EXERCICES – CHAPITRE 10

ANALYSE ASYMPTOTIQUE ET DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

⋆ *application directe* ⋆⋆ *mise en œuvre* ⋆⋆⋆ *problème* ⋆⋆⋆⋆ *problème long, en autonomie*

Relations de comparaison

EXERCICE 1 ⋆

Équivalents ou pas ? Les relations suivantes sont-elles vraies, quand n tend vers $+\infty$?

(a) $n \sim n+1$

(b) $n^2 \sim n^2+n$

(c) $\ln n \sim \ln(10^6 n)$

(d) $\mathrm{e}^n \sim \mathrm{e}^{n+10^{-6}}$

(e) $\mathrm{e}^n \sim \mathrm{e}^{2n}$

(f) $\ln n \sim \ln(n+1)$

EXERCICE 2 ⋆

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Écrire les relations suivantes sous une forme plus simple, toutes étant prises quand n tend vers $+\infty$.

(a) $u_n \sim \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{12n^2}$

(b) $u_n \sim \dfrac{n^2+2n+3}{3n^3-n}$

(c) $u_n \sim \dfrac{n+n^2}{\ln n - n^3}$

(d) $u_n = 1 + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big) + o\Big(\dfrac{1}{n^3}\Big)$

(e) $u_n = o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big) + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big) - o\Big(\dfrac{1}{\ln n}\Big)$

(f) $u_n = o(n) - o(n)$

(g) $u_n = o(n) - O(n)$

(h) $u_n = (1+o(1))v_n$

EXERCICE 3 ⋆

Déterminer un équivalent simple des suites de termes généraux suivants.

(a) $\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$

(b) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$

(c) $\dfrac{n^3 - \sqrt{1+n^2}}{\ln n - 2n^2}$

(d) $\sin \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

(e) $\ln\Big(1 + \dfrac{1}{n^2+1}\Big)$

(f) $\ln(n+2) - \ln(n+1)$

(g) $\dfrac{n! + \mathrm{e}^n}{2^n + 3^n}$

(h) $(2^n + n^2)\mathrm{e}^{-n}$

EXERCICE 4 ⋆

Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes, au voisinage du point indiqué.

(a) $x + 1 + \ln x$, en 0^+ et en $+\infty$

(b) $1 - x^2$, en 1

(c) $\ln x$, en 1

(d) $\mathrm{ch}\,\sqrt{x}$, en $+\infty$

(e) $\dfrac{\sin x \, \ln(1+x^2)}{x \tan x}$, en 0

(f) $\ln(\sin x)$, en 0^+

(g) $\ln\Big(1 + \dfrac{1}{x^2}\Big)$, en 0 et en $+\infty$

(h) $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$, en $+\infty$

(i) $\tan x - \sin x$, en 0

(j) $\ln(\cos x)$, en $\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$

EXERCICE 5 ⋆

Calculer les limites suivantes à l'aide d'équivalents.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)(1+2x)}{x^2-x^4}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin x)}{\tan(6x)}$

(c) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\ln(\sin^2 x)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{1-\cos(2x)}$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x+1}\,\ln\left(1-\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right)$

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(\mathrm{e}^{1/x^2}-\mathrm{e}^{1/(x+1)^2}\right)$

EXERCICE 6 ⋆⋆

Classer par ordre de négligeabilité les suites de termes généraux

$$\frac{1}{n},\quad \frac{1}{n^2},\quad \frac{\ln n}{n},\quad \frac{1}{n\ln n},\quad \frac{\mathrm{e}^n}{n^3},\quad n,\quad 1,\quad \sqrt{n\,\mathrm{e}^n},\quad n\ln n,\quad \frac{n^2}{\ln n}.$$

EXERCICE 7 ⋆⋆

Une somme de factorielles. Montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n} k! \sim n!$. On pourra majorer $\sum\limits_{k=0}^{n-2} k!$ par $(n-1)\cdot(n-2)!$.

EXERCICE 8 ⋆⋆

Équivalents, exponentielle et logarithme. Soit f et g deux fonctions réelles définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Montrer que $\mathrm{e}^f \sim \mathrm{e}^g$ au voisinage de a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=0$.
2. La relation $f\sim g$ entraîne-t-elle $\mathrm{e}^f \sim \mathrm{e}^g$?
3. On suppose f et g strictement positives, $f\sim g$, et $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\ell\in[0\,,+\infty]$. Montrer que, si $\ell\neq 1$, alors $\ln f \sim \ln g$. Que se passe-t-il si $\ell = 1$?

EXERCICE 9 ⋆⋆

On pose, pour $n\geqslant 1$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que, pour tout $n\geqslant 1$, $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
2. En déduire un encadrement de S_n, puis que $S_n \sim 2\sqrt{n}$.

EXERCICE 10 ⋆⋆

Entre deux.

1. Soit (u_n) et (v_n) deux suites strictement positives telles que $u_n = o(v_n)$. Construire une suite (w_n) telle que $u_n = o(w_n)$ et $w_n = o(v_n)$.
2. Trouver une fonction f telle que, pour tout $\alpha > 0$, $x^\alpha = o(f(x))$ et $f(x) = o(\mathrm{e}^{\alpha x})$ au voisinage de $+\infty$.
3. Trouver une fonction f continue sur $[0\,,1]$, telle que $f(0) = 0$ et $x^\alpha = o(f(x))$ au voisinage de 0 pour tout $\alpha > 0$.

EXERCICE 11 ⋆⋆⋆

Sommes de suites équivalentes. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites strictement positives telles que $u_n \sim v_n$. On pose $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et $V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$, et l'on suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$.

1. Soit $\varepsilon > 0$, et N tel que $|u_k - v_k| \leqslant \varepsilon v_k$ pour $k > N$. Montrer que $|U_n - V_n| \leqslant |U_N - V_N| + \varepsilon V_n$ pour $n > N$.
2. En déduire que $U_n \sim V_n$.
3. Application : en admettant que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$ (exercice 18 du chapitre 9), donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{1}{k}$ et de $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$. Vérifier le second résultat par un calcul direct.
4. Le résultat subsiste-t-il si (V_n) converge ?

EXERCICE 12 ⋆⋆⋆

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante telle que $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$. Montrer que $u_n \sim \frac{1}{2n}$. On encadrera $2u_n$ à l'aide de $u_{n-1} + u_n$ et de $u_n + u_{n+1}$.

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

EXERCICE 13 ⋆

Sommes et produits. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre indiqué.

(a) $\dfrac{1}{1-x} - \mathrm{e}^x$, à l'ordre 3

(b) $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$, à l'ordre 4

(c) $\sin x \cos(2x)$, à l'ordre 6

(d) $\cos x \ln(1+x)$, à l'ordre 4

(e) $(x^3+1)\sqrt{1-x}$, à l'ordre 3

(f) $\big(\ln(1+x)\big)^2$, à l'ordre 4

EXERCICE 14 ⋆

Quotients. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre indiqué.

(a) $\dfrac{1}{1+x+x^2}$, à l'ordre 4

(b) $\dfrac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$, à l'ordre 2

(c) $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$, à l'ordre 3

(d) $\dfrac{x\,\mathrm{e}^{-x}}{2x+1}$, à l'ordre 4

EXERCICE 15 ⋆⋆

Compositions. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre indiqué.

(a) $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$, à l'ordre 4

(b) $(\cos x)^{\sin x}$, à l'ordre 5

(c) $(1+x)^{1/x}$, à l'ordre 3

(d) $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$, à l'ordre 3

(e) $x\,(\operatorname{ch} x)^{1/x}$, à l'ordre 4

(f) $\mathrm{e}^{\cos x}$, à l'ordre 4

EXERCICE 16 ⋆

En un point autre que 0. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de $x \mapsto \frac{1}{x}$ en 2, de ln en 2, de exp en 1, de cos en $\frac{\pi}{3}$, et de $x \mapsto \sqrt{x}$ en 2.

EXERCICE 17 ⋆⋆

Par primitivation.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de Arccos, puis de $x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.
2. Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}\dfrac{1+x}{1-x}$ sur $]-\infty, 1[$. Calculer f', en déduire le développement limité de f à l'ordre 5 en 0, puis une expression simple de f.

EXERCICE 18 ⋆⋆

Au voisinage de l'infini. Déterminer, en posant $t = \frac{1}{x}$:

1. un développement de $\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$ à la précision $o\left(\frac{1}{x^3}\right)$;
2. un développement de $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \ln x$ en $+\infty$ à la précision $o\left(\frac{1}{x^4}\right)$;
3. pour tout $n \in \mathbb{N}$, un développement de $\operatorname{Arctan} x$ en $+\infty$ à la précision $o\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right)$.

EXERCICE 19 ⋆⋆

Avec la formule de Taylor-Young. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, et $a \in \mathbb{R}$. Déterminer

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(f'(x) - \frac{f(x)-f(0)}{x}\right).$$

EXERCICE 20 ⋆⋆

Soit f et g deux fonctions impaires de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de 0, telles que $g'''(0) \neq 0$. Déterminer

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 2f(2x) + f(3x)}{g(x) - 2g(2x) + g(3x)}.$$

EXERCICE 21 ⋆⋆

Dérivées successives en 0. On rappelle que, pour une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, le coefficient de x^k dans le développement limité en 0 vaut $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

1. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $f(x) = \dfrac{x^4}{1+x^6}$.
2. Soit $p \geqslant 1$ et $g = \sin^p$. Calculer $g^{(k)}(0)$ pour $0 \leqslant k \leqslant p$.

EXERCICE 22 ⋆⋆

Le développement de la tangente.

1. En partant de $\tan' = 1 + \tan^2$ et du développement $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$ du cours, déterminer le développement limité de tan à l'ordre 8 en 0.
2. Écrire une fonction Python `dl_tan(n)` qui renvoie la liste des coefficients $a_0, \dots, a_n$ du développement limité de tan à l'ordre n en 0, en répétant ce procédé. On utilisera des fractions exactes, à l'aide du module `fractions`.

EXERCICE 23 ⋆⋆

Astucieux. Déterminer le développement limité à l'ordre 12 en 0 de $x \mapsto \ln\left(\sum_{k=0}^{11} \frac{x^k}{k!}\right)$. On pourra écrire la somme sous la forme $\mathrm{e}^x - R(x)$.

EXERCICE 24 ⋆⋆⋆

Développement d'une réciproque.

1. Montrer que $f : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{x^2}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, et que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et impaire.
2. Justifier que f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 5 en 0 de la forme $ax+bx^3+cx^5+o(x^5)$, et déterminer a, b, c à l'aide de l'égalité $f^{-1}(f(x)) = x$.
3. Déterminer de même le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la réciproque de $x \mapsto 2x + \sin x$.

EXERCICE 25 ⋆⋆⋆

Par une équation différentielle. Soit $f : x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1\,,1[$.

1. Montrer que f est solution de l'équation $(1-x^2)y' - xy = 1$.
2. Justifier que f admet un développement limité à tout ordre en 0, et qu'il ne contient que des puissances impaires de x.
3. En reportant ce développement dans l'équation, déterminer le développement limité de f à l'ordre 7 en 0.

EXERCICE 26 ⋆⋆⋆

Développements limités et régularité.

1. Une fonction paire telle que $f(x) = 1 + x^2 + o(x^2)$ au voisinage de 0 vérifie-t-elle nécessairement $f(x) = 1 + x^2 + o(x^3)$?
2. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}\cos\left(\mathrm{e}^{1/x^2}\right)$ pour $x \neq 0$. Montrer que $f(x) = o(x^n)$ en 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Applications à l'étude locale

EXERCICE 27 ⋆

Calculer les limites suivantes à l'aide de développements limités.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\ln(1+x)-\mathrm{e}^x}{1-\cos x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-\sin x}{x^2}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{Arctan} x}{\sin^3 x}$

(e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(2x^2-1)}{\tan(x-1)}$

(f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+7x^2-8}{x^4+x^3-2}$

EXERCICE 28 ⋆⋆

Déterminer un équivalent simple, au voisinage de 0, de

$$\operatorname{sh}(\sin x)-\sin(\operatorname{sh} x), \qquad \ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}, \qquad \text{et, pour } x>0, \quad x^{\sin x}-(\sin x)^x.$$

EXERCICE 29 ⋆⋆

Tangente et position. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 et la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de 0.

(a) $x\mapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ (b) $x\mapsto \ln(x^2+2x+2)$ (c) $x\mapsto \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$

Pour (c), on précisera d'abord comment prolonger la fonction en 0.

EXERCICE 30 ⋆⋆

Étudier au voisinage de 0 la fonction $f : x\mapsto \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\operatorname{Arcsin} x}$: est-elle prolongeable par continuité ? Le prolongement est-il dérivable ? Quelle est la position de sa courbe par rapport à sa tangente ?

EXERCICE 31 ⋆⋆

Nature d'un point critique. Pour $a\in\mathbb{R}$, on pose $f_a(x)=\ln(1+x)-x+ax^2$ sur $]-1,+\infty[$. Montrer que 0 est un point critique de f_a, et déterminer selon a si f_a admet en 0 un minimum local, un maximum local, ou aucun extremum.

EXERCICE 32 ⋆⋆

Asymptotes. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'asymptote de sa courbe en $+\infty$ et la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

(a) $x\mapsto (x+1)\,\mathrm{e}^{1/x}$

(b) $x\mapsto x^2\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

(c) $x\mapsto \dfrac{x+1}{1+\mathrm{e}^{1/x}}$

(d) $x\mapsto x\exp\left(\dfrac{2x}{x^2-1}\right)$

(e) $x\mapsto \sqrt[3]{(x^2-2)(x+3)}$

EXERCICE 33 ⋆⋆

Quatre courbes. On considère, au voisinage de 0^+, les fonctions

$$f : x \mapsto \frac{1}{1+x}, \qquad g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}, \qquad h : x \mapsto \sqrt{1-2\sin x}, \qquad k : x \mapsto \cos\sqrt{2x}.$$

Montrer que leurs courbes ont la même tangente en 0, et déterminer la position relative des quatre courbes au voisinage de 0^+.

EXERCICE 34 ⋆⋆

La somme des cubes. Soit $n \geqslant 1$ et $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{(n+1)x}-1}{\mathrm{e}^x-1}$, prolongée par $f(0) = n+1$.

1. Écrire $f(x)$ comme une somme de $n+1$ exponentielles, et en déduire le développement limité de f à l'ordre 3 en 0, sous la forme d'une expression contenant les sommes $\sum k^p$.
2. Calculer ce même développement à partir de l'expression de f comme quotient, et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.

EXERCICE 35 ⋆⋆⋆

Compter avec un développement limité.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 10 en 0 de $u : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}$, en utilisant les développements de $\frac{1}{1-y}$.
2. En développant le produit, montrer que le coefficient de x^{10} est le nombre de triplets $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$ tels que $a+2b+5c = 10$. Interpréter ce nombre en termes de pièces de 1, 2 et 5 centimes.

EXERCICE 36 ⋆⋆

Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Déterminer un développement de $\ln\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à la précision $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et en déduire que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

EXERCICE 37 ⋆⋆⋆

Des points entiers.

1. Déterminer un développement de $\sqrt{x^4+x^3+1}$ en $+\infty$, à la précision $o\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. En déduire que l'ensemble $E = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid y^2 = x^4+x^3+1\}$ est fini. On traitera séparément les grandes valeurs de x positives et négatives.

Suites et développements asymptotiques

EXERCICE 38 ⋆⋆

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x + \ln x = n$ admet une unique solution u_n dans $]0\,,+\infty[$.
2. Montrer que $u_n \sim n$, puis que $u_n = n - \ln n + o(1)$.
3. Montrer que $u_n = n - \ln n + \dfrac{\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$.

EXERCICE 39 ⋆⋆

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

1. Montrer que f_n s'annule en un unique réel u_n, et que $u_n \in \left]0\,,\frac{1}{n}\right[$.
2. Montrer que $u_n \sim \frac{1}{n}$, puis déterminer un équivalent de $\frac{1}{n} - u_n$.

EXERCICE 40 ⋆⋆⋆

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x - \ln x = n$ admet une unique solution x_n dans $]0\,,1]$.
2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, puis que $x_n = \mathrm{e}^{-n}\mathrm{e}^{x_n}$, et en déduire que $x_n \sim \mathrm{e}^{-n}$.
3. Montrer que $x_n = \mathrm{e}^{-n} + \mathrm{e}^{-2n} + \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-3n} + o(\mathrm{e}^{-3n})$.

EXERCICE 41 ⋆⋆⋆

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n(x) = x^3 - (n+2)x^2 + (2n+1)x - 1$.

1. Montrer que, pour n assez grand, P_n s'annule en trois réels a_n, b_n, c_n vérifiant
$$0 < a_n < 1 < b_n < 3 < c_n.$$
2. En développant $(x - a_n)(x - b_n)(x - c_n)$, exprimer $a_n + b_n + c_n$ et $a_n b_n c_n$ à l'aide de n.
3. Déterminer un équivalent de c_n, puis la limite de (b_n) et un équivalent de a_n.

EXERCICE 42 ⋆⋆

Soit $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \operatorname{Arctan} u_n$.

1. Montrer que (u_n) est à valeurs strictement positives et converge vers 0.
2. Déterminer la limite de $\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$, et en déduire un équivalent de u_n à l'aide du lemme de Cesàro du cours.

EXERCICE 43 ⋆⋆

Soit $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, puis déterminer un équivalent de u_n en étudiant $u_{n+1}^2 - u_n^2$.

EXERCICE 44 ⋆⋆

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $x_{n+1} = x_n + \mathrm{e}^{-x_n}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, puis que $\mathrm{e}^{x_{n+1}} - \mathrm{e}^{x_n}$ tend vers 1, et en déduire que $x_n = \ln n + o(1)$.

EXERCICE 45 ⋆⋆⋆

Soit $u_0 \in \left]0\,,\frac{1}{3}\right[$ et $u_{n+1} = u_n - 3u_n^2$.

1. Montrer que (u_n) est à valeurs strictement positives et converge vers 0.
2. On pose $w_n = \dfrac{1}{u_n}$. Montrer que $w_{n+1} - w_n = 3 + 9u_n + O(u_n^2)$, et en déduire que $u_n \sim \dfrac{1}{3n}$.
3. Montrer que $w_{n+1} - w_n - 3 \sim \dfrac{3}{n}$, puis, à l'aide de l'exercice 11, que $w_n - 3n \sim 3\ln n$.
4. En déduire un développement asymptotique de u_n à deux termes.

EXERCICE 46 ⋆⋆⋆

Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$.

1. Montrer par récurrence que $n - 1 \leqslant u_n \leqslant n$ pour $n \geqslant 1$.
2. En déduire que $u_{n+1} = n + \frac{1}{2} + o(1)$, puis que $u_n = n - \frac{1}{2} + o(1)$.
3. Montrer que $u_n = n - \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$.

EXERCICE 47 ⋆⋆

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ qui prend une fois la valeur 1, deux fois la valeur 2, trois fois la valeur 3, et ainsi de suite : $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, \dots$ Montrer que u_n est le plus petit entier k tel que $\frac{k(k+1)}{2} \geqslant n$, en déduire une expression de u_n, puis un équivalent.

EXERCICE 48 ⋆⋆

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$. On utilisera l'inégalité $|\sin t - t| \leqslant \frac{|t|^3}{6}$, que l'on justifiera.

Exercices de synthèse

EXERCICE 49 ⋆⋆

Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

1. Si $f \sim g$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x) - g(x)\big) = 0$.
2. Si $f \sim g$ au voisinage de a et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.
3. Si $u_n \sim v_n$, alors $\mathrm{e}^{u_n} \sim \mathrm{e}^{v_n}$.
4. Si $f = o(g)$ et $g = O(h)$ au voisinage de a, alors $f = o(h)$.
5. Si f est paire et admet un développement limité à l'ordre 5 en 0, les coefficients de x, x^3 et x^5 sont nuls.
6. Si f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0, alors f est deux fois dérivable en 0.
7. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, en un point a intérieur à son intervalle de définition, alors f admet en a un minimum local strict.
8. Si f est dérivable et admet un développement limité à l'ordre $n \geqslant 1$ en 0, alors f' admet un développement limité à l'ordre $n - 1$ en 0.
9. On a $\ln(n!) \sim n \ln n$.
10. Si $u_n \sim v_n$ et si $v_n > 0$ pour tout n, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.

EXERCICE 50 ⋆⋆

Des moyennes vers la moyenne géométrique. Soit a, b, c trois réels strictement positifs, et $G = \sqrt[3]{abc}$ leur moyenne géométrique. Pour tout réel $t \neq 0$, on pose

$$M(t) = \Big(\frac{a^t + b^t + c^t}{3}\Big)^{1/t},$$

de sorte que $M(1)$ est la moyenne arithmétique de a, b, c, et $M(-1)$ leur moyenne harmonique.

1. Montrer que $\lim\limits_{t\to 0} M(t) = G$. En déduire la limite de $\Big(\dfrac{a^{1/x} + b^{1/x} + c^{1/x}}{3}\Big)^x$ quand x tend vers $+\infty$.
2. On prolonge M en posant $M(0) = G$. Montrer que M est dérivable en 0, avec

$$M'(0) = \frac{G}{6}\Big(\Big(\ln\frac{a}{G}\Big)^2 + \Big(\ln\frac{b}{G}\Big)^2 + \Big(\ln\frac{c}{G}\Big)^2\Big).$$

   En déduire que, si a, b, c ne sont pas tous égaux, on a $M(-t) < G < M(t)$ pour tout $t > 0$ assez petit.
3. Déterminer les limites de $M(t)$ quand t tend vers $+\infty$ et quand t tend vers $-\infty$.

EXERCICE 51 ⋆⋆

Une approximation rationnelle du sinus. Pour tout couple (a, b) de réels, on considère la fonction $f_{a,b}$, définie au voisinage de 0 par

$$f_{a,b}(x) = \sin x - \frac{x + ax^3}{1 + bx^2}.$$

1. Déterminer le développement limité de $f_{a,b}$ à l'ordre 6 en 0.
2. Montrer qu'il existe un unique couple (a_0, b_0) tel que $f_{a_0,b_0}(x) = o(x^6)$ au voisinage de 0, et donner un équivalent de f_{a_0,b_0} en 0.
3. Parmi les fonctions $f_{a,b}$, y en a-t-il une qui soit négligeable en 0 devant toutes les autres ?
4. On pose $R(x) = \dfrac{x + a_0x^3}{1 + b_0x^2}$ et $T(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$: chacune de ces deux approximations du sinus dépend de trois coefficients. Montrer que $R(x) < \sin x < T(x)$ pour tout $x > 0$ assez petit, puis comparer R et T au voisinage de $+\infty$.

EXERCICE 52 ⋆⋆⋆

Soit f et g deux fonctions impaires de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, telles que $f'(0) = g'(0) = 1$. Montrer que $f(g(x)) - g(f(x)) = o(x^6)$ au voisinage de 0. On écrira les développements limités de f et de g à l'ordre 6, et l'on exploitera l'imparité de $f \circ g - g \circ f$. Le coefficient de x^7 est-il nul en général ?

EXERCICE 53 ⋆⋆⋆

Une somme alternée. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour $p \in \mathbb{N}$, $S_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p$.

1. Montrer que $(\mathrm{e}^x - 1)^n = x^n + o(x^n)$ au voisinage de 0.
2. En développant $(\mathrm{e}^x - 1)^n$ par la formule du binôme, puis chaque exponentielle, montrer que le coefficient de x^p dans son développement limité vaut $\frac{S_p}{p!}$.
3. En déduire que $S_p = 0$ pour $0 \leqslant p < n$, et calculer S_n.

EXERCICE 54 ⋆⋆⋆

Soit $f : x \mapsto x \operatorname{sh} \frac{1}{x}$ sur $]0\,,+\infty[$.

1. Montrer que $\operatorname{th} u < u$ pour $u > 0$. En déduire que f est strictement décroissante, et déterminer ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. Déterminer un développement de $f(x)$ en $+\infty$ à la précision $o(\frac{1}{x^2})$.
3. Pour $n \geqslant 1$, montrer que l'équation $f(x) = \frac{n+1}{n}$ admet une unique solution $u_n > 0$, que la suite (u_n) est croissante et tend vers $+\infty$.
4. Déterminer un équivalent de u_n.

EXERCICE 55 ⋆⋆⋆

Le point de rebroussement de la cycloïde. Un cercle de rayon 1 roule sans glisser sur l'axe des abscisses. Lorsqu'il a tourné d'un angle t, un point M du cercle, situé à l'origine pour $t = 0$, a pour coordonnées

$$x(t) = t - \sin t, \qquad y(t) = 1 - \cos t.$$

1. Déterminer les développements limités de x et de y à l'ordre 3 en 0, et calculer $x'(0)$ et $y'(0)$.
2. Montrer que x réalise une bijection de $[0\,,2\pi]$ sur lui-même, dont la réciproque φ est continue. On pose $Y = y \circ \varphi$: la première arche de la courbe décrite par M est la courbe représentative de Y sur $[0\,,2\pi]$.
3. Montrer que $\varphi(u) \sim (6u)^{1/3}$ quand u tend vers 0^+, puis que $Y(u) \sim \frac{1}{2}(6u)^{2/3}$.
4. En déduire que Y n'est pas dérivable à droite en 0, et que la courbe de Y admet en l'origine une tangente verticale, alors que x et y sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. Interpréter ce résultat.
5. Montrer que $Y(u) = \frac{1}{2}(6u)^{2/3} - \frac{1}{40}(6u)^{4/3} + o(u^{4/3})$ quand u tend vers 0^+.

EXERCICE 56 ⋆⋆⋆⋆

Une suite récurrente lente. Soit $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \operatorname{th} u_n$.

1. Montrer que (u_n) est strictement positive, décroissante, et converge vers 0.
2. Déterminer le développement limité de th à l'ordre 5 en 0, puis celui de $\dfrac{1}{\operatorname{th}^2 u} - \dfrac{1}{u^2}$ à l'ordre 2.
3. Trouver un réel $\alpha > 0$ tel que la suite $\left(\dfrac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \dfrac{1}{u_n^\alpha}\right)$ ait une limite finie non nulle, et en déduire un équivalent de u_n.
4. À l'aide de l'exercice 11, montrer que $\dfrac{1}{u_n^2} = \dfrac{2n}{3} + \dfrac{\ln n}{10} + o(\ln n)$, et en déduire un développement asymptotique de u_n à deux termes.