to \mathbb{R}$ convexe et croissante, où J est un intervalle contenant $f(I)$. Montrer que $g \circ f$ est convexe. Montrer par un exemple que l'hypothèse de croissance est utile.
2. Soit f et g convexes sur I. La fonction $\max(f,g)$ est-elle convexe ? et $\min(f,g)$? et fg ?
3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue, convexe et strictement croissante. Étudier la convexité de f^{-1} sur l'intervalle $f(I)$.

EXERCICE 39 ⋆⋆

Comportement global d'une fonction convexe. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe.

1. Montrer que si f admet un minimum local en a, c'est un minimum global. Que dire d'un maximum local ?
2. On suppose f croissante. Montrer que f est constante, ou que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
3. On suppose $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrer que $f \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$, et que f est décroissante.
4. On suppose que la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$. Montrer que la courbe est au-dessus de cette asymptote.

EXERCICE 40 ⋆⋆

Majorer f à l'aide de f''. Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. On note $M = \sup_{[a,b]} |f''|$ et, pour $x \in [a\,,b]$,
$$g(x) = f(x) - \frac{M}{2}(x-a)(b-x) \qquad \text{et} \qquad h(x) = f(x) + \frac{M}{2}(x-a)(b-x).$$

1. Justifier l'existence de M, et montrer que g est convexe et h concave.
2. En déduire que $|f(x)| \leqslant \dfrac{M}{2}(x-a)(b-x)$ pour tout $x \in [a\,,b]$, puis que $|f| \leqslant \dfrac{M(b-a)^2}{8}$.

EXERCICE 41 ⋆⋆

La concentration d'un médicament. La concentration d'un médicament dans le sang, x heures après l'injection, est modélisée par $f(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{-x/2}$, pour $x \geqslant 0$.

1. Étudier les variations et la convexité de f. Montrer que sa courbe admet un point d'inflexion, donner la tangente en ce point, et tracer la courbe avec cette tangente.
2. Au bout de combien de temps la baisse de la concentration commence-t-elle à ralentir ? Relier la réponse au point d'inflexion.
3. Plus généralement, montrer que la courbe d'une fonction polynomiale de degré 3 admet exactement un point d'inflexion A, et qu'elle est symétrique par rapport à A. On écrira le polynôme à l'aide des puissances de $x-a$, où a est l'abscisse de A.

EXERCICE 42 ⋆⋆

Algorithme de trichotomie. Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ convexe et continue. On pose $a_1 = \frac{2a+b}{3}$, $a_2 = \frac{a+2b}{3}$, et $\mu = \dfrac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1}$.

1. Si $\mu \geqslant 0$, montrer que f atteint son minimum sur $[a\,,b]$ en un point de $[a\,,a_2]$. Si $\mu \leqslant 0$, montrer qu'il l'atteint en un point de $[a_1\,,b]$.
2. Écrire une fonction Python `trichotomie(f, a, b, eps)` qui renvoie un encadrement d'amplitude inférieure à `eps` d'un point où f atteint son minimum.
3. Appliquer à $x \mapsto \mathrm{e}^x + x^2$ sur $[-1\,,0]$. Combien d'étapes faut-il pour une amplitude de 10^{-6} ?

EXERCICE 43 ⋆⋆⋆

Une hypothèse affaiblie. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

1. Montrer par récurrence sur n que, pour tous réels x et y et tout entier $k \in [\![0\,;2^n]\!]$, on a
$$f\Big(\Big(1-\frac{k}{2^n}\Big)x + \frac{k}{2^n}\,y\Big) \leqslant \Big(1-\frac{k}{2^n}\Big)f(x) + \frac{k}{2^n}\,f(y).$$
2. Montrer que tout réel $\lambda \in [0\,,1]$ est limite d'une suite de nombres de la forme $\frac{k}{2^n}$, avec $0 \leqslant k \leqslant 2^n$, et conclure que f est convexe.

EXERCICE 44 ⋆⋆⋆

Une fonction convexe est continue. Soit f convexe sur un intervalle ouvert I, et $a \in I$. On note $\tau_a : x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ le taux d'accroissement de f en a, défini sur $I \setminus \{a\}$. Comme dans le cours, on dit que f est dérivable à gauche en a si τ_a admet une limite finie à gauche en a, notée

$$f'_g(a) = \lim_{x \to a^-} \tau_a(x), \qquad \text{et de même} \qquad f'_d(a) = \lim_{x \to a^+} \tau_a(x)$$

pour la dérivée à droite.

1. Soit $u < a < v$ dans I. À l'aide du lemme des trois pentes, montrer que τ_a est borné sur $[u\,,v] \setminus \{a\}$.
2. En déduire que f est continue en a, puis que f est dérivable à gauche et à droite en a, avec $f'_g(a) \leqslant f'_d(a)$. On utilisera la monotonie de τ_a et le théorème de la limite monotone.
3. Montrer par un exemple qu'une fonction convexe sur un segment n'est pas nécessairement continue aux extrémités.

EXERCICE 45 ⋆⋆⋆

Inégalités de Young et de Hölder. Soit p et q deux réels strictement supérieurs à 1 tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

1. Montrer que, pour tous réels x, $y>0$, $xy \leqslant \dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}$, en utilisant la concavité de ln.
2. Soit $a_1,\dots,a_n$, $b_1,\dots,b_n$ des réels strictement positifs tels que $\sum a_i^p = \sum b_i^q = 1$. Montrer que $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant 1$.
3. En déduire l'inégalité de Hölder, pour tous réels strictement positifs a_i et b_i :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\Big)^{1/q}.$$

Que donne le cas $p=q=2$?

EXERCICE 46 ⋆⋆⋆

Soit $f:]0\,,+\infty[\to\mathbb{R}$ deux fois dérivable. Montrer que $x\mapsto x\,f(x)$ est convexe si et seulement si $x\mapsto f(\frac{1}{x})$ est convexe. Application : montrer que $x\mapsto x\ln x$ et $x\mapsto -\ln x$ sont convexes, et relier les deux résultats.

Exercices de synthèse

EXERCICE 47 ⋆⋆

Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

1. Si f est dérivable en a, alors f est continue sur un voisinage de a.
2. Si f est continue sur I, dérivable sur $I\setminus\{a\}$, et si $\lim\limits_{x\to a} f'(x)=\ell\in\mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a)=\ell$.
3. Une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée bornée, est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
4. Si f est dérivable et strictement croissante sur un intervalle I, alors $f'>0$ sur I.
5. La dérivée d'une fonction dérivable et paire est impaire.
6. Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.
7. Si f est convexe et dérivable sur $\mathbb{R}$, et si $f'(a)=0$, alors f admet en a un minimum global.
8. Le produit de deux fonctions convexes sur $\mathbb{R}$ est convexe.
9. Si f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et si $f''>0$, alors f a au plus un point critique.
10. Si f est dérivable sur $[a\,,b]$ et si $f(a)=f(b)$, il existe $c\in]a\,,b[$ tel que $f'(c)=0$.

EXERCICE 48 ⋆⋆

Une dérivée strictement positive en un point ne donne pas la croissance. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+2x^2\sin\frac{1}{x}$ si $x\neq 0$, et $f(0)=0$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $f'(0)$, puis $f'(x)$ pour $x\neq 0$.
2. Montrer qu'il existe $\eta>0$ tel que $f(x)<0$ pour $-\eta<x<0$ et $f(x)>0$ pour $0<x<\eta$.
3. Calculer $f'(\frac{1}{2k\pi})$ pour $k\in\mathbb{N}^*$. En déduire que, pour tout $\eta>0$, la fonction f n'est monotone sur aucun intervalle $]-\eta\,,\eta[$.
4. Soit g une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a\in I$, tels que $g'(a)>0$ et que g' soit continue en a. Montrer que g est strictement croissante sur un intervalle ouvert contenant a. Qu'en déduit-on pour la fonction f ?

EXERCICE 49 ⋆⋆

Différences finies. Soit I un intervalle tel que $t+1 \in I$ pour tout $t \in I$, par exemple $\mathbb{R}$ ou $]0\,,+\infty[$. Pour $f : I \to \mathbb{R}$, on note Δf la fonction $x \mapsto f(x+1) - f(x)$, définie sur I, puis $\Delta^0 f = f$ et $\Delta^{n+1} f = \Delta(\Delta^n f)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$,
$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+k).$$
2. Soit $n \geqslant 1$ et f une fonction n fois dérivable sur I. Montrer que, pour tout $x \in I$, il existe $c \in]x\,,x+n[$ tel que $\Delta^n f(x) = f^{(n)}(c)$. On raisonnera par récurrence sur n, en appliquant l'hypothèse de récurrence à Δf.
3. En déduire, pour $n \geqslant 1$ et $p \in [\![1\,;n]\!]$, la valeur de la somme
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p.$$
4. Soit $\alpha > 0$ un réel tel que k^α soit un entier pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que α est un entier. On appliquera la question 2 à la fonction $t \mapsto t^\alpha$ sur $]0\,,+\infty[$, avec un entier $n > \alpha$.

EXERCICE 50 ⋆⋆⋆

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(x)^2 + \left(1 + f'(x)\right)^2 \leqslant 1$ pour tout réel x. On veut montrer que f est nulle.

1. Montrer que $|f| \leqslant 1$ et que $-2 \leqslant f' \leqslant 0$. En déduire que f admet des limites finies L et L' en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Montrer qu'il existe une suite (c_n) tendant vers $+\infty$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} f'(c_n) = 0$. On appliquera l'égalité des accroissements finis sur $[n\,,n+1]$.
3. En déduire que $L = 0$, puis, de même, que $L' = 0$, et conclure.

EXERCICE 51 ⋆⋆⋆

Soit P une fonction polynomiale de degré $n \geqslant 1$, à valeurs positives sur $\mathbb{R}$, et
$$Q = P + P' + P'' + \cdots + P^{(n)}.$$
On veut montrer que Q est aussi à valeurs positives.

1. Montrer que n est pair, que le coefficient dominant de P est positif, et que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} Q(x) = +\infty$.
2. En déduire que Q admet un minimum global en un point x_0.
3. Calculer $Q - Q'$, et conclure.

EXERCICE 52 ⋆⋆⋆

Un nombre transcendant. On dit qu'un réel x est *algébrique* s'il existe une fonction polynomiale non nulle P, à coefficients entiers, telle que $P(x)=0$, et qu'il est *transcendant* sinon. Un rationnel $\frac{a}{b}$ est algébrique, racine de $t\mapsto bt-a$, de même que $\sqrt{2}$, racine de $t\mapsto t^2-2$.

1. Soit $P : t\mapsto c_nt^n+\cdots+c_1t+c_0$ une fonction polynomiale à coefficients entiers, avec $n\geqslant 1$ et $c_n\neq 0$, et x un réel tel que $P(x)=0$.
   (a) Montrer, à l'aide de l'exercice 13, que P s'annule au plus n fois sur $\mathbb{R}$. En déduire qu'il existe $\delta\in]0\,,1]$ tel que x soit le seul zéro de P sur $[x-\delta\,,x+\delta]$.
   (b) On note M le maximum de $|P'|$ sur $[x-1\,,x+1]$. Justifier son existence, et montrer que $M>0$.
   (c) Soit $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{N}^*$ tels que $\frac{a}{b}\neq x$. Montrer que $b^nP(\frac{a}{b})$ est un entier, puis que
   $$\Big|x-\frac{a}{b}\Big|\geqslant\frac{C}{b^n},\qquad\text{où}\qquad C=\min\Big(\delta,\frac{1}{M}\Big).$$
2. Pour $N\in\mathbb{N}$, on pose $s_N=\sum_{k=0}^{N}2^{-k!}$.
   (a) Montrer que la suite (s_N) converge. On note L sa limite.
   (b) Montrer que $0<L-s_N\leqslant 2\cdot 2^{-(N+1)!}$ pour tout $N\in\mathbb{N}$. On pourra vérifier que $k!\geqslant(N+1)!+k-N-1$ pour tout entier $k\geqslant N+1$.
   (c) En déduire que L est transcendant, et en particulier irrationnel.

EXERCICE 53 ⋆⋆⋆

Une fonction continue qui n'est dérivable en aucun point. Pour $n\in\mathbb{N}$, on appelle *points de rang n* les réels $\frac{j}{3^n}$, avec $j\in[\![0\,;3^n]\!]$, et l'on note $I_{n,j}=\big[\frac{j}{3^n}\,,\frac{j+1}{3^n}\big]$ pour $j\in[\![0\,;3^n-1]\!]$. On définit des fonctions continues f_n sur $[0\,,1]$, affines sur chacun des segments $I_{n,j}$, de la façon suivante. On pose $f_0(x)=x$. La fonction f_n étant construite, f_{n+1} est la fonction affine sur chaque segment $I_{n+1,i}$ qui coïncide avec f_n aux points de rang n, et qui échange les valeurs de f_n au tiers et aux deux tiers de chaque segment $I_{n,j}$: pour tout $j\in[\![0\,;3^n-1]\!]$,
$$f_{n+1}\Big(\frac{j}{3^n}+\frac{1}{3^{n+1}}\Big)=f_n\Big(\frac{j}{3^n}+\frac{2}{3^{n+1}}\Big)\qquad\text{et}\qquad f_{n+1}\Big(\frac{j}{3^n}+\frac{2}{3^{n+1}}\Big)=f_n\Big(\frac{j}{3^n}+\frac{1}{3^{n+1}}\Big).$$
1. Tracer les courbes de f_0, f_1 et f_2. Montrer que si f_n a pour pente s sur $I_{n,j}$, alors f_{n+1} a pour pentes $2s$, $-s$ et $2s$ sur les trois tiers de $I_{n,j}$. En déduire que les pentes de f_n sont non nulles, de valeur absolue au plus 2^n.
2. Montrer que $|f_{n+1}(x)-f_n(x)|\leqslant\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$ pour tout $x\in[0\,,1]$. En déduire que les suites de termes généraux $f_n(x)-(\frac{2}{3})^n$ et $f_n(x)+(\frac{2}{3})^n$ sont adjacentes, puis que $(f_n(x))$ converge vers un réel $f(x)$ tel que $|f_n(x)-f(x)|\leqslant(\frac{2}{3})^n$.
3. Montrer que f est continue sur $[0\,,1]$, et que $f(x)=f_n(x)$ pour tout point x de rang n.
4. Soit $x=\frac{j}{3^N}$ un point de rang N, avec $x<1$, et s la pente de f_N sur $I_{N,j}$. Montrer que $3^m\big(f(x+3^{-m})-f(x)\big)=2^{m-N}s$ pour tout $m\geqslant N$, et en déduire que f n'est pas dérivable en x. Que vaut $f(3^{-m})$? Traiter de même le point 1.
5. (a) Soit h une fonction définie sur un intervalle, dérivable en un point a intérieur à cet intervalle, et (ξ_n), (η_n) deux suites de réels strictement positifs de limite nulle. Montrer que
   $$\lim_{n\to+\infty}\frac{h(a+\eta_n)-h(a-\xi_n)}{\xi_n+\eta_n}=h'(a).$$
   (b) Soit $x\in]0\,,1[$ qui n'est un point d'aucun rang. On note σ_n la pente de f_n sur l'unique segment $I_{n,j}$ qui contient x. Montrer que $\sigma_{n+1}\in\{2\sigma_n,-\sigma_n\}$, puis que f n'est pas dérivable en x.

EXERCICE 54 ⋆⋆⋆⋆

Les dérivées secondes contrôlent les dérivées premières. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, telle que f et f'' soient bornées. On note $M_0 = \sup_{\mathbb{R}} |f|$ et $M_2 = \sup_{\mathbb{R}} |f''|$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. On choisit le réel K tel que la fonction

$$\varphi : t \mapsto f(x+t) - f(x) - t\, f'(x) - \frac{t^2}{2} K$$

s'annule en $t = h$. En appliquant deux fois le théorème de Rolle, montrer qu'il existe $c \in]x\,, x+h[$ tel que $K = f''(c)$, c'est-à-dire

$$f(x+h) = f(x) + h\, f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(c).$$

2. Établir de même une égalité analogue pour $f(x-h)$, puis en déduire que $|f'(x)| \leqslant \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{h\, M_2}{2}$.
3. En déduire que f' est bornée et, si $M_2 > 0$, que $\sup_{\mathbb{R}} |f'| \leqslant \sqrt{2 M_0 M_2}$, en choisissant h au mieux.
4. Que dire si $M_2 = 0$?

EXERCICE 55 ⋆⋆⋆⋆

Un polynôme qui rencontre trop souvent le cosinus. Soit P une fonction polynomiale telle que l'équation $P(x) = \cos x$ ait une infinité de solutions réelles. On veut montrer que P est constante. On suppose le contraire, et l'on note $d \geqslant 1$ le degré de P et $g = P - \cos$.

1. Montrer que $|P(x)| > 1$ pour $|x|$ assez grand. En déduire que les solutions sont toutes dans un segment, et qu'il existe une suite (x_n) de solutions deux à deux distinctes qui converge vers un réel c. On utilisera le théorème de Bolzano-Weierstrass.
2. Montrer par récurrence sur k, à l'aide du théorème de Rolle, que pour tout $k \in \mathbb{N}$ la fonction $g^{(k)}$ s'annule en une suite de points deux à deux distincts qui converge vers c, et en déduire que $g^{(k)}(c) = 0$.
3. Conclure, en considérant $g^{(d+1)}(c)$ et $g^{(d+2)}(c)$.