CORRIGÉ – CHAPITRE 10

ANALYSE ASYMPTOTIQUE ET DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

⋆ *application directe* ⋆⋆ *mise en œuvre* ⋆⋆⋆ *problème* ⋆⋆⋆⋆ *problème long, en autonomie*

Relations de comparaison

EXERCICE 1 ⋆

On utilise la caractérisation par le quotient (proposition 4 du cours) : $u_n \sim v_n$ si et seulement si $\frac{u_n}{v_n}$ tend vers 1.

(a) $\frac{n}{n+1}$ tend vers 1 : $\boxed{\text{vrai}}$. **(b)** $\frac{n^2}{n^2+n} = \frac{1}{1+1/n}$ tend vers 1 : $\boxed{\text{vrai}}$.

(c) $\frac{\ln(10^6 n)}{\ln n} = 1 + \frac{6\ln 10}{\ln n}$ tend vers 1 : $\boxed{\text{vrai}}$. Le facteur 10^6, énorme, ne devient qu'une constante additive après le logarithme.

(d) $\frac{\mathrm{e}^{n+10^{-6}}}{\mathrm{e}^n} = \mathrm{e}^{10^{-6}}$ est constant, différent de 1 : $\boxed{\text{faux}}$, même si ce rapport vaut environ 1,000 001.

(e) $\frac{\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^{2n}} = \mathrm{e}^{-n}$ tend vers 0 : $\boxed{\text{faux}}$, et l'on a même $\mathrm{e}^n = o(\mathrm{e}^{2n})$.

(f) $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}$ tend vers 1 : $\boxed{\text{vrai}}$.

À retenir. Les questions (c) et (d) montrent que le logarithme écrase les facteurs multiplicatifs, alors que l'exponentielle amplifie les écarts additifs : il ne faut jamais composer un équivalent par exp sans vérification.

EXERCICE 2 ⋆

On remplace chaque expression par son terme prépondérant, en utilisant les règles de calcul (proposition 3) et la transitivité de $\sim$.

(a) Comme $\frac{1}{12n^2} = o\left(\frac{1}{2n}\right)$, on a $\frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} \sim \frac{1}{2n}$, donc $\boxed{u_n \sim \frac{1}{2n}}$.

(b) Le quotient est équivalent à $\frac{n^2}{3n^3} = \frac{1}{3n}$: $\boxed{u_n \sim \frac{1}{3n}}$.

(c) Le quotient est équivalent à $\frac{n^2}{-n^3}$: $\boxed{u_n \sim -\frac{1}{n}}$.

(d) Un $o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ est un $o\left(\frac{1}{n}\right)$: $\boxed{u_n = 1 + o\left(\frac{1}{n}\right)}$. On ne gagne rien à conserver le second terme, qui est absorbé par le premier.

(e) Les trois termes sont des $o\left(\frac{1}{\ln n}\right)$, puisque $\frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n}$ sont négligeables devant $\frac{1}{\ln n}$. On conclut que $\boxed{u_n = o\left(\frac{1}{\ln n}\right)}$. Le signe moins ne change rien, un o n'ayant pas de signe.

(f) La différence de deux $o(n)$ est un $o(n)$, et non 0 : $\boxed{u_n = o(n)}$.

(g) Un $o(n)$ est un $O(n)$: $\boxed{u_n = O(n)}$.

(h) C'est la définition de l'équivalence : $\boxed{u_n \sim v_n}$.

Piège. L'erreur la plus répandue est d'écrire $o(n) - o(n) = 0$: chaque o désigne une suite inconnue, et les deux suites n'ont aucune raison d'être égales.

EXERCICE 3 ⋆

(a) On réduit au même dénominateur : $\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{2}{n^2-1}$, d'où $\boxed{\sim \dfrac{2}{n^2}}$.

(b) Par la quantité conjuguée, $\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}=\dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$, et le dénominateur est équivalent à $2\sqrt{n}$, d'où $\boxed{\sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}}$.

(c) Le numérateur est équivalent à n^3, le dénominateur à $-2n^2$: $\boxed{\sim -\dfrac{n}{2}}$.

(d) Comme $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ tend vers 0, $\sin\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\sim\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\sim\dfrac{1}{\sqrt{n}}$: $\boxed{\sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}}$.

(e) De même, $\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2+1}\right)\sim\dfrac{1}{n^2+1}$: $\boxed{\sim \dfrac{1}{n^2}}$.

(f) On écrit $\ln(n+2)-\ln(n+1)=\ln\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)$, qui est équivalent à $\boxed{\dfrac{1}{n}}$. Il serait faux de dire que $\ln(n+2)\sim\ln(n+1)$ suffit : on ne soustrait pas des équivalents.

(g) On a $\mathrm{e}^n=o(n!)$ et $2^n=o(3^n)$ (chapitre 7), d'où $\boxed{\sim \dfrac{n!}{3^n}}$.

(h) On a $n^2=o(2^n)$, d'où $\boxed{\sim \left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^n}$, qui tend vers 0 puisque $2<\mathrm{e}$.

EXERCICE 4 ⋆

(a) En 0^+, $\ln x$ tend vers $-\infty$ et domine : $x+1+\ln x\sim\ln x$. En $+\infty$, x domine par croissances comparées : $x+1+\ln x\sim x$.

$$\boxed{x+1+\ln x \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln x, \qquad x+1+\ln x \underset{x\to+\infty}{\sim} x}$$

(b) On factorise : $1-x^2=(1-x)(1+x)\sim 2(1-x)$ en 1. $\boxed{\sim 2(1-x)}$

(c) On pose $x=1+h$: $\ln(1+h)\sim h$, donc $\boxed{\ln x \underset{x\to 1}{\sim} x-1}$.

(d) $\operatorname{ch}\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\right)$, et $\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}=o(\mathrm{e}^{\sqrt{x}})$: $\boxed{\sim \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}$.

(e) Par produit et quotient d'équivalents usuels, $\dfrac{x\cdot x^2}{x\cdot x}=x^2$: $\boxed{\sim x^2}$.

(f) On écrit $\ln(\sin x)=\ln x+\ln\dfrac{\sin x}{x}$. Le second terme tend vers $\ln 1=0$, alors que $\ln x$ tend vers $-\infty$: $\boxed{\ln(\sin x)\underset{x\to 0^+}{\sim}\ln x}$.

(g) En 0, $\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=\ln(1+x^2)-2\ln|x|$, et le premier terme tend vers 0 : l'expression est équivalente à $-2\ln|x|$. En $+\infty$, $\dfrac{1}{x^2}$ tend vers 0, donc elle est équivalente à $\dfrac{1}{x^2}$.

$$\boxed{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\underset{x\to 0}{\sim}-2\ln|x|, \qquad \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{x^2}}$$

(h) Par la quantité conjuguée, $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\sim\dfrac{2}{2x}$: $\boxed{\sim\dfrac{1}{x}}$.

(i) On factorise : $\tan x-\sin x=\tan x\,(1-\cos x)\sim x\cdot\dfrac{x^2}{2}$: $\boxed{\sim\dfrac{x^3}{2}}$. La factorisation remplace une différence, interdite, par un produit, autorisé.

(j) On pose $h=\dfrac{\pi}{2}-x\to 0^+$: $\cos x=\sin h$, et $\ln(\sin h)\sim\ln h$ par (f). $\boxed{\ln(\cos x)\sim\ln\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}$

EXERCICE 5 ⋆

(a) Le numérateur est équivalent à $\dfrac{x^2}{2} \times 1$, le dénominateur à x^2 : $\boxed{\dfrac{1}{2}}$.

(b) On a $\ln(1+\sin x) \sim \sin x \sim x$ par substitution, et $\tan(6x) \sim 6x$: $\boxed{\dfrac{1}{6}}$.

(c) On pose $h = \dfrac{\pi}{2} - x$: $\sin^2 x = \cos^2 h = 1 - \sin^2 h$, et $\ln(1-\sin^2 h) \sim -\sin^2 h \sim -h^2$: $\boxed{-1}$.

(d) On a $\ln(\cos x) \sim -\dfrac{x^2}{2}$ (cours, section 10.2) et $1 - \cos(2x) \sim 2x^2$: $\boxed{-\dfrac{1}{4}}$.

(e) Le réel $u = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}$ tend vers 0, et $u \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, donc $\ln(1-u) \sim -u \sim -\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Comme $\sqrt{4x+1} \sim 2\sqrt{x}$, le produit est équivalent à -2 : $\boxed{-2}$.

(f) On factorise par la seconde exponentielle : $\mathrm{e}^{1/x^2} - \mathrm{e}^{1/(x+1)^2} = \mathrm{e}^{1/(x+1)^2}(\mathrm{e}^v - 1)$, avec

$$v = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} \sim \frac{2}{x^3}.$$

Comme v tend vers 0, $\mathrm{e}^v - 1 \sim v$, et le premier facteur tend vers 1 : l'expression est équivalente à $\dfrac{2}{x^3}$, et la limite vaut $\boxed{2}$.

EXERCICE 6 ⋆⋆

On compare deux à deux les termes voisins par leurs quotients, à l'aide des croissances comparées :

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{1}{n^2} \ll \frac{1}{n\ln n} \ll \frac{1}{n} \ll \frac{\ln n}{n} \ll 1 \\ &\ll n \ll n\ln n \ll \frac{n^2}{\ln n} \ll \sqrt{n\,\mathrm{e}^n} \ll \frac{\mathrm{e}^n}{n^3} \end{aligned}}$$

où $u_n \ll v_n$ signifie $u_n = o(v_n)$. Les comparaisons délicates sont les suivantes :

$$\frac{1/n^2}{1/(n\ln n)} = \frac{\ln n}{n} \to 0, \qquad \frac{1/(n\ln n)}{1/n} = \frac{1}{\ln n} \to 0, \qquad \frac{n\ln n}{n^2/\ln n} = \frac{(\ln n)^2}{n} \to 0.$$

Enfin $\dfrac{\mathrm{e}^n/n^3}{\sqrt{n\,\mathrm{e}^n}} = \dfrac{\mathrm{e}^{n/2}}{n^{7/2}} \to +\infty$: la racine carrée divise l'exposant par deux, ce qui l'emporte sur toute puissance de n.

EXERCICE 7 ⋆⋆

Pour $n \geqslant 2$, on isole les deux derniers termes :

$$\sum_{k=0}^{n} k! = n! + (n-1)! + \sum_{k=0}^{n-2} k!, \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-2} k! \leqslant (n-1)(n-2)! = (n-1)!,$$

puisque la somme comporte $n-1$ termes, tous majorés par $(n-2)!$. Ainsi $n! \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \leqslant n! + 2(n-1)!$, et en divisant par $n!$,

$$1 \leqslant \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k! \leqslant 1 + \frac{2}{n}.$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k! \sim n!}$$

La factorielle croît si vite que le dernier terme écrase la somme de tous les précédents. Ce n'est pas le cas pour une suite géométrique de raison 2, où $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \sim 2 \cdot 2^n$.

EXERCICE 8 ⋆⋆

1. Les fonctions e^f et e^g ne s'annulent pas, donc $\mathrm{e}^f \sim \mathrm{e}^g$ si et seulement si $\dfrac{\mathrm{e}^f}{\mathrm{e}^g} = \mathrm{e}^{f-g}$ tend vers 1. Par continuité de exp et de ln en 0 et en 1, cela équivaut à $f - g \to 0$.

$$\boxed{\mathrm{e}^f \sim \mathrm{e}^g \iff \lim_{x\to a}(f-g) = 0}$$

2. Non : en $+\infty$, $x+1 \sim x$, mais la différence $(x+1)-x = 1$ ne tend pas vers 0, donc, par la question 1, e^{x+1} n'est pas équivalent à e^x. La réponse est non.

3. On écrit $f = (1+\varepsilon)g$, d'où $\ln f = \ln g + \ln(1+\varepsilon)$, avec $\ln(1+\varepsilon) \to 0$. Si $\ell \in [0\,,+\infty]$ et $\ell \neq 1$, alors $\ln g$ tend vers $\ln \ell \neq 0$ ou vers $\pm\infty$; dans les deux cas, $\dfrac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln g}$ tend vers 0, et

$$\frac{\ln f}{\ln g} = 1 + \frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln g} \longrightarrow 1, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\ln f \sim \ln g \text{ si } \ell \neq 1}$$

Si $\ell = 1$, le résultat est faux : en 0, $1+x \sim 1+2x$, mais $\ln(1+x) \sim x$ et $\ln(1+2x) \sim 2x$ ne sont pas équivalents. Le logarithme transforme un écart relatif petit en un écart absolu petit, qui n'est négligeable que si le logarithme lui-même ne tend pas vers 0.

EXERCICE 9 ⋆⋆

1. Par la quantité conjuguée,

$$2\Big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\Big) = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Comme $2\sqrt{n} \leqslant \sqrt{n+1}+\sqrt{n} \leqslant 2\sqrt{n+1}$, on obtient

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2\Big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\Big) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}}$$

2. La majoration, sommée de $k=1$ à n, donne $S_n \geqslant 2\Big(\sqrt{n+1}-1\Big)$, par télescopage. La minoration, appliquée à $k-1$ pour $2 \leqslant k \leqslant n$, donne $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\Big(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\Big)$, d'où $S_n \leqslant 1 + 2\Big(\sqrt{n}-1\Big)$. Ainsi

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant S_n \leqslant 2\sqrt{n} - 1.$$

Les deux bornes sont équivalentes à $2\sqrt{n}$, et la proposition 6 (encadrement) donne $\boxed{S_n \sim 2\sqrt{n}}$. En particulier, S_n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 10 ⋆⋆

1. On prend la moyenne géométrique $w_n = \sqrt{u_n v_n}$. Alors $\dfrac{u_n}{w_n} = \sqrt{\dfrac{u_n}{v_n}}$ et $\dfrac{w_n}{v_n} = \sqrt{\dfrac{u_n}{v_n}}$ tendent vers 0 : $\boxed{w_n = \sqrt{u_n v_n} \text{ convient}}$.

2. On prend $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$. Pour $\alpha > 0$, $\dfrac{x^\alpha}{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}} = \dfrac{t^{2\alpha}}{\mathrm{e}^t}$ avec $t = \sqrt{x}$, qui tend vers 0 ; et $\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\mathrm{e}^{\alpha x}} = \mathrm{e}^{\sqrt{x}-\alpha x}$ tend vers 0, puisque $\sqrt{x} - \alpha x \sim -\alpha x$. $\boxed{f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \text{ convient}}$

3. On prend $f(x) = \dfrac{1}{1-\ln x}$ pour $0 < x \leqslant 1$, et $f(0) = 0$. Elle est continue sur $]0\,,1]$, et en 0 puisque $1 - \ln x$ tend vers $+\infty$. Pour $\alpha > 0$, $\dfrac{x^\alpha}{f(x)} = x^\alpha - x^\alpha \ln x$ tend vers 0 par croissances comparées.

$\boxed{f(x) = \dfrac{1}{1-\ln x} \text{ convient}}$ Elle tend vers 0 plus lentement que toute puissance de x.

EXERCICE 11 ⋆⋆⋆

1. Pour $n > N$, on sépare les indices $k \leqslant N$ et $k > N$:

$$|U_n - V_n| \leqslant |U_N - V_N| + \sum_{k=N+1}^{n} |u_k - v_k| \leqslant |U_N - V_N| + \varepsilon \sum_{k=N+1}^{n} v_k \leqslant |U_N - V_N| + \varepsilon V_n,$$

puisque les v_k sont positifs. $\boxed{|U_n - V_n| \leqslant |U_N - V_N| + \varepsilon V_n}$

2. On divise par $V_n > 0$: $\left|\dfrac{U_n}{V_n} - 1\right| \leqslant \dfrac{|U_N - V_N|}{V_n} + \varepsilon$. Comme V_n tend vers $+\infty$, le premier terme est inférieur à ε pour n assez grand, et $\left|\dfrac{U_n}{V_n} - 1\right| \leqslant 2\varepsilon$. $\boxed{U_n \sim V_n}$

3. Comme $\sin\dfrac{1}{k} \sim \dfrac{1}{k}$ et $\ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right) \sim \dfrac{1}{k}$, avec des termes positifs, et que la somme harmonique tend vers $+\infty$,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{1}{k} \sim \ln n, \qquad \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \sim \ln n}$$

Pour la seconde, la somme est télescopique : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln k\big) = \ln(n+1) \sim \ln n$.

4. Non. Si $u_1 = 1$, $v_1 = 2$ et $u_k = v_k = \dfrac{1}{2^k}$ pour $k \geqslant 2$, alors $u_n \sim v_n$, mais U_n et V_n tendent vers $\dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{5}{2}$, et ne sont pas équivalentes. $\boxed{\text{Le résultat tombe en défaut.}}$ Lorsque la somme converge, les premiers termes comptent autant que les derniers, et l'équivalence, qui ne contrôle que les derniers, ne suffit plus.

EXERCICE 12 ⋆⋆⋆

Comme (u_n) est décroissante, $u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant u_{n-1}$, donc, pour $n \geqslant 2$,

$$u_n + u_{n+1} \leqslant 2u_n \leqslant u_{n-1} + u_n.$$

Le membre de gauche est équivalent à $\dfrac{1}{n}$, et celui de droite à $\dfrac{1}{n-1} \sim \dfrac{1}{n}$, par substitution. Par encadrement (proposition 6), $2u_n \sim \dfrac{1}{n}$.

$$\boxed{u_n \sim \frac{1}{2n}}$$

Piège. Sans l'hypothèse de monotonie, le résultat est faux : la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{2n} + (-1)^n$ vérifie $u_n + u_{n+1} = \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2(n+1)} \sim \dfrac{1}{n}$, mais elle ne tend même pas vers 0.

EXERCICE 13 ⋆

On utilise les développements usuels du théorème 5 et le théorème 2, en tronquant au fur et à mesure.

(a) $\dfrac{1}{1-x} - \mathrm{e}^x = (1+x+x^2+x^3) - \left(1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}\right) + o(x^3)$:

$$\boxed{\frac{1}{1-x} - \mathrm{e}^x = \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + o(x^3)}$$

(b) Avec $\sqrt{1 \pm x} = 1 \pm \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} \pm \dfrac{x^3}{16} - \dfrac{5x^4}{128} + o(x^4)$, les termes impairs se compensent :

$$\boxed{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 2 - \frac{x^2}{4} - \frac{5x^4}{64} + o(x^4)}$$

(c) On linéarise d'abord : $\sin x \cos(2x) = \dfrac{1}{2}\big(\sin(3x) - \sin x\big)$. Le développement de sin donne

$$\boxed{\sin x \cos(2x) = x - \frac{13x^3}{6} + \frac{121x^5}{120} + o(x^6)}$$

le coefficient de x^6 étant nul par imparité.

(d) $\left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)\left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4}\right)$, tronqué à l'ordre 4, donne

$$\boxed{\cos x \, \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}$$

le coefficient de x^4 valant $-\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = 0$.

(e) Avec $\sqrt{1-x} = 1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x^3}{16} + o(x^3)$, le facteur x^3 ne contribue que par $x^3 \times 1$:

$$\boxed{(x^3+1)\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{15x^3}{16} + o(x^3)}$$

(f) Comme $\ln(1+x) = O(x)$, il suffit de le connaître à l'ordre 3 pour obtenir son carré à l'ordre 4 :

$$\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)^2 + o(x^4), \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\big(\ln(1+x)\big)^2 = x^2 - x^3 + \frac{11x^4}{12} + o(x^4)}$$

EXERCICE 14 ⋆

(a) On remarque que $\dfrac{1}{1+x+x^2} = \dfrac{1-x}{1-x^3} = (1-x)(1+x^3+o(x^4))$:

$$\boxed{\frac{1}{1+x+x^2} = 1-x+x^3-x^4+o(x^4)}$$

La méthode générale, en composant $\dfrac{1}{1+u}$ avec $u = x+x^2$, donne le même résultat, plus péniblement.

(b) On a $\cos x + 1 = 2\Big(1 - \dfrac{x^2}{4} + o(x^2)\Big)$, donc

$$\frac{1}{\cos x + 1} = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{x^2}{4} + o(x^2)\Big),$$

et $\sin x - 1 = -1 + x + o(x^2)$:

$$\boxed{\frac{\sin x - 1}{\cos x + 1} = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)}$$

(c) Le numérateur et le dénominateur commencent tous deux par x, que l'on simplifie : il faut donc les connaître à l'ordre 4. On écrit

$$\frac{\ln(1+x)}{\sin x} = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)} = \Big(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\Big)\Big(1 + \frac{x^2}{6}\Big) + o(x^3),$$

$$\boxed{\frac{\ln(1+x)}{\sin x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}$$

(d) Le facteur x permet de s'arrêter à l'ordre 3 pour e^{-x} et pour $\dfrac{1}{1+2x} = 1-2x+4x^2-8x^3+o(x^3)$:

$$\boxed{\frac{x\,\mathrm{e}^{-x}}{2x+1} = x - 3x^2 + \frac{13x^3}{2} - \frac{79x^4}{6} + o(x^4)}$$

EXERCICE 15 ⋆⋆

(a) On a $\dfrac{\sin x}{x} = 1 + u$ avec $u = -\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^4}{120} + o(x^4) = O(x^2)$, donc $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + o(x^4)$, avec $u^2 = \dfrac{x^4}{36} + o(x^4)$:

$$\boxed{\ln\Big(\frac{\sin x}{x}\Big) = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4)}$$

(b) On écrit $(\cos x)^{\sin x} = \exp(v)$ avec $v = \sin x \ln(\cos x)$. Avec $\ln(\cos x) = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} + o(x^4)$ (cours) et $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$,

$$v = -\frac{x^3}{2} + \Big(\frac{1}{12} - \frac{1}{12}\Big)x^5 + o(x^5) = -\frac{x^3}{2} + o(x^5).$$

Comme $v^2 = O(x^6)$, $\exp(v) = 1 + v + o(x^5)$:

$$\boxed{(\cos x)^{\sin x} = 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^5)}$$

(c) On écrit $(1+x)^{1/x} = \exp\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right) = \mathrm{e}\cdot \mathrm{e}^{w}$, avec

$$w = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3).$$

Alors $w^2 = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ et $w^3 = -\dfrac{x^3}{8} + o(x^3)$, d'où

$$\boxed{(1+x)^{1/x} = \mathrm{e}\Big(1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24} - \frac{7x^3}{16}\Big) + o(x^3)}$$

On retrouve la limite e du chapitre 8, atteinte par valeurs inférieures quand $x \to 0^+$.

(d) On a $1+\sqrt{1+x} = 2(1+u)$ avec $u = \dfrac{x}{4} - \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{x^3}{32} + o(x^3)$, puis $\sqrt{1+u} = 1 + \dfrac{u}{2} - \dfrac{u^2}{8} + \dfrac{u^3}{16} + o(u^3)$, avec $u^2 = \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{x^3}{32} + o(x^3)$ et $u^3 = \dfrac{x^3}{64} + o(x^3)$:

$$\boxed{\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{2}\Big(1 + \frac{x}{8} - \frac{5x^2}{128} + \frac{21x^3}{1024}\Big) + o(x^3)}$$

(e) On a $\ln(\operatorname{ch} x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} + o(x^4)$, d'où $\dfrac{\ln(\operatorname{ch} x)}{x} = \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^3}{12} + o(x^3)$. Le facteur x impose de connaître l'exponentielle à l'ordre 3 :

$$(\operatorname{ch} x)^{1/x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3), \qquad \boxed{x(\operatorname{ch} x)^{1/x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{16} + o(x^4)}$$

(f) On écrit $\mathrm{e}^{\cos x} = \mathrm{e}\cdot \mathrm{e}^{u}$ avec $u = \cos x - 1 = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$:

$$\boxed{\mathrm{e}^{\cos x} = \mathrm{e}\Big(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6}\Big) + o(x^4)}$$

Piège. L'erreur la plus répandue est de composer directement exp avec $\cos x$, qui ne tend pas vers 0 : la proposition 11 exige que la fonction intérieure tende vers 0. On se ramène toujours à ce cas en mettant en facteur la limite, ici e^1.

EXERCICE 16 ⋆

On pose $x = a + h$ et l'on développe en h, en se ramenant aux développements usuels :

$$\frac{1}{2+h} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+h/2}, \qquad \ln(2+h) = \ln 2 + \ln\Big(1+\frac{h}{2}\Big), \qquad \mathrm{e}^{1+h} = \mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{h},$$

$$\cos\Big(\frac{\pi}{3}+h\Big) = \frac{1}{2}\cos h - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin h, \qquad \sqrt{2+h} = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{h}{2}}.$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{h}{4} + \dfrac{h^2}{8} - \dfrac{h^3}{16} + o(h^3), & \ln x = \ln 2 + \dfrac{h}{2} - \dfrac{h^2}{8} + \dfrac{h^3}{24} + o(h^3), \\ \mathrm{e}^x = \mathrm{e}\Big(1 + h + \dfrac{h^2}{2} + \dfrac{h^3}{6}\Big) + o(h^3), & \cos x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}h - \dfrac{h^2}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{12}h^3 + o(h^3), \\ \sqrt{x} = \sqrt{2}\Big(1 + \dfrac{h}{4} - \dfrac{h^2}{32} + \dfrac{h^3}{128}\Big) + o(h^3) & \end{array}}$$

avec chaque fois $h = x - a$, où a est le point considéré.

EXERCICE 17 ⋆⋆

1. On primitive à l'ordre 4 les dérivées, obtenues à partir de $(1+y)^{-1/2} = 1 - \frac{y}{2} + \frac{3y^2}{8} + o(y^2)$:

$$\mathrm{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -1 - \frac{x^2}{2} - \frac{3x^4}{8} + o(x^4),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4).$$

Avec les constantes $\mathrm{Arccos}\,0 = \frac{\pi}{2}$ et $\ln 1 = 0$, le théorème 3 donne

$$\boxed{\mathrm{Arccos}\,x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} + o(x^5), \qquad \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)}$$

La dérivée de $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ se calcule par composition : $\dfrac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Cette fonction est la réciproque de sh.

2. La dérivée de $u : x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$ est $\dfrac{2}{(1-x)^2}$, et $1+u^2 = \dfrac{2(1+x^2)}{(1-x)^2}$, d'où

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{1+u(x)^2} = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4).$$

Avec $f(0) = \mathrm{Arctan}\,1 = \frac{\pi}{4}$, on obtient $\boxed{f(x) = \frac{\pi}{4} + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)}$. On reconnaît le développement de $\frac{\pi}{4} + \mathrm{Arctan}\,x$: en effet, f et $x \mapsto \frac{\pi}{4} + \mathrm{Arctan}\,x$ ont même dérivée sur l'intervalle $]-\infty, 1[$ et même valeur en 0.

$$\boxed{f(x) = \frac{\pi}{4} + \mathrm{Arctan}\,x \text{ sur }]-\infty, 1[}$$

EXERCICE 18 ⋆⋆

Dans les trois cas, $t = \dfrac{1}{x}$ tend vers 0^+.

1. $\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} = \sqrt{1+2t} = 1 + t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{2} + o(t^3)$, d'où

$$\boxed{\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3} + o\Big(\frac{1}{x^3}\Big)}$$

2. Pour $x > 0$, $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \ln x = \ln\left(1+\sqrt{1+t^2}\right)$. Or $1+\sqrt{1+t^2} = 2\Big(1+\dfrac{t^2}{4} - \dfrac{t^4}{16} + o(t^4)\Big)$, et $\ln(1+v) = v - \dfrac{v^2}{2} + o(v^2)$ avec $v = O(t^2)$:

$$\boxed{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \ln x \underset{x\to+\infty}{=} \ln 2 + \frac{1}{4x^2} - \frac{3}{32x^4} + o\Big(\frac{1}{x^4}\Big)}$$

3. Pour $x > 0$, $\mathrm{Arctan}\,x = \dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\,t$ (chapitre 5), et le développement de Arctan en 0 donne

$$\boxed{\mathrm{Arctan}\,x \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)x^{2k+1}} + o\Big(\frac{1}{x^{2n+1}}\Big)}$$

avec même un reste en $o\Big(\dfrac{1}{x^{2n+2}}\Big)$. Les premiers termes sont $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3x^3}$.

EXERCICE 19 ⋆⋆

La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en a (théorème 4) donne

$$f(a \pm h) = f(a) \pm f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + o(h^2).$$

En ajoutant,

$$f(a+h)-2f(a)+f(a-h) = f''(a)h^2+o(h^2), \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2} = f''(a)}$$

Pour la seconde limite, on applique la formule à f à l'ordre 2, et à f', de classe $\mathcal{C}^1$, à l'ordre 1 :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) + \frac{f''(0)}{2}x + o(x), \qquad f'(x) = f'(0) + f''(0)x + o(x).$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\Big(f'(x) - \frac{f(x)-f(0)}{x}\Big) = \frac{f''(0)}{2}}$$

Le premier quotient est la version symétrique de la dérivée seconde, utilisée en analyse numérique pour l'approcher.

EXERCICE 20 ⋆⋆

Par la formule de Taylor-Young et l'imparité (proposition 9), $f(x) = ax+bx^3+o(x^3)$ avec $a = f'(0)$ et $b = \dfrac{f'''(0)}{6}$. Par substitution,

$$f(x) - 2f(2x) + f(3x) = a(1-4+3)x + b(1-16+27)x^3 + o(x^3) = 12bx^3 + o(x^3).$$

De même, le dénominateur vaut $12b'x^3 + o(x^3)$ avec $b' = \dfrac{g'''(0)}{6} \neq 0$: il est équivalent à $12b'x^3$, et

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-2f(2x)+f(3x)}{g(x)-2g(2x)+g(3x)} = \frac{f'''(0)}{g'''(0)}}$$

Les coefficients 1, -2, 1 ont été choisis pour annuler le terme en x : c'est le même mécanisme que dans l'exercice 19.

EXERCICE 21 ⋆⋆

1. Pour $m \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{1+y} = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} (-1)^k y^k + o(y^m)$, et la substitution $y = x^6$ donne

$$\frac{x^4}{1+x^6} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k x^{6k+4} + o(x^{6m+4}).$$

La fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et l'unicité du développement identifie les coefficients aux $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$:

$$\boxed{f^{(n)}(0) = (-1)^k\, n! \text{ si } n = 6k+4, \qquad f^{(n)}(0) = 0 \text{ sinon}}$$

Ainsi $f^{(4)}(0) = 24$, $f^{(10)}(0) = -10!$, et les autres dérivées d'ordre au plus 9 sont nulles en 0 : aucun calcul de dérivée n'a été nécessaire.

2. On a $\sin x = x(1+O(x^2))$, donc $\sin^p x = x^p(1+O(x^2))^p = x^p + o(x^p)$. Par identification,

$$\boxed{g^{(k)}(0) = 0 \text{ pour } 0 \leqslant k < p, \qquad g^{(p)}(0) = p!}$$

EXERCICE 22 ⋆⋆

1. On part de $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^6)$, et l'on élève au carré à l'ordre 6 :

$$\tan^2 x = x^2 + \frac{2x^4}{3} + \Big(\frac{1}{9} + \frac{4}{15}\Big)x^6 + o(x^6) = x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{17x^6}{45} + o(x^6).$$

Comme $\tan^2$ est paire, le reste est même un $o(x^7)$. Ainsi $\tan' x = 1 + x^2 + \dfrac{2x^4}{3} + \dfrac{17x^6}{45} + o(x^7)$, et la primitivation, avec $\tan 0 = 0$, donne

$$\boxed{\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^8)}$$

2. On répète le procédé : on part de $a = (0, 1, 0, \dots)$, on calcule les coefficients de $1+\tan^2$ jusqu'au degré $n-1$, puis on primitive. Chaque passage fixe au moins un coefficient de plus, donc n passages suffisent :

```
from fractions import Fraction

def dl_tan(n):
    a = [Fraction(0)] * (n + 1)      # a[k] : coefficient de x^k
    if n >= 1:
        a[1] = Fraction(1)           # tan x = x + o(x)
    for _ in range(n):               # chaque passage gagne un ordre
        # carre tronque, puis 1 + tan^2, puis primitive nulle en 0
        carre = [sum(a[i] * a[k - i] for i in range(k + 1))
                 for k in range(n)]
        derivee = [Fraction(int(k == 0)) + carre[k] for k in range(n)]
        a = [Fraction(0)] + [derivee[k] / (k + 1) for k in range(n)]
    return a
```

L'appel `dl_tan(9)` renvoie les coefficients $0, 1, 0, \dfrac{1}{3}, 0, \dfrac{2}{15}, 0, \dfrac{17}{315}, 0, \dfrac{62}{2835}$, conformes à la question 1.

EXERCICE 23 ⋆⋆

On pose $R(x) = \mathrm{e}^x - \displaystyle\sum_{k=0}^{11} \frac{x^k}{k!}$. Par le développement de exp à l'ordre 12, $R(x) = \dfrac{x^{12}}{12!} + o(x^{12})$. Alors

$$\ln\Big(\sum_{k=0}^{11} \frac{x^k}{k!}\Big) = \ln\left(\mathrm{e}^x - R(x)\right) = x + \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x}R(x)\right),$$

et $\mathrm{e}^{-x}R(x) = \dfrac{x^{12}}{12!} + o(x^{12})$ tend vers 0, donc $\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x}R(x)\right) = -\dfrac{x^{12}}{12!} + o(x^{12})$.

$$\boxed{\ln\Big(\sum_{k=0}^{11} \frac{x^k}{k!}\Big) = x - \frac{x^{12}}{12!} + o(x^{12})}$$

Un calcul direct, en composant $\ln(1+u)$ avec un polynôme de degré 11, serait interminable : tous les termes intermédiaires se compensent.

EXERCICE 24 ⋆⋆⋆

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, avec $f'(x) = (1+2x^2)\mathrm{e}^{x^2} > 0$; elle est strictement croissante, de limites $\pm\infty$ en $\pm\infty$, et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Comme f' ne s'annule pas, f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (chapitre 9, proposition 4). Enfin f est impaire, donc f^{-1} aussi : si $y = f(x)$, alors $-y = f(-x)$.
$\boxed{f^{-1} \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ et impaire}}$

2. Par la formule de Taylor-Young et la proposition 9, $f^{-1}(y) = ay + by^3 + cy^5 + o(y^5)$. Comme $f(x) = x + x^3 + \dfrac{x^5}{2} + o(x^5)$ tend vers 0, on peut composer :

$$x = f^{-1}(f(x)) = ax + (a+b)x^3 + \Big(\frac{a}{2} + 3b + c\Big)x^5 + o(x^5),$$

où l'on a utilisé $f(x)^3 = x^3 + 3x^5 + o(x^5)$. Par unicité, $a = 1$, $a + b = 0$ et $\dfrac{a}{2} + 3b + c = 0$.

$$\boxed{f^{-1}(y) = y - y^3 + \frac{5}{2}y^5 + o(y^5)}$$

3. La fonction $g : x \mapsto 2x + \sin x$ a pour dérivée $2 + \cos x \geqslant 1$: c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, de réciproque $\mathcal{C}^\infty$ et impaire, de la forme $ay + by^3 + o(y^3)$. Avec $g(x) = 3x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$, l'égalité $g^{-1}(g(x)) = x$ donne $3a = 1$ et $-\dfrac{a}{6} + 27b = 0$.

$$\boxed{g^{-1}(y) = \frac{y}{3} + \frac{y^3}{486} + o(y^3)}$$

EXERCICE 25 ⋆⋆⋆

1. Pour $|x| < 1$, la dérivée d'un quotient donne

$$f'(x) = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x \operatorname{Arcsin} x}{(1-x^2)^{3/2}}, \qquad \text{donc} \qquad (1-x^2)f'(x) = 1 + x\,f(x).$$

$$\boxed{(1-x^2)f' - xf = 1}$$

2. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1\,,1[$: la formule de Taylor-Young lui donne un développement limité à tout ordre. Elle est impaire, comme quotient d'une fonction impaire par une fonction paire, donc ses coefficients d'indice pair sont nuls. $\boxed{f(x) = \sum a_{2k+1}x^{2k+1} + o(x^{2n+2})}$

3. La fonction f' est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$, et la formule de Taylor-Young montre que son développement s'obtient en dérivant terme à terme celui de f, puisque $(f')^{(k)}(0) = f^{(k+1)}(0)$. En reportant dans l'équation, le coefficient de x^{2k} donne

$$(2k+1)a_{2k+1} - (2k-1)a_{2k-1} - a_{2k-1} = 0 \quad (k \geqslant 1), \qquad a_1 = 1,$$

soit $a_{2k+1} = \dfrac{2k}{2k+1}a_{2k-1}$. Ainsi $a_3 = \dfrac{2}{3}$, $a_5 = \dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{15}$ et $a_7 = \dfrac{6}{7}\cdot\dfrac{8}{15} = \dfrac{16}{35}$.

$$\boxed{\frac{\operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{2x^3}{3} + \frac{8x^5}{15} + \frac{16x^7}{35} + o(x^8)}$$

Le calcul par produit des développements de Arcsin et de $(1-x^2)^{-1/2}$ donnerait le même résultat, au prix de beaucoup plus de termes.

EXERCICE 26 ⋆⋆⋆

1. Non. La fonction $f : x \mapsto 1 + x^2 + |x|^{5/2}$ est paire et vérifie $f(x) = 1 + x^2 + o(x^2)$, puisque $\dfrac{|x|^{5/2}}{x^2} = |x|^{1/2} \to 0$; mais $\dfrac{|x|^{5/2}}{|x|^3} = |x|^{-1/2}$ tend vers $+\infty$, donc $f(x) - 1 - x^2$ n'est pas un $o(x^3)$. La réponse est non. La proposition 9 ne s'applique qu'à une fonction qui *admet* un développement à l'ordre 3 ; la parité ne crée pas ce développement.

2. Pour $x \neq 0$, $|f(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-1/x^2}$, et $\dfrac{\mathrm{e}^{-1/x^2}}{|x|^n} = \dfrac{u^{n/2}}{\mathrm{e}^u}$ avec $u = \dfrac{1}{x^2}$, qui tend vers 0 par croissances comparées : $f(x) = o(x^n)$ pour tout n. En particulier $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers 0, et f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$; elle l'est aussi sur $\mathbb{R}^*$, avec

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}\,\mathrm{e}^{-1/x^2}\cos\left(\mathrm{e}^{1/x^2}\right) + \frac{2}{x^3}\sin\left(\mathrm{e}^{1/x^2}\right).$$

Le premier terme tend vers 0. Le second n'a pas de limite : aux points $x_k = (\ln(\frac{\pi}{2} + 2k\pi))^{-1/2}$, qui tendent vers 0, il vaut $\dfrac{2}{x_k^3} \to +\infty$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais pas de classe $\mathcal{C}^1$

À retenir. Une fonction peut avoir un développement limité nul à tout ordre sans être deux fois dérivable : les développements limités ne contrôlent que la taille de f, pas ses oscillations. C'est l'inverse de la fonction plate du chapitre 9, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Applications à l'étude locale

EXERCICE 27 ⋆

Dans chaque cas, on développe numérateur et dénominateur jusqu'à leur premier terme non nul, et la proposition 13 fournit des équivalents.

(a) $1 + \ln(1+x) - \mathrm{e}^x = 1 + \left(x - \dfrac{x^2}{2}\right) - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right) + o(x^2) = -x^2 + o(x^2)$, et $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$: la limite vaut -2.

(b) $\ln(1+x) - \sin x = -\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$: $-\dfrac{1}{2}$.

(c) $\ln\dfrac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x + \dfrac{2x^3}{3} + o(x^3) \sim 2x$: 1.

(d) $x - \operatorname{Arctan} x = \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ et $\sin^3 x \sim x^3$: $\dfrac{1}{3}$.

(e) On pose $x = 1 + h$: $2x^2 - 1 = 1 + 4h + 2h^2$, donc $\ln(2x^2 - 1) \sim 4h$, et $\tan h \sim h$: 4.

(f) Les deux polynômes s'annulent en 1 ; on factorise : $x^3 + 7x^2 - 8 = (x-1)(x^2 + 8x + 8)$ et $x^4 + x^3 - 2 = (x-1)(x^3 + 2x^2 + 2x + 2)$. Le quotient tend vers $\dfrac{17}{7}$: $\dfrac{17}{7}$. C'est un développement à l'ordre 1 en 1 de chacun des polynômes, de dérivées 17 et 7.

EXERCICE 28 ⋆⋆

Première fonction. En composant les développements de sh et de sin à l'ordre 7, on obtient

$$\operatorname{sh}(\sin x) = x - \frac{x^5}{15} + \frac{x^7}{90} + o(x^8), \qquad \sin(\operatorname{sh} x) = x - \frac{x^5}{15} - \frac{x^7}{90} + o(x^8).$$

Les termes se compensent jusqu'à l'ordre 5, et

$$\boxed{\operatorname{sh}(\sin x) - \sin(\operatorname{sh} x) \sim \frac{x^7}{45}}$$

Il faut donc pousser les deux développements jusqu'à l'ordre 7 avant de voir apparaître quoi que ce soit.

Deuxième fonction. $\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$, d'où $\boxed{\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2} \sim \dfrac{x^3}{3}}$.

Troisième fonction. On pose $A = \sin x \ln x$ et $B = x \ln(\sin x)$, qui tendent vers 0 quand $x \to 0^+$. Alors $x^{\sin x} - (\sin x)^x = \mathrm{e}^A - \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^B(\mathrm{e}^{A-B} - 1) \sim A - B$. Or

$$A - B = (\sin x - x)\ln x - x \ln \frac{\sin x}{x} = -\frac{x^3}{6} \ln x \,(1 + o(1)) + \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

et $x^3 = o(x^3 \ln x)$.

$$\boxed{x^{\sin x} - (\sin x)^x \underset{x \to 0^+}{\sim} -\frac{x^3 \ln x}{6}}$$

L'équivalent est positif pour $0 < x < 1$: la fonction $x^{\sin x}$ est au-dessus de $(\sin x)^x$ près de 0.

EXERCICE 29 ⋆⋆

On applique la proposition 14 : le premier terme de degré au moins 2 du développement décide de la position.

(a) On a $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4} + \dfrac{x^3}{48} + o(x^3)$, le terme en x^2 étant nul car $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x} - \dfrac{1}{2}$ est impaire.

$$\boxed{\text{tangente } y = \frac{1}{2} - \frac{x}{4};\ \text{la courbe la traverse en } 0}$$

au-dessous pour $x < 0$ et au-dessus pour $x > 0$, puisque l'écart est équivalent à $\dfrac{x^3}{48}$.

(b) On écrit $\ln(x^2 + 2x + 2) = \ln 2 + \ln(1+u)$ avec $u = x + \dfrac{x^2}{2}$, et

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

$$\boxed{\text{tangente } y = \ln 2 + x;\ \text{la courbe la traverse en } 0}$$

au-dessus pour $x < 0$ et au-dessous pour $x > 0$.

(c) Pour $x \neq 0$, on écrit $\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{x}{\operatorname{sh} x}$, qui tend vers 0 : on prolonge par $f(0) = 0$. Comme $\dfrac{x}{\operatorname{sh} x} = 1 - \dfrac{x^2}{6} + o(x^2)$,

$$\boxed{f(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3);\ \text{tangente } y = \frac{x}{2},\ \text{traversée en } 0}$$

au-dessus pour $x < 0$ et au-dessous pour $x > 0$. Les trois exemples ont un point d'inflexion en 0, ce qui n'est pas un hasard : à une constante près, ce sont des fonctions impaires.

EXERCICE 30 ⋆⋆

Avec $\operatorname{Arcsin} x = x\Big(1+\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{3x^4}{40}+o(x^4)\Big)$, on obtient $\dfrac{1}{\operatorname{Arcsin} x} = \dfrac{1}{x}\Big(1-\dfrac{x^2}{6}+\Big(\dfrac{1}{36}-\dfrac{3}{40}\Big)x^4+o(x^4)\Big)$, d'où

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{Arcsin} x} = \frac{x}{6}+\frac{17x^3}{360}+o(x^3).$$

La fonction tend vers 0 : elle se prolonge par continuité en posant $f(0)=0$. Le prolongement admet un développement limité à l'ordre 1, donc il est dérivable en 0, avec $f'(0)=\dfrac{1}{6}$ (proposition 10).

$$\boxed{f(0)=0, \quad f'(0)=\frac{1}{6}, \quad \text{tangente } y=\frac{x}{6}, \text{ traversée en } 0}$$

L'écart est équivalent à $\dfrac{17x^3}{360}$: la courbe est au-dessous de sa tangente pour $x<0$ et au-dessus pour $x>0$.

EXERCICE 31 ⋆⋆

On a $f_a(x) = \Big(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\Big)-x+ax^2+o(x^3) = \Big(a-\dfrac{1}{2}\Big)x^2+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$. Le coefficient de x est nul, donc $f_a'(0)=0$: 0 est un point critique, et $f_a''(0)=2a-1$.

— Si $a>\dfrac{1}{2}$, alors $f_a''(0)>0$: minimum local strict (proposition 15).

— Si $a<\dfrac{1}{2}$, alors $f_a''(0)<0$: maximum local strict.

— Si $a=\dfrac{1}{2}$, alors $f_a(x)-f_a(0)\sim\dfrac{x^3}{3}$ change de signe en 0 : pas d'extremum.

$$\boxed{a>\frac{1}{2}\text{ : minimum;} \quad a<\frac{1}{2}\text{ : maximum;} \quad a=\frac{1}{2}\text{ : aucun extremum}}$$

Le cas limite est exactement celui où la condition d'ordre 2 ne permet pas de conclure, et où le terme d'ordre 3 prend le relais.

EXERCICE 32 ⋆⋆

Dans chaque cas, on pose $t=\dfrac{1}{x}\to 0^+$ et l'on développe jusqu'au premier terme qui tend vers 0.

(a) $(x+1)\mathrm{e}^t = (x+1)\Big(1+t+\dfrac{t^2}{2}+o(t^2)\Big) = x+2+\dfrac{3}{2x}+o\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$: asymptote $y=x+2$, courbe au-dessus.

(b) $x^2\ln(1+t) = x^2\Big(t-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}+o(t^3)\Big) = x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3x}+o\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$: asymptote $y=x-\dfrac{1}{2}$, courbe au-dessus.

(c) Avec $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^t}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{t}{4}+o(t^2)$ (exercice 29),

$$\frac{x+1}{1+\mathrm{e}^t} = (x+1)\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{4x}+o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big) = \frac{x}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4x}+o\Big(\frac{1}{x}\Big) :$$

asymptote $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}$, courbe au-dessous.

(d) $\dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{2t}{1-t^2} = 2t+o(t^2)$, donc $\exp\Big(\dfrac{2x}{x^2-1}\Big) = 1+2t+2t^2+o(t^2)$, et la fonction vaut $x+2+\dfrac{2}{x}+o\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$: asymptote $y=x+2$, courbe au-dessus.

(e) $\sqrt[3]{(x^2-2)(x+3)} = x(1+3t-2t^2+O(t^3))^{1/3} = x\Big(1+t-\dfrac{5}{3}t^2+o(t^2)\Big) = x+1-\dfrac{5}{3x}+o\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$: asymptote $y=x+1$, courbe au-dessous.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
asymptote	$y=x+2$	$y=x-\dfrac{1}{2}$	$y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}$	$y=x+2$	$y=x+1$
position	au-dessus	au-dessus	au-dessous	au-dessus	au-dessous

EXERCICE 33 ⋆⋆

On développe les quatre fonctions à l'ordre 2 en 0 :

$$f(x)=1-x+x^2+o(x^2), \qquad g(x)=1-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2),$$

$$h(x)=\sqrt{1-2x+o(x^2)}=1-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2), \qquad k(x)=1-\frac{2x}{2}+\frac{4x^2}{24}+o(x^2)=1-x+\frac{x^2}{6}+o(x^2).$$

Pour h, on a utilisé $\sin x = x+o(x^2)$ et $\sqrt{1+u}=1+\dfrac{u}{2}-\dfrac{u^2}{8}+o(u^2)$ avec $u=-2x+o(x^2)$; pour k, le développement de cos en $\sqrt{2x}$ fait apparaître des puissances entières de x. Les quatre courbes ont la même tangente $y=1-x$. Les différences sont équivalentes à des multiples positifs de x^2 : par exemple $f-g\sim\dfrac{x^2}{2}$, $g-k\sim\dfrac{x^2}{3}$, $k-h\sim\dfrac{2x^2}{3}$.

$$\boxed{\text{au voisinage de } 0^+ :\ h<k<g<f}$$

Toutes ces courbes collent à la même droite, mais s'en écartent avec des courbures différentes : le coefficient de x^2 mesure cet écartement.

EXERCICE 34 ⋆⋆

1. Par la somme géométrique, $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{kx}$ pour $x\neq 0$, et aussi pour $x=0$. En développant chaque exponentielle,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\Big(1+kx+\frac{k^2x^2}{2}+\frac{k^3x^3}{6}\Big)+o(x^3)=(n+1)+\Big(\sum k\Big)x+\frac{1}{2}\Big(\sum k^2\Big)x^2+\frac{1}{6}\Big(\sum k^3\Big)x^3+o(x^3).$$

2. À partir du quotient, en écrivant

$$\mathrm{e}^{(n+1)x}-1=(n+1)x\Big(1+\frac{(n+1)x}{2}+\frac{(n+1)^2x^2}{6}+\frac{(n+1)^3x^3}{24}\Big)+o(x^4)$$

et de même pour e^x-1, puis en divisant, le calcul donne le coefficient de x^3 :

$$\frac{n^4}{24}+\frac{n^3}{12}+\frac{n^2}{24}=\frac{n^2(n+1)^2}{24}.$$

Par unicité du développement, $\dfrac{1}{6}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{24}$.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2}$$

Les coefficients d'ordre 1 et 2 redonnent de même les sommes $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ du chapitre 3.

EXERCICE 35 ⋆⋆⋆

1. On multiplie les trois développements $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{a=0}^{10} x^a$, $\dfrac{1}{1-x^2} = \sum_{b=0}^{5} x^{2b}$ et $\dfrac{1}{1-x^5} = 1+x^5+x^{10}$, chacun à $o(x^{10})$ près, et l'on tronque au degré 10 :

$$\boxed{u(x) = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 7x^8 + 8x^9 + 10x^{10} + o(x^{10})}$$

2. En développant le produit, chaque terme est de la forme $x^a \cdot x^{2b} \cdot x^{5c} = x^{a+2b+5c}$, et le coefficient de x^{10} compte les triplets (a,b,c) tels que $a+2b+5c = 10$. On les retrouve directement : pour $c=0$, b va de 0 à 5 (6 triplets) ; pour $c=1$, b va de 0 à 2 (3 triplets) ; pour $c=2$, un seul.

$$\boxed{\text{10 façons de payer 10 centimes avec des pièces de 1, 2 et 5 centimes}}$$

C'est l'idée des séries génératrices, que l'on reverra en dénombrement : un développement limité range un problème de comptage dans ses coefficients.

EXERCICE 36 ⋆⋆

On a $\ln u_n = n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1 - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{3n^2} + O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$. Donc

$$\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{2n(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

$$\boxed{\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

Par la proposition 13, ce logarithme est strictement positif à partir d'un certain rang : (u_n) est croissante à partir de ce rang. On sait en fait qu'elle est croissante dès $n=1$, mais le développement donne en plus la vitesse : $\mathrm{e} - u_n \sim \dfrac{\mathrm{e}}{2n}$.

EXERCICE 37 ⋆⋆⋆

1. Pour $|x|$ grand, $\sqrt{x^4+x^3+1} = x^2\sqrt{1+t+t^4}$ avec $t = \dfrac{1}{x}$, et $\sqrt{1+v} = 1 + \dfrac{v}{2} - \dfrac{v^2}{8} + \dfrac{v^3}{16} + o(v^3)$ avec $v = t + t^4$:

$$\boxed{\sqrt{x^4+x^3+1} \underset{x\to\pm\infty}{=} x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}$$

2. Si $(x,y) \in E$, alors $(x,-y) \in E$, et l'on peut supposer $y \geqslant 0$, donc $y = \sqrt{x^4+x^3+1}$. D'après la question 1, il existe A tel que, pour $|x| \geqslant A$, $y = x^2 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{8} + \varepsilon$ avec $|\varepsilon| < \dfrac{1}{8}$.

— Si x est pair, $N = x^2 + \dfrac{x}{2}$ est un entier, et $y \in \left]N - \dfrac{1}{4}, N\right[$ n'est pas entier.

— Si x est impair, $x^2 + \dfrac{x}{2} = M + \dfrac{1}{2}$ avec M entier, et $y \in \left]M + \dfrac{1}{4}, M + \dfrac{1}{2}\right[$ n'est pas entier.

Les éléments de E ont donc $|x| < A$, et pour chacun de ces x, il y a au plus deux valeurs de y : $\boxed{E \text{ est fini}}$. Une recherche par ordinateur pour $|x| \leqslant 200$ donne

$$E = \{(-2, \pm 3), (-1, \pm 1), (0, \pm 1), (2, \pm 5)\}.$$

EXERCICE 38 ⋆⋆

1. La fonction $\varphi : x \mapsto x + \ln x$ est continue et strictement croissante sur $]0\,,+\infty[$, de limites $-\infty$ et $+\infty$: c'est une bijection de $]0\,,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ (chapitre 8). $\boxed{u_n = \varphi^{-1}(n) \text{ existe et est unique}}$

2. La fonction φ^{-1} est croissante et non majorée, donc $u_n \to +\infty$. Alors $\ln u_n = o(u_n)$, et $n = u_n + \ln u_n = u_n(1 + o(1))$: $u_n \sim n$. On en déduit

$$u_n = n - \ln u_n = n - \ln n - \ln \frac{u_n}{n} = n - \ln n + o(1),$$

puisque $\dfrac{u_n}{n} \to 1$. $\boxed{u_n = n - \ln n + o(1)}$

3. On réinjecte : $\dfrac{u_n}{n} = 1 - \dfrac{\ln n}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$, donc $\ln \dfrac{u_n}{n} = -\dfrac{\ln n}{n} + o\Big(\dfrac{\ln n}{n}\Big)$, et

$$\boxed{u_n = n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\Big(\frac{\ln n}{n}\Big)}$$

Pour $n = 100$, ce développement donne 95,4409, pour une valeur exacte $u_{100} \approx 95{,}4415$.

EXERCICE 39 ⋆⋆

1. La fonction f_n est strictement croissante, puisque $f_n'(x) = 5x^4 + n > 0$, de limites $\pm\infty$: elle s'annule en un unique réel u_n. Comme $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n\Big(\dfrac{1}{n}\Big) = \dfrac{1}{n^5} > 0$, on a $\boxed{0 < u_n < \dfrac{1}{n}}$.

2. L'égalité $f_n(u_n) = 0$ s'écrit $nu_n = 1 - u_n^5$, qui tend vers 1 : $u_n \sim \dfrac{1}{n}$. Puis

$$\frac{1}{n} - u_n = \frac{u_n^5}{n} \sim \frac{1}{n^6}. \qquad \boxed{u_n \sim \frac{1}{n}, \qquad \frac{1}{n} - u_n \sim \frac{1}{n^6}}$$

L'approximation $u_n \approx \dfrac{1}{n}$ est donc remarquablement bonne : pour $n = 10$, l'erreur est de l'ordre de 10^{-6}.

EXERCICE 40 ⋆⋆⋆

1. La fonction $\psi : x \mapsto x - \ln x$ a pour dérivée $1 - \dfrac{1}{x} < 0$ sur $]0\,,1[$: elle est continue, strictement décroissante sur $]0\,,1]$, de $+\infty$ à $\psi(1) = 1$. Elle réalise une bijection de $]0\,,1]$ sur $[1\,,+\infty[$, qui contient n. $\boxed{x_n \text{ existe et est unique}}$

2. L'équation s'écrit $\ln x_n = x_n - n$, soit $x_n = \mathrm{e}^{-n}\mathrm{e}^{x_n}$. Comme $x_n \leqslant 1$, on a $0 < x_n \leqslant \mathrm{e}^{1-n}$, donc $x_n \to 0$, puis $\mathrm{e}^{x_n} \to 1$ et $\boxed{x_n \sim \mathrm{e}^{-n}}$.

3. On réinjecte dans $x_n = \mathrm{e}^{-n}\mathrm{e}^{x_n}$. D'abord $\mathrm{e}^{x_n} = 1 + x_n + o(x_n) = 1 + \mathrm{e}^{-n} + o(\mathrm{e}^{-n})$, d'où $x_n = \mathrm{e}^{-n} + \mathrm{e}^{-2n} + o(\mathrm{e}^{-2n})$. Ensuite $\mathrm{e}^{x_n} = 1 + x_n + \dfrac{x_n^2}{2} + o(x_n^2) = 1 + \mathrm{e}^{-n} + \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-2n} + o(\mathrm{e}^{-2n})$, et

$$\boxed{x_n = \mathrm{e}^{-n} + \mathrm{e}^{-2n} + \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-3n} + o(\mathrm{e}^{-3n})}$$

Chaque réinjection gagne un ordre : c'est la méthode du point fixe, appliquée aux développements.

EXERCICE 41 ⋆⋆⋆

1. On calcule $P_n(0) = -1$, $P_n(1) = n-1$, $P_n(3) = 11-3n$, et $P_n(x) \to +\infty$ en $+\infty$. Pour $n \geqslant 4$, les signes $-$, $+$, $-$, $+$ et le théorème des valeurs intermédiaires donnent une racine dans chacun des intervalles $]0\,,1[$, $]1\,,3[$ et $]3\,,+\infty[$. $\boxed{0 < a_n < 1 < b_n < 3 < c_n}$

2. La différence $P_n(x) - (x-a_n)(x-b_n)(x-c_n)$ est un polynôme de degré au plus 2 qui s'annule en trois réels distincts ; un trinôme non nul ayant au plus deux racines, elle est nulle. En développant le produit et en identifiant les coefficients,

$$\boxed{a_n + b_n + c_n = n+2, \qquad a_nb_n + b_nc_n + c_na_n = 2n+1, \qquad a_nb_nc_n = 1}$$

3. Comme $1 < a_n + b_n < 4$, on a $c_n = n + 2 - (a_n + b_n) = n + O(1)$, donc $c_n \sim n$. Ensuite $a_n = \dfrac{1}{b_nc_n} \leqslant \dfrac{1}{c_n} \to 0$. La deuxième relation donne $a_n + b_n = \dfrac{2n+1-a_nb_n}{c_n}$, où $0 < a_nb_n < 3$, donc $a_n + b_n \to 2$ et $b_n \to 2$. Enfin $a_n = \dfrac{1}{b_nc_n} \sim \dfrac{1}{2n}$.

$$\boxed{c_n \sim n, \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = 2, \qquad a_n \sim \frac{1}{2n}}$$

Pour $n = 1\,000$, on trouve numériquement $c_n \approx 999{,}999$, $b_n \approx 2{,}0005$ et $2na_n \approx 0{,}99975$.

EXERCICE 42 ⋆⋆

1. Pour $u > 0$, $0 < \operatorname{Arctan} u < u$ (la fonction $u \mapsto u - \operatorname{Arctan} u$ s'annule en 0 et a pour dérivée $\dfrac{u^2}{1+u^2} > 0$). Par récurrence, (u_n) est strictement positive et décroissante : elle converge vers $\ell \geqslant 0$ tel que $\operatorname{Arctan}\ell = \ell$, donc $\boxed{\ell = 0}$.

2. On a $\operatorname{Arctan} u = u\Big(1 - \dfrac{u^2}{3} + o(u^2)\Big)$, donc $\operatorname{Arctan}^2 u = u^2\Big(1 - \dfrac{2u^2}{3} + o(u^2)\Big)$ et

$$\frac{1}{\operatorname{Arctan}^2 u} - \frac{1}{u^2} = \frac{1}{u^2}\Big(\frac{2u^2}{3} + o(u^2)\Big) \xrightarrow[u\to0]{} \frac{2}{3}.$$

Par substitution de $u = u_n$, $\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2} \to \dfrac{2}{3}$. Le lemme de Cesàro (proposition 16) donne $\dfrac{1}{nu_n^2} \to \dfrac{2}{3}$, soit

$$\boxed{u_n \sim \sqrt{\frac{3}{2n}}}$$

EXERCICE 43 ⋆⋆

La suite est strictement positive et croissante, puisque $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n} > 0$. Si elle convergeait vers $\ell > 0$, on aurait $\ell = \ell + \dfrac{1}{\ell}$, ce qui est absurde : $u_n \to +\infty$. Alors

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 = 2 + \frac{1}{u_n^2} \longrightarrow 2,$$

et le lemme de Cesàro donne $\dfrac{u_n^2}{n} \to 2$: $\boxed{u_n \sim \sqrt{2n}}$. L'astuce est d'élever au carré : la relation de récurrence, inutilisable telle quelle, devient presque arithmétique.

EXERCICE 44 ⋆⋆

La suite est croissante, puisque $\mathrm{e}^{-x_n} > 0$. Si elle était majorée, elle convergerait vers un réel ℓ tel que $\ell = \ell + \mathrm{e}^{-\ell}$, ce qui est impossible : $x_n \to +\infty$. Ensuite

$$\mathrm{e}^{x_{n+1}} - \mathrm{e}^{x_n} = \mathrm{e}^{x_n}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-x_n}} - 1\big) = \mathrm{e}^{x_n}\big(\mathrm{e}^{-x_n} + O(\mathrm{e}^{-2x_n})\big) = 1 + O(\mathrm{e}^{-x_n}) \longrightarrow 1.$$

Par le lemme de Cesàro, $\mathrm{e}^{x_n} \sim n$, et en prenant le logarithme, $x_n = \ln n + \ln \dfrac{\mathrm{e}^{x_n}}{n}$, où le second terme tend vers 0.

$$\boxed{x_n = \ln n + o(1)}$$

EXERCICE 45 ⋆⋆⋆

1. La fonction $\varphi : u \mapsto u(1-3u)$ envoie $]0\,,\dfrac{1}{3}[$ dans $]0\,,\dfrac{1}{12}]$, son maximum étant $\varphi(\dfrac{1}{6}) = \dfrac{1}{12}$. Par récurrence, $u_n \in]0\,,\dfrac{1}{3}[$, et $u_{n+1} - u_n = -3u_n^2 < 0$: la suite décroît et converge vers ℓ tel que $\ell = \ell - 3\ell^2$, d'où $\boxed{\ell = 0}$.

2. Avec $\dfrac{1}{1-3u} = 1 + 3u + 9u^2 + O(u^3)$,

$$w_{n+1} = \frac{1}{u_n(1-3u_n)} = \frac{1}{u_n} + 3 + 9u_n + O(u_n^2), \qquad \text{soit} \qquad \boxed{w_{n+1} - w_n = 3 + 9u_n + O(u_n^2)}$$

Cette différence tend vers 3 ; par le lemme de Cesàro, $w_n \sim 3n$, soit $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{3n}}$.

3. On a $w_{n+1} - w_n - 3 = 9u_n + O(u_n^2) \sim 9u_n \sim \dfrac{3}{n}$. Cette suite est donc strictement positive à partir d'un certain rang, et la somme des $\dfrac{3}{k}$ tend vers $+\infty$: l'exercice 11, appliqué à partir de ce rang, donne

$$w_n - w_0 - 3n = \sum_{k=0}^{n-1}(w_{k+1} - w_k - 3) \sim 3\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \sim 3\ln n, \qquad \text{donc} \qquad \boxed{w_n - 3n \sim 3\ln n}$$

la constante w_0 étant négligeable devant $\ln n$.

4. On a $w_n = 3n + 3\ln n + o(\ln n)$, donc

$$u_n = \frac{1}{3n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\ln n}{n} + o\Big(\frac{\ln n}{n}\Big)}, \qquad \boxed{u_n = \frac{1}{3n} - \frac{\ln n}{3n^2} + o\Big(\frac{\ln n}{n^2}\Big)}$$

Piège. Numériquement, la vérification est décevante : pour $n = 10^6$ et $u_0 = 0{,}1$, on trouve $w_n - 3n \approx 48$, alors que $3\ln n \approx 41$. L'écart vient d'une constante, négligeable devant $\ln n$ mais encore visible : un équivalent ne dit rien de la vitesse à laquelle le rapport tend vers 1.

EXERCICE 46 ⋆⋆⋆

1. On a $u_1 = \sqrt{0+0} = 0$, et $0 \leqslant u_1 \leqslant 1$. Si $n-1 \leqslant u_n \leqslant n$, alors

$$n^2 \leqslant n^2 + n - 1 \leqslant u_n + n^2 \leqslant n^2 + n \leqslant (n+1)^2,$$

donc $n \leqslant u_{n+1} \leqslant n+1$. Par récurrence, $\boxed{n-1 \leqslant u_n \leqslant n}$ pour tout $n \geqslant 1$.

2. On écrit $u_{n+1} = n\sqrt{1+v_n}$ avec $v_n = \dfrac{u_n}{n^2} = O\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$, et $\sqrt{1+v} = 1 + \dfrac{v}{2} + O(v^2)$:

$$u_{n+1} = n + \frac{u_n}{2n} + O\Big(\frac{1}{n}\Big) = n + \frac{1}{2} + O\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

puisque $\dfrac{u_n}{2n} = \dfrac{1}{2} + O\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$ par la question 1. En remplaçant n par $n-1$, $\boxed{u_n = n - \dfrac{1}{2} + O\Big(\dfrac{1}{n}\Big)}$.

3. On pousse d'un ordre : $v_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + O\Big(\dfrac{1}{n^3}\Big)$ et $\sqrt{1+v} = 1 + \dfrac{v}{2} - \dfrac{v^2}{8} + O(v^3)$, d'où

$$u_{n+1} = n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4n} - \frac{1}{8n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) = n + \frac{1}{2} - \frac{3}{8n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

En remplaçant n par $n-1$, et puisque $\dfrac{1}{n-1} = \dfrac{1}{n} + O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$,

$$\boxed{u_n = n - \frac{1}{2} - \frac{3}{8n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)}$$

Pour $n = 200$, la suite vaut 199,498 115 5 et le développement 199,498 125 : l'écart est de l'ordre de $\dfrac{1}{n^2}$.

EXERCICE 47 ⋆⋆

Les valeurs $1, \dots, k-1$ occupent $1 + 2 + \cdots + (k-1) = \dfrac{k(k-1)}{2}$ rangs, donc la valeur k occupe les rangs $\dfrac{k(k-1)}{2} + 1$ à $\dfrac{k(k+1)}{2}$. Ainsi

$$u_n = k \iff \frac{k(k-1)}{2} < n \leqslant \frac{k(k+1)}{2},$$

et u_n est le plus petit entier k tel que $\dfrac{k(k+1)}{2} \geqslant n$. Pour obtenir une formule avec la partie entière, on écrit la condition comme $k(k-1) \leqslant 2n-2 < k(k+1)$. Le trinôme $k^2 - k - (2n-2)$ a pour racine positive $r_n = \dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2}$, et la condition devient $k \leqslant r_n < k+1$.

$$\boxed{u_n = \Big\lfloor \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \Big\rfloor \sim \sqrt{2n}}$$

L'équivalent vient de l'encadrement $r_n - 1 < u_n \leqslant r_n$, dont les deux bornes sont équivalentes à $\sqrt{2n}$. Pour $n = 1, 2, 3, 4$, la formule donne bien $1, 2, 2, 3$.

EXERCICE 48 ⋆⋆

L'inégalité. Pour $t \geqslant 0$, on pose $h(t) = \dfrac{t^3}{6} - t + \sin t$. On a $h(0) = 0$ et $h'(t) = \dfrac{t^2}{2} - (1 - \cos t) \geqslant 0$, puisque $1 - \cos t = 2\sin^2 \dfrac{t}{2} \leqslant \dfrac{t^2}{2}$. Ainsi $h \geqslant 0$, et comme $\sin t \leqslant t$, on obtient $0 \leqslant t - \sin t \leqslant \dfrac{t^3}{6}$. Par imparité, $|\sin t - t| \leqslant \dfrac{|t|^3}{6}$ pour tout réel t.

La somme. On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$, et l'erreur est majorée par

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{6n^6} = \frac{n^2(n+1)^2}{24n^6} = O\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k}{n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)}$$

Piège. Il ne suffit pas d'écrire $\sin \dfrac{k}{n^2} = \dfrac{k}{n^2} + o\Big(\dfrac{k}{n^2}\Big)$ et de sommer : n restes $o(\cdot)$ ne forment pas nécessairement un o de la somme. L'inégalité explicite fournit une majoration *uniforme* en k.

Exercices de synthèse

EXERCICE 49 ⋆⋆

1. Faux. En $+\infty$, $x^2 + x \sim x^2$, mais la différence x tend vers $+\infty$. L'équivalence contrôle l'écart *relatif*, non l'écart absolu.

2. Vrai. C'est la proposition 5 du cours.

3. Faux. $n + 1 \sim n$, mais $\dfrac{\mathrm{e}^{n+1}}{\mathrm{e}^n} = \mathrm{e}$: c'est l'exercice 8.

4. Vrai. C'est la transitivité de la proposition 3 : si $f = \varepsilon g$ et $g = Bh$, alors $f = (\varepsilon B)h$.

5. Vrai. C'est la proposition 9.

6. Faux. La fonction $x \mapsto x^3 \sin \dfrac{1}{x}$, prolongée par 0, vérifie $f(x) = o(x^2)$, mais n'est pas deux fois dérivable en 0 : sa dérivée $f'(x) = 3x^2 \sin \dfrac{1}{x} - x \cos \dfrac{1}{x}$ vérifie $\dfrac{f'(x) - f'(0)}{x} = 3x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$, qui n'a pas de limite en 0.

7. Vrai. C'est la condition suffisante de la proposition 15.

8. Faux. Avec la même fonction, $f(x) = o(x^2)$, mais $\dfrac{f'(x)}{x} = 3x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite : f' n'admet pas de développement à l'ordre 1. On ne dérive pas un développement limité.

9. Vrai. La formule de Stirling donne $\ln(n!) = n \ln n - n + \dfrac{1}{2} \ln n + O(1)$, et tous les termes après le premier sont négligeables devant $n \ln n$. Sans Stirling, l'encadrement $n \ln n - n < \ln(n!) \leqslant n \ln n$, que l'on peut obtenir en comparant à $\ln k$, suffit.

10. Vrai. C'est la conservation du signe (proposition 5).

$$\boxed{\text{vrais : } 2, 4, 5, 7, 9, 10; \quad \text{faux : } 1, 3, 6, 8}$$

EXERCICE 50 ⋆⋆

On note $\alpha = \ln a$, $\beta = \ln b$, $\gamma = \ln c$ et $m = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$, de sorte que $m = \ln G$. Pour $t \neq 0$, on passe à l'exponentielle :

$$M(t) = \exp\Big(\frac{1}{t}\ln S(t)\Big), \qquad \text{avec} \qquad S(t) = \frac{a^t+b^t+c^t}{3} = \frac{\mathrm{e}^{\alpha t}+\mathrm{e}^{\beta t}+\mathrm{e}^{\gamma t}}{3}.$$

1. Le développement de l'exponentielle (théorème 5), par substitution, donne $\mathrm{e}^{\alpha t} = 1+\alpha t+o(t)$, et de même pour β et γ. En faisant la moyenne,

$$S(t) = 1 + mt + o(t).$$

On pose $v = S(t)-1 = mt+o(t)$, qui est un $O(t)$ et tend vers 0. Comme $\ln(1+v) = v+o(v)$, on a $\ln S(t) = mt+o(t)$, donc $\dfrac{1}{t}\ln S(t) = m+o(1)$ tend vers m, et la continuité de l'exponentielle conclut :

$$\boxed{\lim_{t\to 0} M(t) = \mathrm{e}^m = G = \sqrt[3]{abc}}$$

L'expression proposée vaut $M(\frac{1}{x})$, et $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$: par composition des limites,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}+c^{1/x}}{3}\Big)^x = \sqrt[3]{abc}}$$

Piège. L'erreur la plus répandue est de conclure que $M(t)$ tend vers 1, puisque $S(t)$ tend vers 1. C'est une forme indéterminée 1^∞ : l'exposant $\dfrac{1}{t}$ explose, et seul le développement de $\ln S(t)$ à l'ordre 1 permet de conclure, comme pour $(1+\dfrac{1}{n})^n$ dans le cours.

2. Il faut un terme de plus. Avec $\mathrm{e}^{\alpha t} = 1+\alpha t+\dfrac{\alpha^2t^2}{2}+o(t^2)$, et en notant $q = \dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{3}$, on obtient

$$S(t) = 1 + mt + \frac{q}{2}t^2 + o(t^2).$$

On compose avec $\ln(1+v) = v - \dfrac{v^2}{2}+o(v^2)$ (proposition 11), où $v = mt+\dfrac{q}{2}t^2+o(t^2)$ vérifie $v^2 = m^2t^2+o(t^2)$:

$$\ln S(t) = mt + \frac{q-m^2}{2}\,t^2 + o(t^2).$$

En développant les carrés, on vérifie que $q-m^2 = \dfrac{1}{3}((\alpha-m)^2+(\beta-m)^2+(\gamma-m)^2) = \dfrac{D}{3}$, où l'on a posé

$$D = \Big(\ln\frac{a}{G}\Big)^2 + \Big(\ln\frac{b}{G}\Big)^2 + \Big(\ln\frac{c}{G}\Big)^2,$$

puisque $\alpha - m = \ln a - \ln G = \ln\dfrac{a}{G}$. Ainsi $\dfrac{1}{t}\ln S(t) = \ln G + \dfrac{D}{6}t+o(t)$, puis, avec $\mathrm{e}^w = 1+w+o(w)$ pour $w = \dfrac{D}{6}t+o(t)$,

$$M(t) = G\exp\Big(\frac{D}{6}t+o(t)\Big) = G + \frac{GD}{6}\,t + o(t).$$

Cette égalité, établie pour $t\neq 0$, reste vraie en $t=0$ puisque $M(0) = G$: la fonction M admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, donc elle y est dérivable (proposition 10), et

$$\boxed{M'(0) = \frac{GD}{6} = \frac{G}{6}\Big(\Big(\ln\frac{a}{G}\Big)^2 + \Big(\ln\frac{b}{G}\Big)^2 + \Big(\ln\frac{c}{G}\Big)^2\Big)}$$

Si a, b, c ne sont pas tous égaux, α, β, γ ne sont pas tous égaux à leur moyenne m, et $D > 0$. Alors $M(t) - G \sim \dfrac{GD}{6}t$ (proposition 13), qui a le signe de t au voisinage de 0 (proposition 5) :

$$\boxed{M(-t) < G < M(t) \quad \text{pour tout } t > 0 \text{ assez petit}}$$

Par exemple, pour $a = 1$, $b = 2$ et $c = 4$, on trouve

$$G = 2, \qquad M(1) = \frac{7}{3} \approx 2{,}333, \qquad M(-1) = \frac{12}{7} \approx 1{,}714, \qquad M'(0) = \frac{2}{3}(\ln 2)^2 \approx 0{,}320;$$

numériquement, $M(0{,}1) \approx 2{,}032$ et $M(-0{,}1) \approx 1{,}968$, en accord avec la pente trouvée.

3. L'expression étant symétrique en a, b, c, on peut supposer que $\mu = a$ est le plus grand des trois. Pour $t > 0$, chacun des trois termes de $S(t)$ est compris entre 0 et μ^t, et l'un d'eux vaut μ^t ; ainsi $\dfrac{\mu^t}{3} \leqslant S(t) \leqslant \mu^t$. En élevant à la puissance $\dfrac{1}{t} > 0$, fonction croissante, on obtient

$$\mu\, 3^{-1/t} \leqslant M(t) \leqslant \mu,$$

et $3^{-1/t} = \mathrm{e}^{-(\ln 3)/t}$ tend vers 1 quand t tend vers $+\infty$. Par encadrement, $M(t)$ tend vers μ. Pour $t = -s$ avec $s > 0$, on a

$$M(-s) = \left(\left(\frac{(1/a)^s + (1/b)^s + (1/c)^s}{3}\right)^{1/s}\right)^{-1},$$

et ce qui précède, appliqué à $\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{b}$, $\dfrac{1}{c}$, montre que la quantité entre parenthèses tend, quand s tend vers $+\infty$, vers

$$\max\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right) = \frac{1}{\min(a,b,c)}.$$

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} M(t) = \max(a,b,c), \qquad \lim_{t\to-\infty} M(t) = \min(a,b,c)}$$

À retenir. Une seule famille de fonctions relie le minimum, la moyenne harmonique, la moyenne géométrique, la moyenne arithmétique et le maximum. La moyenne géométrique n'est pas de la forme $M(t)$: elle n'apparaît qu'à la limite, et c'est le développement limité qui la fait surgir. La question 2 est une version locale de l'inégalité arithmético-géométrique du chapitre 9 ; on peut d'ailleurs montrer, à l'aide de l'inégalité de Jensen du même chapitre, que M est croissante sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 51 ⋆⋆

1. Comme bx^2 tend vers 0, le développement $\dfrac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + o(y^3)$, composé avec $y = bx^2$, donne $\dfrac{1}{1+bx^2} = 1 - bx^2 + b^2x^4 + o(x^5)$, le terme en x^6 étant absorbé par le reste. Ainsi

$$\frac{x + ax^3}{1 + bx^2} = (x + ax^3)(1 - bx^2 + b^2x^4 + o(x^5)) = x + (a-b)x^3 + (b^2 - ab)x^5 + o(x^6),$$

le terme ab^2x^7 étant absorbé par le reste. Avec $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^6)$ (théorème 5),

$$\boxed{f_{a,b}(x) = \left(b - a - \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(\frac{1}{120} + ab - b^2\right)x^5 + o(x^6)}$$

L'absence de termes de degré pair était prévisible : $f_{a,b}$ est impaire (proposition 9).

2. Par unicité du développement limité (proposition 8), $f_{a,b}(x) = o(x^6)$ si et seulement si les deux coefficients sont nuls, c'est-à-dire si $b - a = \dfrac{1}{6}$ et $b(b-a) = \dfrac{1}{120}$. La première égalité, reportée dans la seconde, donne $\dfrac{b}{6} = \dfrac{1}{120}$, d'où un unique couple :

$$\boxed{a_0 = -\frac{7}{60}, \qquad b_0 = \frac{1}{20}}$$

Pour l'équivalent, on pousse le calcul d'un ordre. Le développement

$$\frac{1}{1+b_0x^2} = 1 - b_0x^2 + b_0^2x^4 - b_0^3x^6 + o(x^7)$$

ajoute au quotient le terme $(a_0b_0^2 - b_0^3)x^7 = b_0^2(a_0 - b_0)x^7 = -\dfrac{x^7}{2400}$, et le sinus contribue $-\dfrac{x^7}{5040}$. Comme $-\dfrac{1}{5040} + \dfrac{1}{2400} = \dfrac{-10+21}{50\,400}$, la proposition 13 donne

$$\boxed{f_{a_0,b_0}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{11}{50\,400}\,x^7}$$

3. Soit $(a,b) \neq (a_0,b_0)$. Par la question 2, l'un des coefficients de x^3 ou de x^5 dans le développement de $f_{a,b}$ est non nul, et la proposition 13 donne $f_{a,b}(x) \sim c\,x^p$, avec $c \neq 0$ et $p \in \{3,5\}$. Comme $x^7 = o(x^p)$, on obtient $f_{a_0,b_0} = o(f_{a,b})$. Aucune autre fonction ne convient : si $f_{a,b}$, avec $(a,b) \neq (a_0,b_0)$, était négligeable devant f_{a_0,b_0}, elle serait négligeable devant elle-même par transitivité, donc nulle au voisinage de 0, ce que contredit $f_{a,b}(x) \sim c\,x^p$.

$$\boxed{\text{oui : } f_{a_0,b_0} \text{ est la seule, avec } \frac{x + a_0x^3}{1+b_0x^2} = \frac{x(60-7x^2)}{3(20+x^2)}}$$

4. Le développement du sinus à l'ordre 8 donne $\sin x - T(x) \sim -\dfrac{x^7}{5040}$, et la question 2 donne $\sin x - R(x) \sim \dfrac{11x^7}{50\,400}$. Par la proposition 13, ces deux différences ont respectivement le signe de $-x^7$ et de x^7 au voisinage de 0 :

$$\boxed{R(x) < \sin x < T(x) \quad \text{pour tout } x > 0 \text{ assez petit}}$$

Au voisinage de $+\infty$, une fonction rationnelle est équivalente au quotient de ses termes de plus haut degré : $R(x) \sim \dfrac{-7x^3/60}{x^2/20}$ et $T(x) \sim \dfrac{x^5}{120}$, soit

$$\boxed{R(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{7x}{3}, \qquad T(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^5}{120}}$$

Aucune des deux ne reste bornée comme le sinus, mais R s'en écarte bien plus lentement. Numériquement, $R(1) = \dfrac{53}{63} \approx 0{,}841\,270$ et $T(1) = \dfrac{101}{120} \approx 0{,}841\,667$ encadrent $\sin 1 \approx 0{,}841\,471$ avec des écarts presque égaux, mais $R(\pi) \approx -0{,}319$ est plus proche de $\sin\pi = 0$ que $T(\pi) \approx 0{,}524$.
Piège. Être négligeable devant toutes les autres est une propriété *locale*, qui ne dit pas que R est la meilleure approximation. Près de 0, c'est même T qui l'emporte de peu, puisque $\dfrac{1}{5040} \approx 1{,}98 \cdot 10^{-4}$ est inférieur à $\dfrac{11}{50\,400} \approx 2{,}18 \cdot 10^{-4}$; l'avantage de R n'apparaît que loin de 0. Ces fractions rationnelles, qui coïncident avec une fonction à un ordre aussi élevé que possible, ont été étudiées systématiquement par Henri Padé dans sa thèse de 1892, et portent son nom ; les approximations rationnelles de ce type servent au calcul numérique des fonctions usuelles.

EXERCICE 52 ⋆⋆⋆

Par la formule de Taylor-Young et l'imparité (proposition 9), il existe des réels a, b, p, q tels que

$$f(x) = x + ax^3 + bx^5 + o(x^6), \qquad g(x) = x + px^3 + qx^5 + o(x^6).$$

Comme $g(x) \sim x$, on a $g^3 = x^3 + 3px^5 + o(x^6)$ et $g^5 = x^5 + o(x^6)$, donc

$$f(g(x)) = g + ag^3 + bg^5 + o(x^6) = x + (p+a)x^3 + (q + 3ap + b)x^5 + o(x^6).$$

En échangeant les rôles, $g(f(x)) = x + (a+p)x^3 + (b + 3pa + q)x^5 + o(x^6)$. Les deux développements coïncident :

$$\boxed{f(g(x)) - g(f(x)) = o(x^6)}$$

Le coefficient de x^6 est d'ailleurs nul d'office, puisque $f \circ g - g \circ f$ est impaire. Celui de x^7 n'est pas nul en général : pour $f(x) = x + x^3$ et $g(x) = x + 2x^3$, on calcule $f(g(x)) - g(f(x)) = 6x^7 + 6x^9$. Deux fonctions tangentes à l'identité commutent donc « presque » à l'ordre 6, mais pas au-delà.

EXERCICE 53 ⋆⋆⋆

1. On a $\mathrm{e}^x - 1 = x(1 + O(x))$, donc $(\mathrm{e}^x - 1)^n = x^n(1 + O(x))^n = \boxed{x^n + o(x^n)}$.

2. Par la formule du binôme, $(\mathrm{e}^x - 1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \mathrm{e}^{kx}$, et $\mathrm{e}^{kx} = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{k^p x^p}{p!} + o(x^n)$, avec la convention $0^0 = 1$ pour $k = 0$. En regroupant les termes de même degré,

$$(\mathrm{e}^x - 1)^n = \sum_{p=0}^{n} \Big(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p \Big) \frac{x^p}{p!} + o(x^n) = \sum_{p=0}^{n} \frac{S_p}{p!} x^p + o(x^n).$$

3. Par unicité du développement limité à l'ordre n, les questions 1 et 2 donnent $\dfrac{S_p}{p!} = 0$ pour $p < n$ et $\dfrac{S_n}{n!} = 1$.

$$\boxed{S_p = 0 \text{ pour } 0 \leqslant p < n, \qquad S_n = n!}$$

Pour $n = 2$: $S_0 = 1 - 2 + 1 = 0$, $S_1 = 0 - 2 + 2 = 0$ et $S_2 = 0 - 2 + 4 = 2 = 2!$. Le chapitre 21 montrera que S_p compte les surjections d'un ensemble à p éléments sur un ensemble à n éléments : il n'y en a aucune si $p < n$, et ce sont les $n!$ bijections si $p = n$.

EXERCICE 54 ⋆⋆⋆

1. La fonction $u \mapsto u - \operatorname{th} u$ a pour dérivée $\operatorname{th}^2 u > 0$ sur $]0, +\infty[$ et s'annule en 0 : elle est strictement positive, d'où $\operatorname{th} u < u$. Pour $x > 0$, avec $t = \dfrac{1}{x}$,

$$f'(x) = \operatorname{sh} t - t \operatorname{ch} t = \operatorname{ch} t \, (\operatorname{th} t - t) < 0 :$$

f est strictement décroissante. En $+\infty$, $f(x) = \dfrac{\operatorname{sh} t}{t} \to 1$; en 0^+, $\dfrac{\operatorname{sh} t}{t} \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^t - 1}{2t} \to +\infty$ quand $t \to +\infty$.

$\boxed{f \text{ décroît strictement de } +\infty \text{ à } 1}$

2. On a $\dfrac{\operatorname{sh} t}{t} = 1 + \dfrac{t^2}{6} + o(t^2)$, donc $\boxed{f(x) = 1 + \dfrac{1}{6x^2} + o\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)}$.

3. La fonction f, continue et strictement décroissante, réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$, qui contient $\dfrac{n+1}{n}$: u_n existe et est unique. La suite $\Big(\dfrac{n+1}{n}\Big)$ est strictement décroissante, et f^{-1} aussi, donc (u_n) est strictement croissante. Enfin $f^{-1}(y)$ tend vers $+\infty$ quand y tend vers 1^+, et $\dfrac{n+1}{n} \to 1^+$: $u_n \to +\infty$.

4. Par la question 2, $\dfrac{1}{n} = f(u_n) - 1 \sim \dfrac{1}{6u_n^2}$, d'où $u_n^2 \sim \dfrac{n}{6}$, puis

$$\boxed{u_n \sim \sqrt{\frac{n}{6}}}$$

EXERCICE 55 ⋆⋆⋆

Le centre du cercle, après une rotation d'angle t, est au point $(t,1)$, puisque le cercle a roulé sans glisser d'une longueur d'arc t ; le point M s'en déduit en ajoutant le vecteur $(-\sin t, -\cos t)$, ce qui redonne les formules de l'énoncé.

1. Le théorème 5 donne $\sin t = t - \dfrac{t^3}{6} + o(t^4)$ et $\cos t = 1 - \dfrac{t^2}{2} + o(t^3)$, d'où

$$\boxed{x(t) = \frac{t^3}{6} + o(t^3), \qquad y(t) = \frac{t^2}{2} + o(t^3)}$$

Les coefficients de t sont nuls : $\boxed{x'(0) = y'(0) = 0}$ (proposition 10), ce que l'on vérifie sur $x'(t) = 1 - \cos t$ et $y'(t) = \sin t$. Au moment où il touche le sol, le point M est immobile.

2. La fonction x est dérivable, de dérivée $x'(t) = 1 - \cos t \geqslant 0$, qui ne s'annule sur $[0\,,2\pi]$ qu'en 0 et en 2π ; elle n'est donc identiquement nulle sur aucun intervalle non réduit à un point, et x est strictement croissante sur $[0\,,2\pi]$ (chapitre 9, théorème 7). Comme x est continue, avec $x(0) = 0$ et $x(2\pi) = 2\pi$, le théorème de la bijection continue (chapitre 8, théorème 11) conclut :

$$\boxed{x \text{ est une bijection de } [0\,,2\pi] \text{ sur } [0\,,2\pi], \text{ de réciproque } \varphi \text{ continue et strictement croissante}}$$

Pour $t \in [0\,,2\pi]$, on pose $u = x(t)$; alors $t = \varphi(u)$, et le point M a pour coordonnées

$$(u, y(\varphi(u))) = (u, Y(u)) :$$

il décrit bien la courbe de Y.

3. La fonction φ est continue en 0, avec $\varphi(0) = 0$, et $\varphi(u) > 0$ pour $u > 0$: $\varphi(u)$ tend vers 0 par valeurs strictement positives quand u tend vers 0^+. La question 1 et la proposition 13 donnent $x(t) \sim \dfrac{t^3}{6}$ au voisinage de 0, et la substitution $t = \varphi(u)$ (théorème 1) donne

$$u = x(\varphi(u)) \underset{u\to 0^+}{\sim} \frac{\varphi(u)^3}{6}, \qquad \text{soit} \qquad \varphi(u)^3 \sim 6u.$$

Les deux membres étant strictement positifs, on élève à la puissance fixe $\dfrac{1}{3}$ (théorème 1). De même, $y(t) \sim \dfrac{t^2}{2}$ donne $Y(u) = y(\varphi(u)) \sim \dfrac{\varphi(u)^2}{2}$, puis on élève au carré :

$$\boxed{\varphi(u) \underset{u\to 0^+}{\sim} (6u)^{1/3}, \qquad Y(u) \underset{u\to 0^+}{\sim} \frac{1}{2}(6u)^{2/3}}$$

4. Comme $Y(0) = y(0) = 0$, le taux d'accroissement de Y en 0 vérifie, pour $u > 0$,

$$\frac{Y(u) - Y(0)}{u} = \frac{Y(u)}{u} \underset{u\to 0^+}{\sim} \frac{(6u)^{2/3}}{2u} = \frac{6^{2/3}}{2u^{1/3}} \xrightarrow[u\to 0^+]{} +\infty.$$

$$\boxed{Y \text{ n'est pas dérivable à droite en 0, et sa courbe admet en l'origine une tangente verticale}}$$

Le déplacement horizontal $x(t) \sim \dfrac{t^3}{6}$ est négligeable devant le déplacement vertical $y(t) \sim \dfrac{t^2}{2}$: le point M, immobile à l'instant où il touche le sol, en repart verticalement. Pour $t \in [-2\pi\,,0]$, la fonction x étant impaire et y paire, on obtient l'arche précédente, symétrique de la première par rapport à l'axe des ordonnées : les deux arches arrivent en l'origine tangentes à cet axe, en formant une pointe. C'est ce que l'on appelle un *point de rebroussement*.

Piège. L'erreur la plus répandue est de conclure de $y'(0) = 0$ que la tangente est horizontale. La pente de la corde est le quotient $\dfrac{y(t)}{x(t)} \sim \dfrac{3}{t}$, qui tend vers $+\infty$ quand t tend vers 0^+ : c'est la comparaison des premiers termes non nuls de x et de y, et non la valeur des dérivées, qui donne la tangente.

5. On reprend le calcul avec un terme de plus. Le théorème 5 donne $x(t) = \dfrac{t^3}{6} - \dfrac{t^5}{120} + o(t^6)$, c'est-à-dire

$$6x(t) = t^3\Big(1 - \frac{t^2}{20} + o(t^2)\Big).$$

On substitue $t = \varphi(u)$, et l'on note $w = (6u)^{1/3}$, qui tend vers 0. En élevant à la puissance $\dfrac{1}{3}$, avec $(1+v)^{1/3} = 1 + \dfrac{v}{3} + o(v)$,

$$w = \varphi(u)\Big(1 - \frac{\varphi(u)^2}{60} + o(\varphi(u)^2)\Big), \qquad \text{donc} \qquad \varphi(u) = w\Big(1 + \frac{\varphi(u)^2}{60} + o(\varphi(u)^2)\Big).$$

Par la question 3, $\varphi(u) \sim w$, donc $\varphi(u)^2 = w^2 + o(w^2)$, et les $o(\varphi(u)^2)$ sont des $o(w^2)$:

$$\boxed{\varphi(u) = w + \frac{w^3}{60} + o(w^3)}$$

Enfin $Y(u) = 1 - \cos\varphi(u) = \dfrac{\varphi(u)^2}{2} - \dfrac{\varphi(u)^4}{24} + o(w^4)$, avec $\varphi(u)^2 = w^2 + \dfrac{w^4}{30} + o(w^4)$ et $\varphi(u)^4 = w^4 + o(w^4)$. Comme $\dfrac{1}{60} - \dfrac{1}{24} = -\dfrac{1}{40}$ et $w^4 = (6u)^{4/3}$,

$$\boxed{Y(u) \underset{u\to 0^+}{=} \frac{1}{2}(6u)^{2/3} - \frac{1}{40}(6u)^{4/3} + o(u^{4/3})}$$

Pour $t = 0{,}1$, on a $u \approx 1{,}666 \cdot 10^{-4}$ et $Y(u) = 1 - \cos 0{,}1 \approx 4{,}995\,835 \cdot 10^{-3}$; le premier terme seul donne $4{,}998\,33 \cdot 10^{-3}$, et les deux termes $4{,}995\,835 \cdot 10^{-3}$, à 10^{-9} près.

À retenir. Ce développement, en puissances fractionnaires de u, n'est pas un développement limité : c'est un développement asymptotique. Il vient de l'inversion de $x(t) \sim \dfrac{t^3}{6}$. À l'exercice 24, la fonction à inverser avait une dérivée non nulle en 0, et sa réciproque admettait un développement limité ; ici $x'(0) = 0$, et l'on retrouve le phénomène de la racine cubique au chapitre 9 : une réciproque n'est pas dérivable là où la fonction a une dérivée nulle.

EXERCICE 56 ⋆⋆⋆⋆

1. On a $0 < \operatorname{th} u < u$ pour $u > 0$ (exercice 54) : par récurrence, (u_n) est strictement positive et décroissante. Elle converge vers $\ell \geqslant 0$ tel que $\operatorname{th}\ell = \ell$, donc $\boxed{\ell = 0}$.

2. Par quotient des développements de sh et de ch (proposition 12),

$$\operatorname{th} u = u - \frac{u^3}{3} + \frac{2u^5}{15} + o(u^6), \qquad \operatorname{th}^2 u = u^2\Big(1 - \frac{2u^2}{3} + \frac{17u^4}{45} + o(u^4)\Big),$$

puis

$$\frac{1}{\operatorname{th}^2 u} = \frac{1}{u^2}\Big(1 + \frac{2u^2}{3} + \Big(\frac{4}{9} - \frac{17}{45}\Big)u^4 + o(u^4)\Big), \qquad \boxed{\frac{1}{\operatorname{th}^2 u} - \frac{1}{u^2} = \frac{2}{3} + \frac{u^2}{15} + o(u^2)}$$

3. Pour $\alpha > 0$, $\dfrac{1}{\operatorname{th}^\alpha u} - \dfrac{1}{u^\alpha} = \dfrac{1}{u^\alpha}\Big(\Big(1 - \dfrac{u^2}{3} + o(u^2)\Big)^{-\alpha} - 1\Big) \sim \dfrac{\alpha}{3}u^{2-\alpha}$, qui a une limite finie non nulle si et seulement si $\alpha = 2$. Avec $\alpha = 2$, la suite $\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$ tend vers $\dfrac{2}{3}$, et le lemme de Cesàro donne

$$\boxed{\alpha = 2, \qquad u_n \sim \sqrt{\frac{3}{2n}}}$$

4. On pose $d_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2} - \dfrac{2}{3}$. Par la question 2, $d_n = \dfrac{u_n^2}{15} + o(u_n^2) \sim \dfrac{1}{15} \cdot \dfrac{3}{2n} = \dfrac{1}{10n}$. Cette suite est positive à partir d'un certain rang, et l'exercice 11 donne $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} d_k \sim \frac{\ln n}{10}$. Comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} d_k = \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} - \frac{2n}{3}$,

$$\boxed{\frac{1}{u_n^2} = \frac{2n}{3} + \frac{\ln n}{10} + o(\ln n)}$$

Enfin $u_n = \sqrt{\dfrac{3}{2n}}\Big(1 + \dfrac{3\ln n}{20n} + o\Big(\dfrac{\ln n}{n}\Big)\Big)^{-1/2}$, et

$$\boxed{u_n = \sqrt{\frac{3}{2n}} - \frac{3}{40}\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{\ln n}{n^{3/2}} + o\Big(\frac{\ln n}{n^{3/2}}\Big)}$$

À retenir. La démarche se généralise à toute suite $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ avec $\varphi(u) = u - cu^p + \cdots$: on cherche l'exposant α qui rend $\dfrac{1}{u_n^\alpha}$ presque arithmétique, et c'est toujours $\alpha = p - 1$. Ici $p = 3$; pour l'exercice 45, $p = 2$ et $\alpha = 1$.