CORRIGÉ – CHAPITRE 13

POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

⋆ *application directe* ⋆⋆ *mise en œuvre* ⋆⋆⋆ *problème* ⋆⋆⋆⋆ *problème long, en autonomie*

L'anneau $\mathbb{K}[X]$

EXERCICE 1 ⋆

Si $P = A^2$ avec $A \in \mathbb{R}[X]$, alors $\deg A = 2$ et le coefficient dominant de A vaut ± 1 ; quitte à remplacer A par $-A$, on écrit $A = X^2 + \beta X + c$. Le développement donne

$$A^2 = X^4 + 2\beta X^3 + (\beta^2 + 2c)X^2 + 2\beta c X + c^2.$$

Par identification des coefficients : $2\beta = 6$, $c^2 = 1$, $a = 9 + 2c$ et $b = 6c$. Ainsi $\beta = 3$ et $c = \pm 1$.

$$\boxed{(a,b) = (11,6),\ P = (X^2+3X+1)^2 \qquad \text{ou} \qquad (a,b) = (7,-6),\ P = (X^2+3X-1)^2}$$

EXERCICE 2 ⋆⋆

(i) Le polynôme nul convient. Si $P \neq 0$ est de degré n, les degrés donnent $2n = n + 2$, soit $n = 2$. On écrit $P = aX^2 + bX + c$:

$$P(X^2) = aX^4 + bX^2 + c \qquad \text{et} \qquad (X^2+1)P = aX^4 + bX^3 + (a+c)X^2 + bX + c.$$

L'identification donne $b = 0$ et $a + c = b = 0$.

$$\boxed{P = a(X^2 - 1), \quad a \in \mathbb{R}}$$

(ii) Les constantes conviennent. Si $\deg P = n \geqslant 1$, la proposition 4 donne $n^2 = n$, donc $n = 1$. Avec $P = aX + b$, $a \neq 0$, on obtient $a^2X + ab + b = aX + b$, donc $a = 1$ et $b = 0$.

$$\boxed{P \text{ constant, ou } P = X}$$

(iii) Si $\deg P = n \geqslant 1$ et $P = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots$, la formule du binôme montre que $P(X+1) - P(X)$ a pour terme de degré $n-1$ le monôme na_nX^{n-1}, et aucun terme de degré n. Il faut donc $n = 2$, et l'on cherche $P = aX^2 + bX + c$: $P(X+1) - P(X) = 2aX + a + b = X$ donne $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -\dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{P = \frac{X(X-1)}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}}$$

À retenir. La comparaison des degrés réduit une équation fonctionnelle à un nombre fini d'inconnues ; c'est le premier réflexe à avoir.

EXERCICE 3 ⋆⋆

Le polynôme nul convient. Sinon, on écrit $P = aX^n + R$ avec $a \neq 0$ et $\deg R < n$. Le coefficient de X^{2n} donne $a = a^2$, donc $a = 1$. Ensuite,

$$P(X^2) = X^{2n} + R(X^2) \qquad \text{et} \qquad P^2 = X^{2n} + 2X^n R + R^2,$$

donc $R(X^2) - R^2 = 2X^n R$. Si $R \neq 0$, de degré $m < n$, le membre de gauche est de degré au plus $2m$, et celui de droite de degré $n + m > 2m$: c'est impossible. Donc $R = 0$.

$$\boxed{P = 0 \quad \text{ou} \quad P = X^n,\ n \in \mathbb{N}}$$

EXERCICE 4 ⋆⋆⋆

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$. On montre par récurrence que $P(u_n) = u_n$: c'est vrai pour $n = 0$ puisque $P(0) = 0$, et si $P(u_n) = u_n$, alors

$$P(u_{n+1}) = P(u_n^2 + 1) = P(u_n)^2 + 1 = u_n^2 + 1 = u_{n+1}.$$

Or

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + 1 = \left(u_n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 :$$

la suite est strictement croissante, donc ses termes sont deux à deux distincts. Le polynôme $P - X$ a une infinité de racines : il est nul (théorème 3). Réciproquement, $P = X$ convient.

$$\boxed{P = X}$$

Piège. Sans la condition $P(0) = 0$, il y a d'autres solutions : par exemple $P = X^2+1$, puisque $P(X^2+1)$ et $P^2 + 1$ valent tous deux $(X^2 + 1)^2 + 1$.

Divisibilité et division euclidienne

EXERCICE 5 ⋆

On effectue chaque division par la méthode de la potence, et l'on vérifie en développant $BQ + R$.

(i) $\boxed{X^5 - 3X^3 + 2X + 1 = (X^2 + X + 1)(X^3 - X^2 - 3X + 4) + (X - 3)}$

(ii) $\boxed{2X^4 - X^3 + 3X - 1 = (X^2 - 2X + 3)(2X^2 + 3X) + (-6X - 1)}$

(iii) $\boxed{X^6 - 1 = (X^3 + X - 1)(X^3 - X + 1) + (X^2 - 2X)}$

Dans chaque cas, le reste est de degré strictement inférieur à 2, ou à 3, comme l'exige le théorème 2.

EXERCICE 6 ⋆

La division euclidienne de $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ par $X^2 + 2$ donne le quotient $X^2 + X + \lambda - 2$ et le reste

$$R = (\mu - 2)X + 6 - 2\lambda.$$

La divisibilité équivaut à $R = 0$.

$$\boxed{(\lambda, \mu) = (3, 2)}$$

On peut aussi évaluer en la racine $\mathrm{i}\sqrt{2}$: $4 - 2\mathrm{i}\sqrt{2} - 2\lambda + \mathrm{i}\sqrt{2}\mu + 2 = 0$, ce qui donne la même chose en séparant parties réelle et imaginaire, pour λ et μ réels.

EXERCICE 7 ⋆⋆

La division de $X^4 - X + a$ par $X^2 - aX + 1$ donne le reste

$$R = (a^3 - 2a - 1)X + (1 + a - a^2).$$

Il faut $a^2 = a + 1$ et $a^3 = 2a + 1$. La première égalité entraîne la seconde : si $a^2 = a + 1$, alors $a^3 = a^2 + a = 2a + 1$.

$$\boxed{a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{ou} \qquad a = \frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

EXERCICE 8 ⋆⋆

1. On écrit $k = qp + r$ avec $0 \leqslant r < p$. Alors $X^k = X^r(X^{qp} - 1) + X^r$. D'après la formule $a^q - 1 = (a-1)(a^{q-1} + \cdots + 1)$ appliquée à $a = X^p$, le polynôme $X^p - 1$ divise $X^{qp} - 1$, et $\deg X^r = r < p$: par unicité, le reste est X^r.

2. Par linéarité de la division, le reste de P est $\sum_k a_k X^{r_k}$, où r_k est le reste de k modulo p : on réduit chaque exposant modulo p. Ce polynôme est de degré au plus $p-1$, et l'unicité conclut. Comme $2026 \equiv 1$ et $13 \equiv 3$ [5] :

$$\boxed{X^{2026} + X^{13} + 1 \text{ a pour reste } X^3 + X + 1 \text{ modulo } X^5 - 1}$$

À retenir. Modulo $X^p - 1$, on calcule avec $X^p = 1$, exactement comme modulo p on calcule avec des restes au chapitre 12.

EXERCICE 9 ⋆⋆

1. Soit $B = AQ + R$ la division euclidienne de B par A (si $A = 0$, alors $A \circ P = 0$ divise $B \circ P$, donc $B \circ P = 0$ et $B = 0$ par la proposition 4). En composant par P :

$$B \circ P = (A \circ P)(Q \circ P) + R \circ P.$$

Comme $A \circ P$ divise $B \circ P$, il divise $R \circ P$. Or, par la proposition 4,

$$\deg(R \circ P) = \deg R \times \deg P < \deg A \times \deg P = \deg(A \circ P),$$

donc $R \circ P = 0$, puis $R = 0$.

$$\boxed{A \mid B}$$

2. Si $Q = PS$, alors $Q(X^m) = P(X^m)S(X^m)$. La réciproque est la question 1 avec le polynôme non constant X^m.

Fonctions polynomiales et racines

EXERCICE 10 ⋆

On dispose le schéma de Horner, sans oublier le coefficient nul de X^2 :

coefficients	1	−4	2	0	1	−7
produits par 3		3	−3	−3	−9	−24
sommes	1	−1	−1	−3	−8	−31

$$\boxed{P(3) = -31 \qquad \text{et} \qquad P = (X-3)(X^4 - X^3 - X^2 - 3X - 8) - 31}$$

Vérification directe : $243 - 324 + 54 + 3 - 7 = -31$. ✓

EXERCICE 11 ⋆

1. Les racines de X^2+X+1 sont j et $\overline{j}=j^2$, simples. Comme $j^3=1$,

$$j^{3n+8}+j^{3n+4}+j^{3n}=j^2+j+1=0,$$

et de même en $\overline{j}$. Par la proposition 8, $(X-j)(X-\overline{j})=X^2+X+1$ divise le polynôme.

$$\boxed{\text{oui, pour tout } n\in\mathbb{N}}$$

2. Le polynôme $X^2-X=X(X-1)$ a les racines simples 0 et 1 ; il divise $Q=P(X^2+3X)$ si et seulement si $Q(0)=Q(1)=0$, c'est-à-dire $P(0)=P(4)=0$. De même, $X^2-2X=X(X-2)$ divise $P(X^2)$ si et seulement si $P(0)=P(4)=0$.

$$\boxed{\text{les deux conditions équivalent à } P(0)=P(4)=0}$$

EXERCICE 12 ⋆⋆

1. On écrit $P\circ P-X=(P\circ P-P)+(P-X)$. Avec $P=\sum a_kX^k$,

$$P\circ P-P=\sum_k a_k(P^k-X^k),$$

et chaque P^k-X^k est divisible par $P-X$ (chapitre 11, théorème 3). Donc $P-X$ divise $P\circ P-X$.

2. Avec $P=X^2+3X+1$, on a $P\circ P-X=(X^2+3X+1)^2+3X^2+8X+4$, qui est le polynôme de l'équation. Il est divisible par $P-X=X^2+2X+1=(X+1)^2$, et la division donne

$$(z^2+3z+1)^2+3z^2+8z+4=(z+1)^2(z^2+4z+5).$$

$$\boxed{\mathcal{S}=\{-1,\ -2+\mathrm{i},\ -2-\mathrm{i}\},\ \text{avec}\ -1\ \text{racine double}}$$

EXERCICE 13 ⋆

1. Si a et b sont deux racines, comptées avec multiplicité, $(X-a)(X-b)$ divise P (proposition 8, ou proposition 10 si $a=b$) : $P=(X-a)(X-b)Q$ avec $\deg Q=1$, et Q a une racine dans $\mathbb{K}$.

$$\boxed{P\text{ est scindé sur }\mathbb{K}}$$

2. Si $P=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots$, alors $P'=na_nX^{n-1}+(n-1)a_{n-1}X^{n-2}+\cdots$. Les deux polynômes sont scindés sur $\mathbb{C}$, et le théorème 4 donne les moyennes

$$\frac{1}{n}\Big(-\frac{a_{n-1}}{a_n}\Big)\qquad\text{et}\qquad\frac{1}{n-1}\Big(-\frac{(n-1)a_{n-1}}{na_n}\Big)=-\frac{a_{n-1}}{na_n}.$$

$$\boxed{\text{les racines de } P \text{ et de } P' \text{ ont le même isobarycentre}}$$

EXERCICE 14 ⋆⋆

Les éléments de $\mathbb{U}_n$ sont les n racines, simples, de X^n-1. Le théorème 4 donne $\sigma_1=0$ si $n\geqslant 2$, $\sigma_2=0$ si $n\geqslant 3$, et $\sigma_n=(-1)^n\times(-1)=(-1)^{n+1}$. Enfin $\sum\omega^2=\sigma_1^2-2\sigma_2$.

$$\boxed{\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega=0\ (n\geqslant 2),\qquad\prod_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega=(-1)^{n+1},\qquad\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega^2=0\ (n\geqslant 3)}$$

Les cas exclus se traitent à la main : $\sum_{\mathbb{U}_1}\omega=1$, $\sum_{\mathbb{U}_1}\omega^2=1$ et $\sum_{\mathbb{U}_2}\omega^2=1+1=2$. Le produit se retrouve aussi par $\prod_k \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(n-1)}=(-1)^{n-1}$.

EXERCICE 15 ⋆⋆

1. En développant σ_1^2 et $\sigma_1\sigma_2$:

$$\boxed{x^2+y^2+z^2=\sigma_1^2-2\sigma_2, \qquad x^3+y^3+z^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3}$$

2. Dans chaque cas, on calcule σ_1, σ_2, σ_3 : d'après le théorème 4, x, y, z sont alors les racines de $T^3-\sigma_1T^2+\sigma_2T-\sigma_3$, et réciproquement.

Premier système. On a $\sigma_1=1$ et $\sigma_3=-4$, et la deuxième équation s'écrit $\sigma_2=\sigma_3$, donc $\sigma_2=-4$. Le polynôme vaut $T^3-T^2-4T+4=(T-1)(T-2)(T+2)$.

Second système. $\sigma_1=2$, $\sigma_2=\dfrac{4-14}{2}=-5$, puis $20=8+30+3\sigma_3$, donc $\sigma_3=-6$. Le polynôme $T^3-2T^2-5T+6=(T-1)(T+2)(T-3)$.

$$\boxed{(x,y,z) \text{ est une permutation de } (1,2,-2), \text{ ou de } (1,-2,3)}$$

Chaque système a donc six solutions.

EXERCICE 16 ⋆⋆

(i) Si $x_3=x_1+x_2$, alors $2x_3=x_1+x_2+x_3=8$, donc $x_3=4$; on vérifie que $64-128+92-28=0$. La division par $X-4$ donne X^2-4X+7, de racines $2\pm\mathrm{i}\sqrt{3}$.

$$\boxed{X^3-8X^2+23X-28=(X-4)(X-2-\mathrm{i}\sqrt{3})(X-2+\mathrm{i}\sqrt{3})}$$

(ii) Les deux racines de somme 2 sont celles d'un facteur X^2-2X+p, et les deux autres, de somme -2 par le théorème 4, celles d'un facteur X^2+2X+q. En développant $(X^2-2X+p)(X^2+2X+q)$ et en identifiant : $p+q=4$, $2p-2q=12$ et $pq=-5$, d'où $p=5$ et $q=-1$.

$$\boxed{X^4+12X-5=(X-1-2\mathrm{i})(X-1+2\mathrm{i})(X+1-\sqrt{2})(X+1+\sqrt{2})}$$

EXERCICE 17 ⋆⋆⋆

1. $P(0)=1\neq 0$.

2. On écrit $P=a_nX^n+\cdots+a_3X^3+X^2+X+1$. Le polynôme

$$\widetilde{P}=X^nP\Big(\frac{1}{X}\Big)=X^n+X^{n-1}+X^{n-2}+a_3X^{n-3}+\cdots+a_n$$

a pour racines les $\dfrac{1}{\xi_k}$, avec les mêmes multiplicités, puisque $\widetilde{P}(z)=z^nP(\dfrac{1}{z})$ pour $z\neq 0$ et que $\widetilde{P}(0)=a_n\neq 0$. Les relations du théorème 4 appliquées à $\widetilde{P}$, unitaire, donnent :

$$\boxed{\Sigma_1=-1 \qquad \text{et} \qquad \Sigma_2=1}$$

3. $\displaystyle\sum\frac{1}{\xi_k^2}=\Sigma_1^2-2\Sigma_2=\boxed{-1}$. Si P était scindé sur $\mathbb{R}$, les ξ_k seraient réels et cette somme de carrés de réels serait positive.

$$\boxed{P \text{ n'est pas scindé sur } \mathbb{R}}$$

À retenir. Le polynôme réciproque $X^nP(\dfrac{1}{X})$ échange le rôle des coefficients extrêmes : c'est l'outil naturel pour les sommes d'inverses de racines.

EXERCICE 18 ⋆⋆⋆

Le polynôme nul convient. Sinon, soit a le coefficient dominant et n le degré de P. Le coefficient de X^{2n} donne $a = a^2$, donc $a = 1$.

Racines. Si λ est racine, l'évaluation en λ donne $P(\lambda^2) = 0$, et l'évaluation en $\lambda - 1$ donne $P\big((\lambda-1)^2\big) = P(\lambda-1)P(\lambda) = 0$. Par récurrence, tous les λ^{2^k} sont racines ; comme P n'a qu'un nombre fini de racines, ils ne peuvent être deux à deux distincts, ce qui impose $|\lambda| \in \{0, 1\}$, puisque sinon les modules $|\lambda|^{2^k}$ seraient strictement monotones. De même, la racine $(\lambda - 1)^2$ impose $|\lambda - 1|^2 \in \{0, 1\}$.

Conclusion sur les racines. Si $\lambda \notin \{0, 1\}$, on aurait $|\lambda| = |\lambda - 1| = 1$, donc $\lambda = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi/3}$. Mais alors $\lambda^2 = \mathrm{e}^{\pm 2\mathrm{i}\pi/3}$ serait racine, avec $|\lambda^2 - 1| = \sqrt{3} \notin \{0, 1\}$: contradiction. Les seules racines possibles sont 0 et 1, et $P = X^a(X - 1)^b$ avec $a, b \in \mathbb{N}$.

Exposants. On a $P(X^2) = X^{2a}(X - 1)^b(X + 1)^b$ et $P(X)P(X + 1) = X^{a+b}(X - 1)^b(X + 1)^a$. L'unicité de la décomposition (théorème 10) donne $2a = a + b$ et $b = a$.

$$\boxed{P = 0 \quad \text{ou} \quad P = (X^2 - X)^n,\ n \in \mathbb{N}}$$

Vérification : $(X^4 - X^2)^n = X^{2n}(X^2 - 1)^n = (X^2 - X)^n\big((X + 1)^2 - (X + 1)\big)^n$. ✓

Dérivation

EXERCICE 19 ⋆

Par la formule de Taylor (théorème 6), un tel polynôme est de degré au plus 2 et s'écrit

$$P = P(2) + P'(2)(X - 2) + \frac{P''(2)}{2}(X - 2)^2 = 1 + 2(X - 2) + 2(X - 2)^2.$$

Réciproquement, ce polynôme convient.

$$\boxed{P = 2X^2 - 6X + 5}$$

EXERCICE 20 ⋆

1. Le reste $R = \alpha X + \beta$ vérifie $R(a) = P(a)$ et $R(b) = P(b)$, en évaluant $P = (X - a)(X - b)Q + R$. On résout ce système de deux équations :

$$\boxed{R = \frac{P(a) - P(b)}{a - b}\,X + \frac{aP(b) - bP(a)}{a - b}}$$

2. De $P = (X - a)^2Q + R$ on tire $P(a) = R(a)$ et, en dérivant, $P'(a) = R'(a)$, puisque $\big((X - a)^2Q\big)'$ s'annule en a.

$$\boxed{R = P(a) + P'(a)(X - a)}$$

3. Pour $P = X^n + 2X - 2$, on a $P(1) = 1$ et $P'(1) = n + 2$.

$$\boxed{R = (n + 2)X - (n + 1)}$$

Vérification pour $n = 2$: $X^2 + 2X - 2 = (X - 1)^2 + 4X - 3$. ✓

EXERCICE 21 ⋆⋆

(i) On cherche le reste sous la forme $R = c_0+c_1(X-1)+c_2(X-1)^2+c_3(X-1)^3$. Comme 1 est racine triple de Q, les valeurs de R, R', R'' en 1 sont celles de X^{100} : $c_0 = 1$, $c_1 = 100$, $c_2 = \dfrac{100\times 99}{2} = 4950$. Enfin $R(-1) = (-1)^{100} = 1$ donne $1 - 200 + 4\times 4950 - 8c_3 = 1$, soit $c_3 = 2450$.

$$\boxed{R = 1 + 100(X-1) + 4950(X-1)^2 + 2450(X-1)^3 = 2450X^3 - 2400X^2 - 2450X + 2401}$$

(ii) On pose $Y = X^2+1$, de sorte que $X^{2n} = (Y-1)^n$. La formule du binôme donne, avec S un polynôme,

$$(Y-1)^n = (-1)^n + n(-1)^{n-1}Y + Y^2S,$$

et les deux premiers termes forment un polynôme de degré au plus $2 < 4$.

$$\boxed{R = (-1)^{n+1}(nX^2 + n - 1)}$$

(iii) Le reste $R = \alpha X + \beta$ vérifie $R(j) = P(j)$ et $R(\bar{j}) = P(\bar{j}) = \overline{P(j)}$, puisque P est réel. Comme $j+1 = -j^2$, on a $P(j) = -j^{4n+2} - j^{2n+1}$, qui vaut 1 si $n \equiv 0$ ou 2 [3], et -2 si $n \equiv 1$ [3]. Cette valeur est réelle, donc $\alpha(j-\bar{j}) = 0$ et R est constant.

$$\boxed{R = -2 \text{ si } n \equiv 1\ [3], \qquad R = 1 \text{ sinon}}$$

EXERCICE 22 ⋆⋆

1. On a $P(1) = 0$, puis

$$P' = (2n+1)(X^{2n} - (n+1)X^n + nX^{n-1}), \qquad P'' = (2n+1)n(2X^{2n-1} - (n+1)X^{n-1} + (n-1)X^{n-2}),$$

qui s'annulent en 1, et $P'''(1) = (2n+1)n(2(2n-1) - (n+1)(n-1) + (n-1)(n-2)) = (2n+1)n(n+1) \neq 0$. Par la proposition 12 :

$$\boxed{1 \text{ est racine triple de } P}$$

2. Avec $Q = aX^{n+1} + bX^n + 1$, il faut $Q(1) = a + b + 1 = 0$ et $Q'(1) = (n+1)a + nb = 0$.

$$\boxed{a = n, \quad b = -(n+1)}$$

3. *Par le binôme* : $(X+1)^n - nX - 1 = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} X^k$, qui est multiple de X^2. *Par les dérivées* : $Q = (X+1)^n - nX - 1$ vérifie $Q(0) = 0$ et $Q'(0) = n - n = 0$, donc 0 est racine au moins double.

4. Les racines de $(X^2+X+1)^2$ sont j et $\bar{j}$, doubles. Soit $f = (X+1)^n - X^n - 1$, à coefficients réels : il suffit, par la proposition 18, que j soit racine au moins double. Comme $j+1 = -j^2$,

$$f'(j) = n((-j^2)^{n-1} - j^{n-1}) = nj^{n-1}((-j)^{n-1} - 1),$$

qui est nul si et seulement si $(-j)^{n-1} = 1$. Or $-j = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$ est une racine primitive sixième de l'unité, donc $f'(j) = 0$ équivaut à $n \equiv 1$ [6]. Dans ce cas, $f(j) = -j^{2n} - j^n - 1 = -j^2 - j - 1 = 0$.

$$\boxed{(X^2+X+1)^2 \mid (X+1)^n - X^n - 1 \iff n \equiv 1\ [6]}$$

EXERCICE 23 ⋆⋆

Le polynôme nul convient, et une constante non nulle ne convient pas. Si $\deg P = n \geqslant 1$, les degrés donnent $n = (n-1) + (n-2)$, soit $n = 3$, et le coefficient dominant a vérifie $a = 3a \times 6a$, donc $a = \dfrac{1}{18}$. Soit α la racine de P'', de degré 1. L'égalité $P = P'P''$ donne $P(\alpha) = 0$. En dérivant, $P' = P''^2 + P'P'''$, avec $P''' = 6a = \dfrac{1}{3}$; en α, $P'(\alpha) = \dfrac{1}{3}P'(\alpha)$, donc $P'(\alpha) = 0$. Ainsi α est racine triple de P, et $P = \dfrac{1}{18}(X-\alpha)^3$. Réciproquement, $P' = \dfrac{(X-\alpha)^2}{6}$ et $P'' = \dfrac{X-\alpha}{3}$ conviennent.

$$\boxed{P = 0 \quad \text{ou} \quad P = \frac{(X-\alpha)^3}{18},\ \alpha \in \mathbb{R}}$$

EXERCICE 24 ⋆⋆

1. On a $P_n' = P_{n-1}$, donc $P_n - P_n' = \dfrac{X^n}{n!}$. Si z était racine multiple, on aurait $P_n(z) = P_n'(z) = 0$, donc $z^n = 0$, soit $z = 0$; or $P_n(0) = 1$.

$$\boxed{P_n \text{ n'a que des racines simples}}$$

2. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $P_n > 0$ sur $\mathbb{R}$ si n est pair, et que P_n s'annule exactement une fois si n est impair. Pour $n = 0$, $P_0 = 1$. Si n est impair, $P_n' = P_{n-1} > 0$: la fonction est strictement croissante, de limites $-\infty$ et $+\infty$, donc s'annule une seule fois. Si $n \geqslant 2$ est pair, $P_n' = P_{n-1}$ s'annule en un seul point c, en changeant de signe de $-$ à $+$: P_n atteint son minimum en c, et ce minimum vaut

$$P_n(c) = P_n(c) - P_n'(c) = \frac{c^n}{n!} > 0,$$

puisque $c \neq 0$ et n est pair.

$$\boxed{P_n \text{ a 0 racine réelle si } n \text{ est pair, et 1 si } n \text{ est impair}}$$

EXERCICE 25 ⋆⋆

1. Soit $a_1 < \cdots < a_r$ les racines distinctes de P, de multiplicités $m_1, \ldots, m_r$, avec $\sum m_i = n$. Chaque a_i est racine de P' de multiplicité $m_i - 1$ (proposition 12). Le théorème de Rolle fournit en outre une racine de P' dans chacun des $r-1$ intervalles $]a_i, a_{i+1}[$. On obtient ainsi au moins $\sum(m_i - 1) + r - 1 = n - 1 = \deg P'$ racines comptées avec multiplicité : ce sont toutes les racines de P', qui est donc scindé, et les racines fournies par Rolle sont simples. Une racine multiple de P' est donc l'un des a_i.

$$\boxed{P' \text{ est scindé sur } \mathbb{R}, \text{ et ses racines multiples sont racines de } P}$$

2. Si tous les m_i valent 1, les $n-1$ racines de Rolle sont toutes les racines de P', et elles sont simples. Si z était racine multiple de P^2+1, alors $2P(z)P'(z) = 0$ avec $P(z) = \pm \mathrm{i} \neq 0$, donc $P'(z) = 0$; mais les racines de P' sont réelles, et $P(z)$ serait réel, ce qui contredit $P(z)^2 = -1$.

$$\boxed{P' \text{ est simplement scindé, et } P^2 + 1 \text{ n'a que des racines simples}}$$

3. Non : $X^3 - 1$ a trois racines simples dans $\mathbb{C}$, mais sa dérivée $3X^2$ a la racine double 0. Le théorème de Rolle n'a pas d'analogue sur $\mathbb{C}$.

EXERCICE 26 ⋆⋆⋆

1. Si $P = P'S$ et $P'(a) = 0$, alors $P(a) = 0$. Remarquons que P n'est pas constant : sinon $P' = 0$ ne divise pas $P \neq 0$.

2. Soit $n = \deg P \geqslant 1$. Comme $\deg P' = n - 1$, le quotient S est de degré 1. Si a est racine de P de multiplicité $m \geqslant 1$, elle est racine de P' de multiplicité $m - 1$, et l'égalité $P = P'S$ impose que a soit racine de S, pour retrouver la multiplicité m. Comme S est de degré 1, il n'a qu'une racine : P n'a qu'une seule racine.

3. D'après le théorème 11, P est scindé sur $\mathbb{C}$, avec une seule racine a : $P = \lambda(X - a)^n$. Réciproquement, $P' = n\lambda(X - a)^{n-1}$ divise P.

$$\boxed{P = \lambda(X - a)^n, \quad \lambda \in \mathbb{C}^*,\ a \in \mathbb{C},\ n \geqslant 1}$$

EXERCICE 27 ⋆⋆⋆

1. Soit $a_1 < \cdots < a_n$ les racines de Q, et $f(x) = \mathrm{e}^{ax}Q(x)$, de dérivée $f'(x) = \mathrm{e}^{ax}(Q' + aQ)(x)$. Le théorème de Rolle donne une racine de $Q' + aQ$ dans chaque $]a_i, a_{i+1}[$, soit $n - 1$ racines distinctes. Si $a = 0$, c'est fini, car $\deg Q' = n - 1$. Si $a > 0$, alors $f(x) \to 0$ en $-\infty$ par croissances comparées, et $f(a_1) = 0$; la fonction f, non identiquement nulle sur $]-\infty, a_1[$, y atteint un extremum, où f' s'annule : on obtient une n-ième racine, distincte des autres. Si $a < 0$, on raisonne de même sur $]a_n, +\infty[$. Dans ces deux cas, $Q' + aQ$ est de degré n et a n racines réelles distinctes.

$$\boxed{Q' + aQ \text{ est simplement scindé sur } \mathbb{R}}$$

2. Si Q a les racines distinctes $a_1 < \cdots < a_r$, de multiplicités m_i, alors a_i est racine de $Q' + aQ$ de multiplicité exactement $m_i - 1$, car $(X - a_i)^{m_i - 1}$ divise Q' et Q, et le quotient ne s'annule pas en a_i. Rolle donne $r - 1$ racines dans les intervalles, et une de plus à l'infini si $a \neq 0$, comme en 1. Au total, $\sum(m_i - 1) + (r - 1) + 1 = n = \deg(Q' + aQ)$ racines comptées avec multiplicité.

3. Non. Pour $Q = X^2 - 1$ et $a = \mathrm{i}$, on obtient $Q' + aQ = \mathrm{i}X^2 + 2X - \mathrm{i} = \mathrm{i}(X - \mathrm{i})^2$, qui a une racine double.

Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

EXERCICE 28 ⋆

1. Avec $A = X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 4$ et $B = X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2$, la première division donne $A = B \times 1 - 2(X^2 + X + 1)$, puis $B = (X^2 + X + 1)(X^2 - 2)$, de reste nul.

$$\boxed{A \wedge B = X^2 + X + 1}$$

2. Le seul facteur irréductible unitaire de $(X - 1)^n$ est $X - 1$, et $X^n - 1$ en est divisible exactement une fois, puisque ses racines sont simples (proposition 17).

$$\boxed{(X^n - 1) \wedge (X - 1)^n = X - 1}$$

EXERCICE 29 ⋆⋆

On factorise : $A = (X+1)(X-2)(X^2+1)$ et $B = (X+1)(X-3)(X+2)$, donc $A \wedge B = X+1$. On note $A_1 = \dfrac{A}{X+1} = X^3 - 2X^2 + X - 2$ et $B_1 = \dfrac{B}{X+1} = X^2 - X - 6$, premiers entre eux.

(i) $A \wedge B = X+1$ divise $AU + BV$, mais pas 1.

$$\boxed{\text{aucune solution}}$$

(ii) En divisant par $X+1$, l'équation équivaut à $A_1U + B_1V = X+3$. L'algorithme d'Euclide donne $A_1 = (X-1)B_1 + (6X-8)$ et $B_1 = (\dfrac{X}{6} + \dfrac{1}{18})(6X-8) - \dfrac{50}{9}$, et la remontée fournit la solution particulière

$$U_0 = \frac{13X+21}{100}, \qquad V_0 = -\frac{13X^2+8X+57}{100}.$$

Si (U,V) est solution, $A_1(U-U_0) = -B_1(V-V_0)$, et le lemme de Gauss donne $B_1 \mid U - U_0$.

$$\boxed{U = \frac{13X+21}{100} + (X^2 - X - 6)C, \qquad C \in \mathbb{R}[X]}$$

$$\boxed{V = -\frac{13X^2+8X+57}{100} - (X^3 - 2X^2 + X - 2)C}$$

(iii) Les deux trinômes ont des discriminants -8 et 13, et aucune racine commune : ils sont premiers entre eux. Le lemme de Gauss donne $X^2 - X - 3 \mid U$.

$$\boxed{U = (X^2 - X - 3)C, \qquad V = -(X^2 + 2X + 3)C, \quad C \in \mathbb{R}[X]}$$

(iv) La relation de Bézout $4X^2 + (1-2X)(2X+1) = 1$, multipliée par $X+2$, donne une solution particulière, et l'on conclut comme en (iii).

$$\boxed{U = 4(X+2) + (2X+1)C, \qquad V = (1-2X)(X+2) - X^2C, \quad C \in \mathbb{R}[X]}$$

EXERCICE 30 ⋆⋆

1. Si $n = qm + r$, alors $X^n - 1 = X^r(X^{qm} - 1) + (X^r - 1)$, et $X^m - 1$ divise $X^{qm} - 1$: le reste de P_n par P_m est P_r. Comme à l'exercice 55 de la feuille 12, l'algorithme d'Euclide sur (P_n, P_m) suit celui sur (n,m), et s'arrête sur $(P_d, P_0) = (P_d, 0)$ avec $d = n \wedge m$.

$$\boxed{P_n \wedge P_m = X^{n \wedge m} - 1}$$

2. Si $a \mid b$, alors $P_a \mid P_b$. Réciproquement, si $P_a \mid P_b$, alors $P_a = P_a \wedge P_b = P_{a \wedge b}$, donc $a = a \wedge b$ par les degrés, et $a \mid b$.

3. Les racines de $(X^p - 1)(X^q - 1)$ sont : 1, double ; les racines p-ièmes et q-ièmes de l'unité différentes de 1, simples, et distinctes entre elles puisque $P_p \wedge P_q = X - 1$. Ce sont des racines pq-ièmes de l'unité, donc des racines simples de $X^{pq} - 1$, et 1 est racine double de $(X-1)(X^{pq} - 1)$. La proposition 16 (i) conclut.

$$\boxed{(X^p - 1)(X^q - 1) \mid (X-1)(X^{pq} - 1)}$$

EXERCICE 31 ⋆⋆

Si D est un diviseur commun non constant, $A = DA_1$ et $B = DB_1$, et $P = B_1$, $Q = A_1$ conviennent : $AB_1 = DA_1B_1 = BA_1$, avec $\deg B_1 < \deg B$ et $\deg A_1 < \deg A$. Réciproquement, si $AP = BQ$ et si $A \wedge B = 1$, le lemme de Gauss donne $B \mid P$, ce qui est impossible puisque $P \neq 0$ et $\deg P < \deg B$.

$$\boxed{\text{diviseur commun non constant} \iff \exists P, Q \text{ non nuls}, \ AP = BQ, \ \deg P < \deg B, \ \deg Q < \deg A}$$

EXERCICE 32 ⋆⋆⋆

1. *Existence.* Les polynômes $(1-X)^p$ et X^p n'ont pas de racine commune : ils sont premiers entre eux, et le théorème 8 donne U_0, V_0. On divise $U_0 = X^pS + U$ avec $\deg U < p$: alors

$$(1-X)^pU + X^p(V_0 + (1-X)^pS) = 1.$$

Unicité. Si (U,V) et (U',V') conviennent, $(1-X)^p(U-U') = X^p(V'-V)$, donc $X^p \mid U-U'$ par le lemme de Gauss, et $\deg(U-U') < p$ donne $U = U'$, puis $V = V'$.

2. On a $X^pV = 1-(1-X)^pU$, de degré au plus $2p-1$, donc $\deg V \leqslant p-1$. En substituant $1-X$ à X, on obtient $X^pU(1-X) + (1-X)^pV(1-X) = 1$: le couple $(V(1-X), U(1-X))$ convient, avec $\deg V(1-X) < p$. Par unicité, $U = V(1-X)$.

$$\boxed{V(X) = U(1-X)}$$

3. En dérivant l'égalité de la question 1 et en regroupant :

$$(1-X)^{p-1}((1-X)U' - pU) = -X^{p-1}(pV + XV').$$

Donc X^{p-1} divise $(1-X)^{p-1}\big((1-X)U' - pU\big)$, et, par le lemme de Gauss, il divise $(1-X)U' - pU$, qui est de degré au plus $p-1$: ce polynôme vaut aX^{p-1}. Avec $U = \sum_{k=0}^{p-1} u_kX^k$, le coefficient de X^k pour $k \leqslant p-2$ donne $(k+1)u_{k+1} - (k+p)u_k = 0$, et $u_0 = U(0) = 1$ en évaluant la relation de la question 1 en 0.

$$\boxed{U = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1+k}{k} X^k}$$

Vérification pour $p=2$: $U = 1+2X$, $V = 3-2X$, et $(1-X)^2(1+2X) + X^2(3-2X) = 1$. ✓

POLYNÔMES IRRÉDUCTIBLES DE $\mathbb{C}[X]$ ET DE $\mathbb{R}[X]$

EXERCICE 33 ⋆

1. Une racine multiple de P est une racine commune à P et P' (proposition 12), et réciproquement. Par la proposition 16 (ii), P et P' sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racine commune.

2. On applique la méthode de la section 13.7 : factorisation sur $\mathbb{C}$, puis regroupement des racines conjuguées.

(i) $X^4 - 4 = (X^2-2)(X^2+2)$.

$$\boxed{\mathbb{C} : (X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})(X-\mathrm{i}\sqrt{2})(X+\mathrm{i}\sqrt{2}); \qquad \mathbb{R} : (X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})(X^2+2)}$$

(ii) Les racines de $X^6 = -27 = 27\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ sont les $\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k+1)\pi/6}$, $0 \leqslant k \leqslant 5$, soit $\pm\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $\pm\dfrac{3}{2} \pm \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. En regroupant les conjuguées, $X^2 - 2\,\mathrm{Re}(z)X + |z|^2$ avec $|z|^2 = 3$:

$$\boxed{\mathbb{R} : (X^2+3)(X^2-3X+3)(X^2+3X+3)}$$

(iii) $(X^2-X+1)^2 + 1 = (X^2-X+1-\mathrm{i})(X^2-X+1+\mathrm{i})$, et les racines de ces deux trinômes sont i, $1-\mathrm{i}$ pour le premier, $-\mathrm{i}$, $1+\mathrm{i}$ pour le second.

$$\boxed{\mathbb{C} : (X-\mathrm{i})(X+\mathrm{i})(X-1-\mathrm{i})(X-1+\mathrm{i}); \qquad \mathbb{R} : (X^2+1)(X^2-2X+2)}$$

(iv) Les racines sont les huit racines huitièmes de l'unité $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/4}$.

$$\boxed{\mathbb{R} : (X-1)(X+1)(X^2+1)(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)}$$

EXERCICE 34 ⋆⋆

(i) On a $P = (X^2-3X)^2+9 = (X^2-3X+3\mathrm{i})(X^2-3X-3\mathrm{i})$ sur $\mathbb{C}$. Pour obtenir directement la factorisation réelle, on fait apparaître une différence de deux carrés : pour tout réel t,

$$P = (X^2-3X+t)^2 - (2tX^2-6tX+t^2-9),$$

et le trinôme entre parenthèses est le triple d'un carré pour $t=6$: $12X^2-36X+27 = 3(2X-3)^2$. Ainsi

$$\boxed{P = \big(X^2-(3+2\sqrt{3})X+6+3\sqrt{3}\big)\big(X^2-(3-2\sqrt{3})X+6-3\sqrt{3}\big)}$$

Les deux trinômes ont pour discriminant -3 : ils sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

(ii) Avec $Y = X^3$, $Y^3+Y^2+Y+1 = (Y+1)(Y^2+1)$, donc $P = (X^3+1)(X^6+1)$. Puis $X^3+1 = (X+1)(X^2-X+1)$ et $X^6+1 = (X^2+1)(X^4-X^2+1)$, avec $X^4-X^2+1 = (X^2+1)^2-3X^2$.

$$\boxed{P = (X+1)(X^2-X+1)(X^2+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)}$$

(iii) Les racines de $X^{10}+X^5+1 = \dfrac{X^{15}-1}{X^5-1}$ sont les racines quinzièmes de l'unité qui ne sont pas racines cinquièmes, soit les $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/15}$ avec $k \in [\![1\,;14]\!]$ non multiple de 3, toutes simples. On les regroupe par paires k, $15-k$, avec $k \in \{1,2,4,5,7\}$; pour $k=5$, on obtient X^2+X+1.

$$\boxed{X^{10}+X^5+1 = (X^2+X+1)\prod_{k\in\{1,2,4,7\}}\Big(X^2-2\cos\frac{2k\pi}{15}\,X+1\Big)}$$

(iv) On a $P(1)=0$, et l'on vérifie que $P'(1)=P''(1)=0$ et $P'''(1) = 6\times(-5)\neq 0$: 1 est racine triple. La division par $(X-1)^3$ donne X^2-7X+1, de racines $\dfrac{7\pm3\sqrt{5}}{2}$.

$$\boxed{P = (X-1)^3\Big(X-\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\Big)\Big(X-\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\Big)}$$

EXERCICE 35 ⋆⋆

1. Le complexe $w = \dfrac{1-z^2}{2z}$ vérifie $w^3 = -1$, donc $w = -\omega$ avec $\omega \in \{1, j, j^2\}$, c'est-à-dire $z^2-2\omega z-1=0$, de discriminant réduit ω^2+1. Pour $\omega=1$, on obtient $z = 1\pm\sqrt{2}$. Pour $\omega = j$, $\omega^2+1 = -j = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$, de racine carrée $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$, d'où $z = j \pm \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$; et pour $\omega = j^2$, les conjugués.

$$\boxed{z \in \Big\{1\pm\sqrt{2},\ \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1\pm\mathrm{i}),\ -\frac{\sqrt{3}+1}{2}(1\mp\mathrm{i})\Big\}}$$

2. Comme $P(0)=1$, les racines de P sont exactement ces six complexes, et P a pour coefficient dominant -1. En regroupant les conjuguées :

$$\boxed{P = -(X^2-2X-1)\big(X^2+(1-\sqrt{3})X+2-\sqrt{3}\big)\big(X^2+(1+\sqrt{3})X+2+\sqrt{3}\big)}$$

EXERCICE 36 ⋆⋆

Le polynôme s'écrit $(X^n - \mathrm{e}^{ina})(X^n - \mathrm{e}^{-ina})$. Les racines de $X^n = \mathrm{e}^{ina}$ sont les $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+2k\pi/n)}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, et celles de $X^n = \mathrm{e}^{-ina}$ leurs conjuguées ; elles sont $2n$ et distinctes, puisque $\mathrm{e}^{ina} \neq \mathrm{e}^{-ina}$ pour $a \in]0, \pi[$ sauf si $na \in \pi\mathbb{Z}$, cas où les deux familles coïncident et la factorisation reste valable avec des racines doubles.

$$\boxed{\mathbb{C} : \prod_{k=0}^{n-1} (X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+2k\pi/n)})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(a+2k\pi/n)}); \qquad \mathbb{R} : \prod_{k=0}^{n-1} \left(X^2 - 2\cos\left(a + \frac{2k\pi}{n}\right)X + 1\right)}$$

Un facteur réel est irréductible sauf si $a + \dfrac{2k\pi}{n} \in \pi\mathbb{Z}$, auquel cas il vaut $(X \mp 1)^2$.

EXERCICE 37 ⋆⋆⋆

1. On a $z + 1 = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(a+k\pi/n)}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, d'où

$$z_k = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta_k} - 1 = 2\mathrm{i}\sin\theta_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}, \qquad \theta_k = a + \frac{k\pi}{n}.$$

2. Ces n racines sont distinctes, et le polynôme est unitaire de degré n :

$$(X+1)^n - \mathrm{e}^{2ina} = \prod_{k=0}^{n-1}(X - z_k).$$

3. En évaluant en 0, on obtient

$$1 - \mathrm{e}^{2ina} = (-1)^n \prod_k z_k,$$

dont le membre de gauche vaut $-2\mathrm{i}\sin(na)\,\mathrm{e}^{ina}$. Comme $\sum \theta_k = na + \dfrac{(n-1)\pi}{2}$, le membre de droite vaut

$$(-2\mathrm{i})^n \mathrm{e}^{ina}\mathrm{i}^{n-1} \prod_k \sin\theta_k = -2^n\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{ina} \prod_k \sin\theta_k,$$

puisque $(-\mathrm{i})^n\mathrm{i}^{n-1} = (-1)^n\mathrm{i}^{2n-1} = -\mathrm{i}$.

$$\boxed{\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin(na)}{2^{n-1}}}$$

Pour $n = 2$, on retrouve $\sin a \cos a = \dfrac{\sin 2a}{2}$. ✓

Interpolation de Lagrange

EXERCICE 38 ⋆

La formule du théorème 13, ou la résolution du système $a-b+c=6$, $a+b+c=2$, $4a+2b+c=3$, donne P. La proposition 19 décrit les autres.

$$\boxed{P = X^2 - 2X + 3, \qquad Q = X^2 - 2X + 3 + A\,(X+1)(X-1)(X-2),\ A \in \mathbb{R}[X]}$$

EXERCICE 39 ⋆⋆

1. Les polynômes P et $\sum P(z_k)L_k$ sont de degré au plus $s-1$ et coïncident en les s points z_k : par le théorème 3,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{s} P(z_k)L_k = P}$$

2. Pour $r \leqslant s-1$, la question 1 avec $P = X^r$ donne $\sum z_k^r L_k = X^r$; en particulier $\sum L_k = 1$. Pour $r = s$, le polynôme $X^s - (X-z_1)\cdots(X-z_s)$ est de degré au plus $s-1$ et prend la valeur z_k^s en z_k :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{s} z_k^r L_k = X^r \ (r<s), \qquad \sum_{k=1}^{s} z_k^s L_k = X^s - \prod_{k=1}^{s}(X-z_k)}$$

3. Si $A = NQ + R$ avec $N = \prod(X-z_k)$ et $\deg R < s$, alors $R(z_k) = A(z_k)$, et la question 1 appliquée à R donne $R = \sum A(z_k)L_k$. Le reste est donc le polynôme d'interpolation de A aux points z_k, ce qui généralise l'exercice 20.

Fractions rationnelles

EXERCICE 40 ⋆

1. Le degré d'une fraction est un entier, et $\deg(F^2) = 2\deg F$ est pair, alors que $\deg X = 1$ et $\deg \dfrac{1}{X} = -1$ sont impairs.

2. Non. Si $R = \dfrac{P}{Q}$ sous forme irréductible, alors $R^2 = \dfrac{P^2}{Q^2}$ est encore sous forme irréductible, et tous ses pôles sont de multiplicité paire. Or $\dfrac{X^2}{(X+1)(X+2)}$ est sous forme irréductible, avec les pôles simples -1 et -2.

$$\boxed{\text{aucune de ces équations n'a de solution}}$$

Piège. Le degré ne suffit pas pour la question 2 : $\dfrac{X^2}{(X+1)(X+2)}$ est de degré 0, qui est pair. Il faut un argument plus fin, sur les multiplicités.

EXERCICE 41 ⋆⋆

Si a est un pôle de F, l'égalité $F(X) = F(X+1)$ montre que $a-1$ en est un aussi, puis $a-2$, etc. : F aurait une infinité de pôles, ce qui est impossible. Donc F est un polynôme P, et $P - P(0)$ s'annule en tous les entiers naturels, puisque $P(n+1) = P(n)$: il est nul.

$$\boxed{F \text{ est constante}}$$

EXERCICE 42 ⋆⋆

D'après l'exercice 30, $(X^p-1)\wedge(X^q-1) = X-1$. La forme irréductible est donc

$$\frac{X^p-1}{X^q-1} = \frac{1+X+\cdots+X^{p-1}}{1+X+\cdots+X^{q-1}}.$$

$$\boxed{\text{zéros : } \mathbb{U}_p \setminus \{1\}; \quad \text{pôles : } \mathbb{U}_q \setminus \{1\}; \quad \text{tous simples}}$$

En particulier, 1 n'est ni un zéro ni un pôle, bien qu'il annule le numérateur et le dénominateur de l'écriture initiale.

EXERCICE 43 ⋆⋆

1. Si $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{P_1}{Q_1}$, alors $PQ_1 = P_1Q$, et la multiplicité d'un produit est la somme des multiplicités : $\mu_z(P) + \mu_z(Q_1) = \mu_z(P_1) + \mu_z(Q)$.

2. Si $m = \mu_0(F) \neq 0$, on écrit $F = X^m G$ avec $\mu_0(G) = 0$, c'est-à-dire G sans zéro ni pôle en 0. Alors $F' = X^{m-1}(mG + XG')$, et G' n'a pas de pôle en 0, donc $mG + XG'$ prend en 0 la valeur $mG(0) \neq 0$.

$$\boxed{\mu_0(F') = \mu_0(F) - 1 \quad \text{si } \mu_0(F) \neq 0}$$

Si $F' = \dfrac{1}{X}$, alors $\mu_0(F') = -1$. Si $\mu_0(F) \neq 0$, on aurait $\mu_0(F) = 0$: contradiction. Si $\mu_0(F) = 0$, F n'a pas de pôle en 0, donc F' non plus : contradiction. Il n'existe pas de « logarithme rationnel ».

EXERCICE 44 ⋆⋆

1. Si $P = \sum a_k X^k$, alors $P(\omega X) = \sum a_k \omega^k X^k$, et l'identification donne $a_k(\omega^k - 1) = 0$: $a_k = 0$ dès que $n \nmid k$. Donc $P = \sum_m a_{mn} X^{mn} = Q(X^n)$.

2. On écrit $\dfrac{X + \omega^k}{X - \omega^k} = 1 + \dfrac{2\omega^k}{X - \omega^k}$. Par la proposition 23, $\dfrac{n}{X^n - 1} = \sum_k \dfrac{\omega^k}{X - \omega^k}$, car le coefficient en ω^k vaut $\dfrac{n}{n\omega^{k(n-1)}} = \omega^k$.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{X + \omega^k}{X - \omega^k} = n + \frac{2n}{X^n - 1} = \frac{n(X^n + 1)}{X^n - 1}}$$

Décomposition en éléments simples

EXERCICE 45 ⋆

On suit la méthode du cours : partie entière, pôles simples par la proposition 23, pôles multiples par multiplication et évaluation, puis limite de $xF(x)$ ou valeur particulière.

(i) $\boxed{\dfrac{1}{(X+1)^2(3-X)} = \dfrac{1}{4(X+1)^2} + \dfrac{1}{16(X+1)} - \dfrac{1}{16(X-3)}}$

(ii) $\boxed{\dfrac{1}{(X^2-1)(X+1)^2} = \dfrac{1}{8(X-1)} - \dfrac{1}{8(X+1)} - \dfrac{1}{4(X+1)^2} - \dfrac{1}{2(X+1)^3}}$

(iii) $\boxed{\dfrac{7X^2+4X-4}{X^4-4X^2} = \dfrac{1}{X^2} - \dfrac{1}{X} + \dfrac{2}{X-2} - \dfrac{1}{X+2}}$

(iv) $\boxed{\dfrac{X^4+1}{X^4-1} = 1 + \dfrac{1}{2(X-1)} - \dfrac{1}{2(X+1)} - \dfrac{1}{X^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$,

$\boxed{\dfrac{X^4+1}{X^4-1} = 1 + \dfrac{1}{2(X-1)} - \dfrac{1}{2(X+1)} + \dfrac{\mathrm{i}}{2(X-\mathrm{i})} - \dfrac{\mathrm{i}}{2(X+\mathrm{i})}}$ sur $\mathbb{C}$

(v) $\boxed{\dfrac{X^3-1}{(X-2)^2} = X + 4 + \dfrac{12}{X-2} + \dfrac{7}{(X-2)^2}}$

(vi) $\boxed{\dfrac{3X^4+X^3+4X^2-X-3}{(X+1)(X^2+1)^2} = \dfrac{1}{X+1} + \dfrac{2X-1}{X^2+1} + \dfrac{X-3}{(X^2+1)^2}}$

Pour (vi), on obtient le coefficient en -1 par la proposition 23, puis le terme $\dfrac{X-3}{(X^2+1)^2}$ en multipliant par $(X^2+1)^2$ et en évaluant en i, enfin $\dfrac{2X-1}{X^2+1}$ par différence.

EXERCICE 46 ⋆⋆

(i) Les pôles $0, 1, \dots, n$ sont simples, et la proposition 23 donne pour coefficient en k l'inverse de $\prod_{j\neq k}(k-j) = k!\,(-1)^{n-k}(n-k)!$.

$$\boxed{\frac{1}{X(X-1)\cdots(X-n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!\,(n-k)!}\,\frac{1}{X-k}}$$

(ii) et **(iii)** Les pôles sont les $\omega_k = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n}$, simples, avec $Q'(\omega_k) = n\omega_k^{n-1} = \dfrac{n}{\omega_k}$.

$$\boxed{\frac{X^{n-1}}{X^n-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{X-\omega_k}, \qquad \frac{1}{X^n-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\omega_k}{X-\omega_k}}$$

(iv) Le pôle 1 est double, les autres ω_k sont simples, de coefficient $\dfrac{1}{(\omega_k-1)\,n\omega_k^{n-1}} = \dfrac{\omega_k}{n(\omega_k-1)}$.

En 1, $(X-1)^2F = \dfrac{1}{S}$ avec $S = 1+X+\cdots+X^{n-1}$: la formule de Taylor donne les coefficients $\dfrac{1}{S(1)} = \dfrac{1}{n}$ et $-\dfrac{S'(1)}{S(1)^2} = -\dfrac{n-1}{2n}$.

$$\boxed{\frac{1}{(X-1)(X^n-1)} = \frac{1}{n(X-1)^2} - \frac{n-1}{2n(X-1)} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\omega_k}{n(\omega_k-1)}\,\frac{1}{X-\omega_k}}$$

EXERCICE 47 ⋆⋆

On trouve $\dfrac{1}{(X^2+1)(X-1)^2} = \dfrac{1}{2(X-1)^2} - \dfrac{1}{2(X-1)} + \dfrac{X}{2(X^2+1)}$: le coefficient de $\dfrac{1}{(X-1)^2}$ s'obtient en évaluant $\dfrac{1}{X^2+1}$ en 1, celui de seconde espèce en multipliant par X^2+1 et en évaluant en i, et le dernier par la limite de $xF(x)$. En multipliant par AB :

$$1 = \frac{1}{2}A - \frac{X-1}{2}A + \frac{X}{2}B.$$

$$\boxed{\frac{2-X}{2}\,(X^2+1) + \frac{X}{2}\,(X-1)^2 = 1}$$

À retenir. La décomposition en éléments simples d'un $\dfrac{1}{AB}$ fournit une relation de Bézout entre A et B : c'est le chemin inverse de la démonstration du théorème 14.

EXERCICE 48 ⋆⋆

1. En multipliant $1+x^3$ par $\dfrac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-x^6+o(x^7)$ (chapitre 10) :

$$\boxed{\frac{x^3+1}{x^2+1} = 1-x^2+x^3+x^4-x^5-x^6+x^7+o(x^7)}$$

2. Soit $T = 1-X^2+X^3+X^4-X^5-X^6+X^7$. Le polynôme $X^3+1-(X^2+1)T$ a une fonction associée négligeable devant x^7 en 0, donc il est divisible par X^8 ; il est de degré 9, et le calcul donne $X^8(1-X)$. En divisant par $X^8(X^2+1)$:

$$\boxed{\frac{X^3+1}{X^8(X^2+1)} = \frac{1}{X^8} - \frac{1}{X^6} + \frac{1}{X^5} + \frac{1}{X^4} - \frac{1}{X^3} - \frac{1}{X^2} + \frac{1}{X} + \frac{1-X}{X^2+1}}$$

La partie polaire en 0 se lit sur le développement limité : c'est la méthode la plus rapide pour un pôle d'ordre élevé.

EXERCICE 49 ⋆

1. On a $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}\Big)$, et la factorisation $x^3-7x+6 = (x-1)(x-2)(x+3)$ donne

$$\frac{x}{x^3-7x+6} = -\frac{1}{4(x-1)} + \frac{2}{5(x-2)} - \frac{3}{20(x+3)}.$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \text{ sur }]-1,1[; \qquad -\frac{1}{4}\ln(x-1) + \frac{2}{5}\ln(x-2) - \frac{3}{20}\ln(x+3) \text{ sur }]2,+\infty[}$$

2. On a $\dfrac{1}{x^2-3x+2} = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-1}$, et la dérivée n-ième de $\dfrac{1}{x-a}$ vaut $\dfrac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$.

$$\boxed{\Big(\frac{1}{x^2-3x+2}\Big)^{(n)} = (-1)^n n!\Big(\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\Big)}$$

EXERCICE 50 ⋆⋆

(i) On a $\dfrac{k+3}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{3}{2k} - \dfrac{2}{k+1} + \dfrac{1}{2(k+2)} = \dfrac{3}{2}\Big(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\Big) - \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k+2}\Big)$, et le télescopage donne $\dfrac{3}{2}\Big(1 - \dfrac{1}{n+1}\Big) - \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n+2}\Big)$.

(ii) On a $k^4+k^2+1 = (k^2+1)^2 - k^2 = (k^2-k+1)(k^2+k+1)$, et

$$\frac{k}{k^4+k^2+1} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{k^2-k+1} - \frac{1}{k^2+k+1}\Big).$$

Comme $(k+1)^2-(k+1)+1 = k^2+k+1$, la somme télescope : elle vaut $\dfrac{1}{2}\Big(1 - \dfrac{1}{n^2+n+1}\Big)$.

(iii) On a $\dfrac{1}{k^2+k-6} = \dfrac{1}{(k-2)(k+3)} = \dfrac{1}{5}\Big(\dfrac{1}{k-2} - \dfrac{1}{k+3}\Big)$; le télescopage, de pas 5, laisse les cinq premiers termes positifs, $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5} = \dfrac{137}{60}$, moins cinq termes qui tendent vers 0.

$$\boxed{\text{(i) } \frac{5}{4}; \qquad \text{(ii) } \frac{1}{2}; \qquad \text{(iii) } \frac{137}{300}}$$

EXERCICE 51 ⋆⋆

On utilise un fait général : si F n'a que des pôles simples a_i, de coefficients c_i, et si $\deg F < 0$, alors $xF(x) \to \sum c_i$ en $+\infty$; cette somme est nulle si $\deg F \leqslant -2$.

(i) $\dfrac{1}{P} = \displaystyle\sum_k \frac{1}{P'(x_k)}\,\frac{1}{X - x_k}$, et $\deg \dfrac{1}{P} = -n \leqslant -2$.

(ii) $\dfrac{1}{XP}$ a les pôles simples 0, de coefficient $\dfrac{1}{P(0)}$, et x_k, de coefficient $\dfrac{1}{x_k P'(x_k)}$; son degré est $-n-1 \leqslant -2$.

(iii) $\dfrac{P''}{P}$ a les pôles simples x_k, de coefficients $\dfrac{P''(x_k)}{P'(x_k)}$, et est de degré -2.

$$\boxed{\sum \frac{1}{P'(x_k)} = 0, \qquad \sum \frac{1}{x_k P'(x_k)} = -\frac{1}{P(0)}, \qquad \sum \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0}$$

EXERCICE 52 ⋆⋆

1. Par la proposition 24, $\dfrac{P'}{P}$ n'a que des pôles simples, et ses coefficients sont les multiplicités des racines, donc des entiers. Or le coefficient de $\dfrac{1}{X-1}$ dans $\dfrac{X^2+1}{X^3-1}$ vaut $\dfrac{2}{3}$.

$$\boxed{\text{aucun polynôme ne convient}}$$

2. La décomposition donnée impose les racines 1 et 0, de multiplicités 2 et 3, et aucune autre : $P = \lambda(X-1)^2X^3$, et réciproquement ces polynômes conviennent.

$$\boxed{P = \lambda X^3(X-1)^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*}$$

EXERCICE 53 ⋆⋆⋆

1. La formule $\cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) = 2\cos\theta\cos((n+1)\theta)$ (chapitre 4) suggère de poser $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$; une récurrence double montre que ces polynômes conviennent. L'unicité vient du théorème 3 : deux tels polynômes coïncident sur $[-1,1]$, qui est infini.

2. Par récurrence, T_n est de degré n, de coefficient dominant 2^{n-1} pour $n \geqslant 1$. L'équation $\cos(n\theta) = 0$ donne les n racines distinctes $x_k = \cos\theta_k$, avec $\theta_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, qui sont donc toutes les racines.

3. Les pôles sont simples. En dérivant $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, on obtient $T_n'(\cos\theta) = \dfrac{n\sin(n\theta)}{\sin\theta}$, et $\sin(n\theta_k) = (-1)^k$. La proposition 23 donne :

$$\boxed{\frac{1}{T_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \sin\theta_k}{X - \cos\theta_k}, \qquad \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}}$$

Pour $n = 2$, on a $T_2 = 2X^2 - 1$, et la formule donne bien

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{\sin(\pi/4)}{X - \cos(\pi/4)} - \frac{\sin(3\pi/4)}{X - \cos(3\pi/4)}\Big) = \frac{\sqrt{2}}{4}\Big(\frac{1}{X - \frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{1}{X + \frac{\sqrt{2}}{2}}\Big) = \frac{1}{2X^2 - 1}.\checkmark$$

EXERCICE 54 ⋆⋆

1. Fausse. Les termes dominants peuvent se compenser : $(X^2+X)+(-X^2)$ est de degré 1. Seule l'inégalité $\deg(P+Q)\leqslant\max(\deg P,\deg Q)$ est vraie (proposition 3).

2. Vraie. Les racines non réelles vont par paires de conjuguées de même multiplicité (proposition 18) : leur nombre total est pair, donc il reste au moins une racine réelle. C'est aussi la proposition 13 du chapitre 8.

3. Fausse. $X^4+1=(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)$ n'a pas de racine réelle.

4. Vraie. Par la proposition 12, $P'(a)=0$ et $P''(a)\neq 0$, donc a est racine simple de P'.

5. Vraie. C'est la proposition 16 (ii).

6. Fausse. Le reste $\alpha X+\beta$ vérifie $\alpha+\beta=P(1)$ et $-\alpha+\beta=P(-1)$, donc il vaut

$$\frac{P(1)-P(-1)}{2}X+\frac{P(1)+P(-1)}{2}.$$

Pour $P=X$, la formule proposée donnerait $X-1$ au lieu de X.

7. Fausse. Le nombre de racines est n seulement si on les compte avec leur multiplicité : X^2 n'a que la racine 0.

8. Vraie. $X^3+1=X(X^2+1)+(1-X)$, et le reste est de degré $1<2$ (proposition 22).

9. Vraie. C'est la proposition 23.

10. Vraie. Les n racines n-ièmes de l'unité sont distinctes, et elles sont toutes les racines (proposition 17). On peut aussi invoquer l'exercice 33 : $(X^n-1)\wedge nX^{n-1}=1$.

vraies : 2, 4, 5, 8, 9, 10 ; fausses : 1, 3, 6, 7

EXERCICE 55 ⋆⋆

1. On écrit $A-B=2E$ et $C-D=2F$, avec E et F à coefficients entiers. Alors

$$AC-BD=A(C-D)+(A-B)D=2(AF+ED).$$

Les coefficients d'un produit de polynômes sont des sommes de produits de coefficients (définition du produit, section 13.1), donc $AF+ED$ est à coefficients entiers, et $AC\equiv BD$ [2]. On remarque aussi que la relation est transitive, puisqu'une somme de polynômes à coefficients pairs est à coefficients pairs.

2. On raisonne par récurrence sur k, le cas $k=0$ étant une égalité. Si $(1+X)^{2^k}\equiv 1+X^{2^k}$ [2], la question 1, appliquée avec $A=C=(1+X)^{2^k}$ et $B=D=1+X^{2^k}$, donne

$$(1+X)^{2^{k+1}}\equiv\left(1+X^{2^k}\right)^2=1+2X^{2^k}+X^{2^{k+1}}\equiv 1+X^{2^{k+1}}\ [2].$$

3. Comme $(1+X)^n=\prod_i(1+X)^{2^{k_i}}$, la question 2 et la question 1, appliquée $s-1$ fois, donnent la congruence annoncée. En développant le produit, on choisit dans chaque facteur le terme 1 ou le terme $X^{2^{k_i}}$: à chaque partie I de $[\![1\,;s]\!]$ correspond le monôme X^{e_I}, avec $e_I=\sum_{i\in I}2^{k_i}$, et

$$\prod_{i=1}^{s}(1+X^{2^{k_i}})=\sum_{I\subset[\![1\,;s]\!]}X^{e_I}.$$

Si $e_I=e_J$, les deux sommes sont deux écritures en base 2 du même entier, donc $I=J$ par unicité de l'écriture. Les 2^s parties de $[\![1\,;s]\!]$ donnent ainsi 2^s exposants distincts, tous compris entre 0 et n.

4. Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des exposants e_I. D'après la question 3, le coefficient de X^k dans le produit vaut 1 si $k \in \mathcal{E}$ et 0 sinon. La congruence de la question 3 dit que, pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, l'entier $\binom{n}{k} - \mathbf{1}_{\mathcal{E}}(k)$ est pair : $\binom{n}{k}$ est impair si et seulement si $k \in \mathcal{E}$.

$$\boxed{\operatorname{card}\left\{k \in [\![0\,;n]\!] \;\middle|\; \tbinom{n}{k} \text{ impair}\right\} = 2^s, \quad s \text{ nombre de chiffres 1 de } n \text{ en base 2}}$$

5. On a $2026 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^1$, qui comporte huit chiffres 1 en base 2.

$$\boxed{\text{la ligne 2026 contient } 2^8 = 256 \text{ coefficients impairs sur 2027}}$$

Les coefficients sont tous impairs si et seulement si $2^s = n+1$. Or s puissances de 2 distinctes ont une somme au moins égale à $2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{s-1} = 2^s - 1$, avec égalité seulement si ce sont exactement ces puissances. Donc $n \geqslant 2^s - 1$, avec égalité si et seulement si $\{k_1, \ldots, k_s\} = [\![0\,;s-1]\!]$.

$$\boxed{\text{tous les } \tbinom{n}{k} \text{ sont impairs } \iff n = 2^s - 1,\ s \in \mathbb{N}^*}$$

On le vérifie sur les lignes 1, 3 et 7 du triangle de Pascal : $1, 3, 3, 1$ et $1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1$. À l'opposé, pour $n = 2^s$, seuls les deux coefficients extrêmes sont impairs.
À retenir. La question 2 généralise la proposition 13 du chapitre 12 pour $p = 2$: la congruence $(1+X)^2 \equiv 1 + X^2$ exprime que 2 divise le coefficient binomial central de la ligne 2, et l'élévation au carré répétée la propage aux puissances de 2. Calculer « modulo 2 » sur les coefficients d'un polynôme permet de lire d'un coup la parité de toute une ligne du triangle de Pascal.

EXERCICE 56 ⋆⋆

1. Si N divise m, alors $\omega^m = 1$, et la somme vaut N. Sinon, $\omega^m \neq 1$ (chapitre 4), et la somme géométrique vaut

$$\sum_{j=0}^{N-1} (\omega^m)^j = \frac{(\omega^N)^m - 1}{\omega^m - 1} = 0.$$

$$\boxed{\sum_{j=0}^{N-1} \omega^{jm} = N \text{ si } N \mid m, \qquad 0 \text{ sinon}}$$

C'est le calcul de l'exercice 14, où l'on prenait $m = 1$ et $m = 2$.

2. Avec $c_n = 1$, on a $P(R\omega^j) = \sum_{k=0}^{n} c_k R^k \omega^{jk}$, et l'on intervertit les deux sommes finies :

$$\sum_{j=0}^{N-1} \omega^{-jn} P(R\omega^j) = \sum_{k=0}^{n} c_k R^k \sum_{j=0}^{N-1} \omega^{j(k-n)}.$$

Pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$, on a $1 \leqslant n-k \leqslant n < N$, donc N ne divise pas $k-n$, et la somme intérieure est nulle d'après la question 1. Il ne reste que le terme $k = n$, qui vaut $c_n R^n N = NR^n$.

3. Comme $|\omega^{-jn}| = 1$, l'inégalité triangulaire donne

$$NR^n \leqslant \sum_{j=0}^{N-1} |P(R\omega^j)| \leqslant N \max_{0 \leqslant j \leqslant N-1} |P(R\omega^j)|,$$

d'où un indice j tel que $|P(R\omega^j)| \geqslant R^n$. Le point M d'affixe $R\omega^j$ est sur Γ, et

$$|P(R\omega^j)| = \prod_{k=1}^{n} |R\omega^j - a_k| = \prod_{k=1}^{n} MA_k.$$

$$\boxed{\exists M \in \Gamma, \quad MA_1 \times \cdots \times MA_n \geqslant R^n}$$

On a même trouvé M parmi les sommets d'un polygone régulier à $n+1$ côtés inscrit dans Γ, fixé à l'avance, indépendamment des points A_k.

4. Si tous les points A_k sont en O, le produit vaut R^n pour tout $M \in \Gamma$: aucune constante strictement plus grande ne convient. Supposons maintenant que les A_k soient les sommets d'un polygone régulier inscrit, d'affixes $\lambda\zeta^k$, avec $\lambda = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\zeta = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$. En composant la factorisation de la proposition 17 avec $\dfrac{X}{\lambda}$ et en multipliant par λ^n, on obtient

$$P = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \lambda\zeta^k) = X^n - \lambda^n = X^n - R^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}.$$

Pour $|z| = R$, on a $|z^n - R^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}| \leqslant 2R^n$, avec égalité si et seulement si $z^n = -R^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$, ce qui a lieu pour $z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\pi/n)}$; et le produit est nul aux sommets.

$$\boxed{\max_{M\in\Gamma}\prod_k MA_k = 2R^n \text{ (milieux des arcs)}, \qquad \min_{M\in\Gamma}\prod_k MA_k = 0 \text{ (sommets)}}$$

À retenir. Le résultat géométrique est un énoncé sur les polynômes unitaires : un tel polynôme de degré n ne peut pas être de module strictement inférieur à R^n en tout point du cercle de rayon R, et X^n montre que la borne est atteinte. L'exercice 60 établissait un phénomène analogue aux entiers $0, \ldots, n$, avec la décomposition en éléments simples au lieu des racines de l'unité.

EXERCICE 57 ⋆⋆⋆

1. Comme $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ (théorème 4) et $1 + j + j^2 = 0$, on pose

$$u = \frac{\alpha_1 + j^2\alpha_2 + j\alpha_3}{3}, \qquad v = \frac{\alpha_1 + j\alpha_2 + j^2\alpha_3}{3},$$

et l'on vérifie les trois égalités ; par exemple $u + v = \dfrac{2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3}{3} = \alpha_1$. L'unicité vient de ce que $u + v$ et $ju + j^2v$ déterminent u et v, le déterminant $j^2 - j$ étant non nul.

2. En développant, $(u+v)(ju+j^2v)(j^2u+jv) = u^3 + v^3$, et $\sigma_2 = -3uv$. Le théorème 4 donne $\sigma_3 = -q$ et $\sigma_2 = p$.

$$\boxed{uv = -\frac{p}{3}, \qquad u^3 + v^3 = -q}$$

3. Donc $u^3 + v^3 = -q$ et $u^3v^3 = -\dfrac{p^3}{27}$: ce sont les racines de $X^2 + qX - \dfrac{p^3}{27}$ (chapitre 4, théorème 4).

4. On calcule les racines U et V de Q, on choisit une racine cubique u de U, puis $v = -\dfrac{p}{3u}$ (si $p \neq 0$) ; les racines sont $u + v$, $ju + j^2v$, $j^2u + jv$.

5. Pour $aX^3 + bX^2 + cX + d$, on divise par a et l'on pose $X = Y - \dfrac{b}{3a}$, ce qui supprime le terme en Y^2 : on est ramené à $Y^3 + pY + q$.

6. Une racine multiple x annule $P' = 3X^2 + p$, donc $x^2 = -\dfrac{p}{3}$, et $P(x) = x(x^2+p) + q = \dfrac{2p}{3}x + q = 0$. Si $p \neq 0$, $x = -\dfrac{3q}{2p}$, et $x^2 = -\dfrac{p}{3}$ s'écrit $27q^2 + 4p^3 = 0$; si $p = 0$, il faut $q = 0$, ce qui est encore cette condition.

$$\boxed{X^3 + pX + q \text{ a une racine multiple} \iff 4p^3 + 27q^2 = 0}$$

7. Si $4p^3 + 27q^2 > 0$, le discriminant $q^2 + \dfrac{4p^3}{27}$ de Q est positif : u^3 et v^3 sont réels et distincts, on prend u, v réels, et α_2, α_3 sont non réels, conjugués. Si $4p^3 + 27q^2 = 0$, $u^3 = v^3$ est réel, $u = v$ réel, et

les racines $2u$, $-u$, $-u$ sont réelles. Si $4p^3+27q^2<0$, alors $p<0$, u^3 et v^3 sont conjugués non réels, on peut choisir $v=\overline{u}$ puisque $u\overline{u}=-\dfrac{p}{3}>0$, et les trois racines $u+\overline{u}$, $ju+\overline{ju}$, $j^2u+\overline{j^2u}$ sont réelles.

$$\boxed{\text{les trois racines sont réelles } \iff 4p^3+27q^2\leqslant 0}$$

C'est le « cas irréductible » de Cardan : lorsque les trois racines sont réelles et distinctes, la formule passe nécessairement par des nombres complexes, comme l'annonçait l'introduction du chapitre 4.

EXERCICE 58 ⋆⋆⋆

1. Par la formule du binôme, $P_n=\sum_k \binom{2n+1}{k} X^{2n+1-k}(\mathrm{i}^k-(-\mathrm{i})^k)$: le terme $k=0$ disparaît, et le terme $k=1$ vaut $2\mathrm{i}(2n+1)X^{2n}$.

$$\boxed{\deg P_n=2n, \qquad \text{terme dominant } 2(2n+1)\mathrm{i}\,X^{2n}}$$

2. Une racine x vérifie $\left(\dfrac{x+\mathrm{i}}{x-\mathrm{i}}\right)^{2n+1}=1$, avec $x\neq\mathrm{i}$: $\dfrac{x+\mathrm{i}}{x-\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta_k}$, $\theta_k=\dfrac{k\pi}{2n+1}$, $1\leqslant k\leqslant 2n$. On en tire $x=\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta_k}+1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta_k}-1}=\operatorname{cotan}\theta_k$. Ces $2n$ réels sont distincts, car cotan est injective sur $]0,\pi[$.

$$\boxed{P_n=2(2n+1)\mathrm{i}\prod_{k=1}^{2n}\left(X-\operatorname{cotan}\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

3. (a) Le terme $k=2$ est nul, donc $\sigma_1=0$. Le terme $k=3$ vaut $-2\mathrm{i}\binom{2n+1}{3}X^{2n-2}$, donc $\sigma_2=-\dfrac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{3}=-\dfrac{2n(2n-1)}{6}$, et $\sum\operatorname{cotan}^2=\sigma_1^2-2\sigma_2$.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{2n}\operatorname{cotan}\frac{k\pi}{2n+1}=0, \qquad \sum_{k=1}^{2n}\operatorname{cotan}^2\frac{k\pi}{2n+1}=\frac{2n(2n-1)}{3}}$$

(b) Les termes d'indices k et $2n+1-k$ sont égaux, puisque $\operatorname{cotan}(\pi-\theta)=-\operatorname{cotan}\theta$: la somme pour $k\leqslant n$ est la moitié.

4. Les fonctions $x\mapsto x-\sin x$ et $x\mapsto\tan x-x$ sont nulles en 0 et de dérivées $1-\cos x>0$ et $\tan^2 x>0$ sur $]0,\dfrac{\pi}{2}[$. En inversant et en élevant au carré, $\operatorname{cotan}^2 x<\dfrac{1}{x^2}<\dfrac{1}{\sin^2 x}=1+\operatorname{cotan}^2 x$.

5. Avec $x=\dfrac{k\pi}{2n+1}$ et en sommant pour $1\leqslant k\leqslant n$:

$$\frac{n(2n-1)}{3}<\frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<n+\frac{n(2n-1)}{3}=\frac{n(2n+2)}{3}.$$

En multipliant par $\dfrac{\pi^2}{(2n+1)^2}$, les deux bornes tendent vers $\dfrac{\pi^2}{6}$, et le théorème des gendarmes conclut.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{\pi^2}{6}}$$

EXERCICE 59 ⋆⋆⋆

1. Soit $A = (X^2-1)^n$, de degré $2n$, avec ± 1 racines de multiplicité n. On montre par récurrence sur $k \in [\![0\,;n]\!]$ que $A^{(k)}$ admet ± 1 pour racines de multiplicité $n-k$, et au moins k racines distinctes dans $]-1,1[$. Si c'est vrai au rang $k<n$, le théorème de Rolle appliqué entre les $k+2$ racines distinctes $-1 < c_1 < \cdots < c_k < 1$ de $A^{(k)}$ fournit $k+1$ racines distinctes de $A^{(k+1)}$ dans $]-1,1[$, et ± 1 sont racines de multiplicité $n-k-1$. Pour $k=n$, $L_n = A^{(n)}$, de degré n, a n racines distinctes dans $]-1,1[$: ce sont toutes ses racines, et elles sont simples.

2. On intègre par parties n fois (chapitre 6). À chaque étape, le terme entre crochets fait intervenir $A^{(j)}(\pm 1)$ avec $j<n$, qui est nul d'après la question 1 :

$$\int_{-1}^{1} Q(t)L_n(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-1}^{1} Q'(t)A^{(n-1)}(t)\,\mathrm{d}t = \cdots = (-1)^n \int_{-1}^{1} Q^{(n)}(t)A(t)\,\mathrm{d}t = 0,$$

puisque $Q^{(n)} = 0$ pour $\deg Q < n$.

3. Soit $x_1, \ldots, x_m$ les racines de L_n dans $]-1,1[$ de multiplicité impaire, où L_n change de signe. Si $m<n$, le polynôme $Q = \prod (X - x_i)$ est de degré $m<n$, et QL_n garde un signe constant sur $[-1,1]$ sans être nul : son intégrale est non nulle, ce qui contredit la question 2. Donc $m \geqslant n = \deg L_n$, et L_n a n racines simples dans $]-1,1[$.

EXERCICE 60 ⋆⋆⋆

1. La fraction $\dfrac{P}{Q}$ est de degré -1 et a les pôles simples $0, \ldots, n$. Par la proposition 23 et l'exercice 46 (i), le coefficient en k vaut $\dfrac{P(k)}{Q'(k)} = \dfrac{(-1)^{n-k}P(k)}{k!\,(n-k)!} = \dfrac{(-1)^{n-k}}{n!}\binom{n}{k}P(k)$.

2. Comme P et Q sont unitaires de degrés n et $n+1$, $x\dfrac{P(x)}{Q(x)} \to 1$ en $+\infty$, et cette limite est la somme des coefficients.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}P(k) = n!}$$

3. Si $M = \max |P(k)|$, l'inégalité triangulaire donne $n! \leqslant M \sum_k \binom{n}{k} = 2^n M$.

$$\boxed{\max_{0\leqslant k\leqslant n} |P(k)| \geqslant \frac{n!}{2^n}}$$

Un polynôme unitaire ne peut donc pas être petit en tous les entiers de 0 à n : par exemple, pour $n=2$, l'un des nombres $|P(0)|$, $|P(1)|$, $|P(2)|$ dépasse $\dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 61 ⋆⋆⋆

1. On a $(A^2+B^2)(C^2+D^2) = (AC-BD)^2 + (AD+BC)^2$, comme pour les modules de nombres complexes.

2. Un élément de S est positif sur $\mathbb{R}$. Réciproquement, soit $P \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$, non nul. Son coefficient dominant λ est positif, puisque $P(x)$ a le signe de λ pour x grand. Ses racines réelles sont de multiplicité paire : si a était de multiplicité impaire, $P = (X-a)^m Q$ avec $Q(a) \neq 0$ changerait de signe en a. La décomposition du théorème 12 s'écrit donc avec des facteurs $\lambda = (\sqrt{\lambda})^2 + 0^2$, $(X-a)^{2r} = \big((X-a)^r\big)^2 + 0^2$ et $X^2 + pX + q = \left(X + \dfrac{p}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{q - \dfrac{p^2}{4}}\right)^2$, qui sont tous dans S. La question 1 conclut.

$$\boxed{P \in S \iff \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0}$$

EXERCICE 62 ⋆⋆⋆

1. D'une part, par la proposition 24, $\dfrac{P'}{P} = \displaystyle\sum_k \frac{1}{X-a_k}$. D'autre part, avec $P = c\prod(X-a_k)$ et $P' = nc\displaystyle\prod_j (X-b_j)$, la proposition 23 donne pour coefficient en a_i

$$\frac{P'(a_i)}{c\prod_{k\neq i}(a_i-a_k)} = \frac{nc\prod_j(a_i-b_j)}{c\prod_{k\neq i}(a_i-a_k)}.$$

En égalant ce coefficient à 1 :

$$\boxed{n\prod_{j=1}^{n-1}(a_i-b_j) = \prod_{k\neq i}(a_i-a_k)}$$

2. Par le théorème de Rolle, $b_i \in]a_i, a_{i+1}[$. En $b = b_i$, la première écriture donne $\displaystyle\sum_k \frac{1}{b-a_k} = 0$. Les termes $k \leqslant i$ sont positifs, les termes $k \geqslant i+1$ négatifs. Donc

$$\frac{1}{b-a_i} \leqslant \sum_{k\leqslant i}\frac{1}{b-a_k} = \sum_{k\geqslant i+1}\frac{1}{a_k-b} \leqslant \frac{n-i}{a_{i+1}-b},$$

d'où $a_{i+1}-b \leqslant (n-i)(b-a_i)$, soit $b-a_i \geqslant \dfrac{a_{i+1}-a_i}{n-i+1} \geqslant \dfrac{a_{i+1}-a_i}{n}$. De même, $\dfrac{1}{a_{i+1}-b} \leqslant \dfrac{i}{b-a_i}$ donne $a_{i+1}-b \geqslant \dfrac{a_{i+1}-a_i}{i+1} \geqslant \dfrac{a_{i+1}-a_i}{n}$.

$$\boxed{a_i + \frac{a_{i+1}-a_i}{n} \leqslant b_i \leqslant a_{i+1} - \frac{a_{i+1}-a_i}{n}}$$

La seconde question n'utilise que la première écriture de $\dfrac{P'}{P}$: la racine de P' ne peut pas s'approcher à moins d'un n-ième de la longueur de l'intervalle de ses deux voisines.

EXERCICE 63 ⋆⋆⋆

1. Une brique de taille $(1,2,4)$ contient 8 points. Un pavage du pavé, qui contient $5\times6\times6 = 180$ points, demanderait $\dfrac{180}{8} = 22{,}5$ briques : c'est impossible.

2. Soit $E = [\![x\,;x']\!]\times[\![y\,;y']\!]\times[\![z\,;z']\!]$, de dimensions d_1, d_2, d_3. La somme sur E se factorise (chapitre 3) :

$$\sum_{(i,j,k)\in E} X^{i+j+k} = \Big(\sum_{i=x}^{x'} X^i\Big)\Big(\sum_{j=y}^{y'} X^j\Big)\Big(\sum_{k=z}^{z'} X^k\Big),$$

et, par télescopage,

$$(X-1)\sum_{i=x}^{x'} X^i = X^{x'+1} - X^x = X^x(X^{d_1}-1),$$

et de même pour les deux autres facteurs.

$$\boxed{w(E) = X^{x+y+z}(X^{d_1}-1)(X^{d_2}-1)(X^{d_3}-1), \qquad w(\mathcal{P}) = X^3(X^A-1)(X^B-1)(X^C-1)}$$

3. Si $E\cap F = \varnothing$, la somme sur $E\cup F$ est la somme des sommes sur E et sur F, d'où l'additivité ; par récurrence, le poids d'une réunion finie de parties deux à deux disjointes est la somme des poids. Si $\mathcal{P}$ est la réunion disjointe de briques $E_1,\dots,E_r$ de taille (a,b,c), la question 2 donne, l'ordre des facteurs étant indifférent,

$$w(\mathcal{P}) = \sum_{\ell=1}^{r} X^{s_\ell}(X^a-1)(X^b-1)(X^c-1),$$

où s_ℓ est la somme des coordonnées du coin de E_ℓ. Le polynôme $T = (X^a-1)(X^b-1)(X^c-1)$ divise donc X^3S, avec $S = (X^A-1)(X^B-1)(X^C-1)$. Comme 0 n'est pas racine de T, les polynômes T et X^3 sont premiers entre eux (proposition 16 (ii)), et le lemme de Gauss (théorème 9) donne $T \mid S$.

4. Ici $T = (X-1)(X^2-1)(X^4-1)$ admet i pour racine, puisque $\mathrm{i}^4 = 1$. Mais $\mathrm{i}^{10} = (\mathrm{i}^2)^5 = -1$, donc i n'est pas racine de $S = (X^{10}-1)^3$: T ne divise pas S (proposition 16 (i)), et la question 3 conclut. L'argument de volume ne suffisait pas : $1000 = 8 \times 125$.

5. On compare les multiplicités de -1 ; dans un produit, la multiplicité d'une racine est la somme des multiplicités dans les facteurs, par la proposition 9. Dans T, le réel -1 est racine simple de X^2-1 et de X^4-1, et n'est pas racine de $X-1$: il est de multiplicité 2. Dans $S = (X^7-1)(X^8-1)(X^9-1)$, il n'est racine ni de X^7-1 ni de X^9-1, et il est racine simple de X^8-1, dont les huit racines sont distinctes (proposition 17) : il est de multiplicité $1 < 2$. Donc T ne divise pas S, et le pavé n'est pas pavable, bien que $504 = 8 \times 63$.

6. On a $\zeta_d^m = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi m/d}$, qui vaut 1 si et seulement si $\dfrac{m}{d} \in \mathbb{Z}$ (chapitre 4), c'est-à-dire si et seulement si $d \mid m$. Par la proposition 17, X^m-1 a m racines distinctes et est de degré m : la somme des multiplicités valant m, chacune vaut 1.

7. Supposons d'abord, quitte à permuter, que $a \mid A$, $b \mid B$ et $c \mid C$. Les $\dfrac{A}{a} \times \dfrac{B}{b} \times \dfrac{C}{c}$ briques

$$[\![(p-1)a+1\,;pa]\!] \times [\![(q-1)b+1\,;qb]\!] \times [\![(t-1)c+1\,;tc]\!], \qquad 1 \leqslant p \leqslant \frac{A}{a},\ 1 \leqslant q \leqslant \frac{B}{b},\ 1 \leqslant t \leqslant \frac{C}{c},$$

sont deux à deux disjointes et recouvrent le pavé ; si la permutation n'est pas l'identité, on oriente les briques en conséquence.

Réciproquement, supposons $\mathcal{P}$ pavable, de sorte que $T \mid S$ par la question 3. Par la question 6 et l'additivité des multiplicités, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, la multiplicité de ζ_d dans T est le nombre de termes de la liste (a,b,c) divisibles par d, et sa multiplicité dans S est le nombre de termes de la liste (A,B,C) divisibles par d. La proposition 16 (i) fournit les trois inégalités suivantes.

- Pour $d = c$, la multiplicité dans T est au moins 1 : l'un des entiers A, B, C est multiple de c ; on l'appelle C_1.
- Pour $d = b$, comme $b \mid b$ et $b \mid c$, la multiplicité dans T est au moins 2 : deux des entiers A, B, C au moins sont multiples de b, et l'un d'eux n'est pas C_1 ; on l'appelle B_1.
- Pour $d = a$, comme a divise a, b et c, la multiplicité dans T vaut 3 : les trois entiers sont multiples de a, en particulier le troisième, que l'on appelle A_1.

Les deux implications sont établies. Lorsque $a \mid b$ et $b \mid c$, en notant (A_1,B_1,C_1) une permutation convenable de (A,B,C) :

$$\boxed{\mathcal{P} \text{ est } (a,b,c)\text{-pavable} \iff a \mid A_1,\ b \mid B_1 \text{ et } c \mid C_1}$$

La démonstration montre davantage : pour une brique « harmonique » $(a \mid b \mid c)$, la condition de divisibilité de la question 3 est non seulement nécessaire, mais suffisante.

Piège. L'hypothèse $a \mid b \mid c$ est indispensable. Le pavé de dimensions 1, 5, 6 est $(1,2,3)$-pavable : on recouvre une bande 2×6 par deux briques 2×3, puis la bande 3×6 restante par trois briques 3×2. Pourtant aucune permutation de $(1,5,6)$ n'a ses termes multiples de 1, 2, 3 respectivement, puisque 5 n'est multiple ni de 2 ni de 3.

EXERCICE 64 ⋆⋆⋆

1. Si l'un des polynômes était nul, le produit ABC serait nul, donc constant. Si D divise A et B, il divise $C = -A - B$, donc le PGCD de la famille (A, B, C), qui vaut 1 (remarque suivant la proposition 15) : D est constant. Ainsi $A \wedge B = 1$, et de même $B \wedge C = C \wedge A = 1$.

2. En remplaçant C par $-A - B$ et C' par $-A' - B'$, on obtient

$$BC' - B'C = -BA' - BB' + B'A + B'B = AB' - A'B,$$
$$CA' - C'A = -AA' - BA' + A'A + B'A = AB' - A'B.$$

Supposons $W = 0$. Alors $AB' = A'B$, donc A divise $A'B$; comme $A \wedge B = 1$, le lemme de Gauss (théorème 9) donne $A \mid A'$. Si A n'était pas constant, A' serait un multiple non nul de A de degré $\deg A - 1$ (proposition 11) : c'est impossible, donc A est constant. Les égalités $BC' = B'C$ et $CA' = C'A$ montrent de même que B et C sont constants, et ABC le serait.

$$\boxed{W = AB' - A'B = BC' - B'C = CA' - C'A \neq 0}$$

3. Par la proposition 9, on écrit $A = (X - z)^m A_1$ avec $A_1(z) \neq 0$ et $m \geqslant 1$. La règle de dérivation d'un produit donne alors

$$A' = (X - z)^{m-1}(mA_1 + (X - z)A_1'),$$

puis, en mettant $(X - z)^{m-1}$ en facteur dans $W = AB' - A'B$,

$$W = (X - z)^{m-1}\Big[(X - z)A_1B' - (mA_1 + (X - z)A_1')B\Big],$$

donc z est racine de W de multiplicité au moins $m - 1$. Le même calcul vaut pour les racines de B, en échangeant les rôles de A et de B, puisque $W = -(BA' - B'A)$. Pour les racines de C, on le mène sur l'écriture $W = CA' - C'A$ de la question 2.

Soit $z_1, \dots, z_r$ les racines distinctes de ABC, avec $r = r(ABC)$, et μ_i la multiplicité de z_i dans ABC. Les polynômes A, B, C étant deux à deux premiers entre eux, ils n'ont deux à deux aucune racine commune (proposition 16 (ii)) : chaque z_i est racine d'un seul des trois, avec la multiplicité μ_i. Par ce qui précède et la proposition 10, $\prod_i (X - z_i)^{\mu_i - 1}$ divise W, qui est non nul. En comparant les degrés, et puisque $\sum \mu_i = \deg(ABC)$ (proposition 16) :

$$\boxed{\deg(ABC) - r(ABC) \leqslant \deg W}$$

4. Les deux termes de $W = AB' - A'B$ sont de degré au plus $\deg A + \deg B - 1$ (propositions 3 et 11), donc $\deg W \leqslant \deg A + \deg B - 1$. Avec la question 3, $\deg A + \deg B + \deg C - r(ABC) \leqslant \deg A + \deg B - 1$, soit $\deg C \leqslant r(ABC) - 1$. Les écritures $W = BC' - B'C$ et $W = CA' - C'A$ donnent de même $\deg A \leqslant r(ABC) - 1$ et $\deg B \leqslant r(ABC) - 1$.

$$\boxed{\max(\deg A, \deg B, \deg C) \leqslant r(ABC) - 1}$$

5. Montrons que les solutions sont les triplets $(\lambda g, \mu g, \nu g)$, où $g \in \mathbb{C}[X]$ et $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{C}^3$ vérifie $\lambda^n + \mu^n = \nu^n$; ces triplets sont évidemment solutions.

Premier cas : x, y, z non nuls, premiers entre eux dans leur ensemble. Supposons-les non tous constants, et posons $A = x^n$, $B = y^n$, $C = -z^n$, de somme nulle. Des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont premiers entre eux dans leur ensemble si et seulement s'ils n'ont aucune racine commune : un PGCD non constant aurait une racine (théorème 11), et une racine commune w fournirait le diviseur commun $X - w$. Une racine commune à A, B, C le serait à x, y, z : les polynômes A, B, C sont donc premiers entre eux dans leur ensemble, et $ABC = -(xyz)^n$ n'est pas constant. Les racines de ABC sont celles de xyz, donc, avec $\delta = \max(\deg x, \deg y, \deg z)$,

$$r(ABC) = r(xyz) \leqslant \deg x + \deg y + \deg z \leqslant 3\delta.$$

La question 4 donne alors $n\delta \leqslant 3\delta - 1$, soit $(n-3)\delta \leqslant -1$, ce qui est impossible pour $n \geqslant 3$. Donc x, y et z sont constants.

Cas général. Si $x = y = z = 0$, on prend $g = 0$. Sinon, soit g le PGCD de la famille (x, y, z), et $x = gx_1$, $y = gy_1$, $z = gz_1$. Si D divise x_1, y_1 et z_1, alors gD divise x, y, z, donc g, et D est constant : les polynômes x_1, y_1, z_1 sont premiers entre eux dans leur ensemble. En simplifiant par $g^n \neq 0$ (intégrité), $x_1^n + y_1^n = z_1^n$. Si x_1, y_1, z_1 sont non nuls, le premier cas montre qu'ils sont constants. Si l'un est nul, par exemple $x_1 = 0$, alors $y_1^n = z_1^n$, et y_1, z_1 ne sont pas tous deux nuls ; une racine de y_1 serait racine de z_1^n, donc de z_1, et commune à $x_1 = 0$, y_1, z_1 : c'est exclu, donc y_1 est constant, puis z_1 aussi, puisque $n \deg z_1 = n \deg y_1$. Les autres cas sont identiques.

$$\boxed{x^n + y^n = z^n \iff (x, y, z) = (\lambda g, \mu g, \nu g), \quad g \in \mathbb{C}[X],\ \lambda^n + \mu^n = \nu^n}$$

6. Le développement donne $(X^2-1)^2 + 4X^2 = X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2+1)^2$. Pour $n = 2$, il existe donc des solutions non constantes et premières entre elles, comme il existe des triplets pythagoriciens d'entiers : le résultat de la question 5 est faux pour $n = 2$. Avec $A = (X^2-1)^2$, $B = 4X^2$ et $C = -(X^2+1)^2$, deux à deux sans racine commune, les racines distinctes de ABC sont 1, -1, 0, i, $-$i, d'où $r(ABC) = 5$, et le plus grand degré vaut $4 = r(ABC) - 1$: l'inégalité de Mason-Stothers est une égalité dans cet exemple, elle ne peut donc pas être améliorée.

À retenir. Pour les entiers, l'équation de Fermat $x^n + y^n = z^n$, $n \geqslant 3$, n'a été résolue qu'au milieu des années 1990, par Andrew Wiles ; pour les polynômes, quelques lignes suffisent. La différence tient à la dérivation, qui n'a pas d'équivalent dans $\mathbb{Z}$: c'est elle qui, par le polynôme W, relie le degré d'un polynôme au nombre de ses racines distinctes.

Les huit derniers exercices sont des problèmes à traiter en autonomie ; le corrigé indique la démarche, puis la rédige.

EXERCICE 65 ⋆⋆⋆⋆

Idée. Les racines de Q sont racines de P, avec une multiplicité au moins égale, donc Q divise P, et le quotient est un polynôme borné.

Si $Q = 0$, alors $P = 0$. Sinon, soit a une racine de Q de multiplicité m, $Q = (X-a)^m Q_1$, et $P = (X-a)^r P_1$ avec $P_1(a) \neq 0$ ou $P = 0$. Si l'on avait $r < m$, alors $|P_1(z)| \leqslant |z-a|^{m-r}|Q_1(z)|$ pour $z \neq a$, et en faisant tendre z vers a, $P_1(a) = 0$: contradiction. Par la proposition 16 (i), $Q \mid P$: $P = RQ$, et $|R(z)| \leqslant 1$ hors des racines de Q, donc partout par continuité. Un polynôme non constant n'est pas borné sur $\mathbb{C}$, donc R est une constante λ avec $|\lambda| \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{les couples } (\lambda Q, Q),\ Q \in \mathbb{C}[X],\ |\lambda| \leqslant 1}$$

EXERCICE 66 ⋆⋆⋆⋆

Idée. Deux coefficients consécutifs nuls font de 0 une racine double d'une dérivée de P, qui devrait pourtant être simplement scindée.

Soit $P = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j$ de degré $n \geqslant 1$, et supposons $a_k = a_{k+1} = 0$; comme $a_n \neq 0$, on a $k+1 \leqslant n-1$.

Par l'exercice 25, appliqué k fois, $P^{(k)}$ est simplement scindé, de degré $n-k \geqslant 2$. Or $P^{(k)}(0) = k!\,a_k = 0$ et $P^{(k+1)}(0) = (k+1)!\,a_{k+1} = 0$: 0 est racine au moins double de $P^{(k)}$, ce qui est absurde.

EXERCICE 67 ⋆⋆⋆⋆

Idée. Une racine triple de $P - a$ serait une racine commune à P' et P''.

Si z est racine de multiplicité au moins 3 de $P-a$, alors $P'(z) = P''(z) = 0$, puisque $(P-a)' = P'$. Or P' est simplement scindé sur $\mathbb{R}$ (exercice 25) : z est l'une de ses racines, réelle et simple, donc $P''(z) \neq 0$. C'est absurde.

EXERCICE 68 ⋆⋆⋆⋆

Idée. On compte les racines de P' : les racines distinctes de P et de $P-1$ sont nombreuses, et $P-Q$ s'annule en chacune.

Quitte à échanger, $n=\deg P \geqslant \deg Q$. Soit $a_1,\dots,a_r$ les racines distinctes de P, de multiplicités m_i, et $b_1,\dots,b_s$ celles de $P-1$, de multiplicités n_j ; ces deux ensembles sont disjoints. Chaque a_i est racine de P' de multiplicité m_i-1, et chaque b_j de multiplicité n_j-1, puisque $(P-1)'=P'$. Donc

$$(n-r)+(n-s)=\sum(m_i-1)+\sum(n_j-1)\leqslant \deg P'=n-1,$$

soit $r+s\geqslant n+1$. Par hypothèse, Q s'annule en les a_i et $Q-1$ en les b_j : le polynôme $P-Q$, de degré au plus n, a au moins $n+1$ racines distinctes.

$$\boxed{P=Q}$$

EXERCICE 69 ⋆⋆⋆⋆

Idée. La décomposition de $\dfrac{P'}{P}$ donne une relation barycentrique entre une racine de P' et les racines de P.

On suppose P non constant, sans quoi tout complexe est racine de $P'=0$ et l'énoncé est faux. Soit $P=c\prod(X-a_k)^{m_k}$ et z une racine de P'. Si z est racine de P, c'est un barycentre trivial. Sinon, la proposition 24 donne

$$0=\frac{P'(z)}{P(z)}=\sum_k \frac{m_k}{z-a_k}=\sum_k \frac{m_k(\overline{z}-\overline{a_k})}{|z-a_k|^2}.$$

En conjuguant, $\sum \lambda_k(z-a_k)=0$ avec $\lambda_k=\dfrac{m_k}{|z-a_k|^2}>0$, soit

$$\boxed{z=\frac{\sum\lambda_k a_k}{\sum\lambda_k},\qquad \lambda_k>0}$$

C'est le théorème de Gauss-Lucas : les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe de celles de P, ce qui généralise l'exercice 13.

EXERCICE 70 ⋆⋆⋆⋆

Idée. L'inégalité triangulaire localise les racines ; pour la simplicité, on multiplie par $X-1$.

On a $P(1)=0$. Si $P(z)=0$ avec $|z|\geqslant 1$, alors $n|z|^n=|\sum_{k<n} z^k|\leqslant \sum_{k<n}|z|^k\leqslant n|z|^{n-1}$, donc $|z|\leqslant 1$, soit $|z|=1$, et toutes ces inégalités sont des égalités. Le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire impose que tous les z^k aient le même argument que $z^0=1$, donc z est réel positif : $z=1$.

Pour la simplicité, on considère

$$R=(X-1)P=nX^{n+1}-(n+1)X^n+1,\qquad R'=n(n+1)X^{n-1}(X-1).$$

Une racine multiple $z\neq 1$ de P serait racine de R et de R', donc égale à 0 ; or $R(0)=1$. Enfin, le calcul donne $R''(1)=n(n+1)$, qui est non nul : 1 est racine double de R, donc simple de P.

$$\boxed{\text{les racines autres que 1 sont de module } <1,\text{ et toutes sont simples}}$$

EXERCICE 71 ⋆⋆⋆⋆

Idée. Le polynôme Q vérifie $Q - Q' = P$, donc $f' = -Pe^{-t}$ garde un signe constant.

La somme est finie, et $Q - Q' = P$. Quitte à remplacer P par $-P$, on suppose $P > 0$ sur $\mathbb{R}$: P ne s'annule pas, donc garde un signe constant par le théorème des valeurs intermédiaires. Alors $f'(t) = (Q'(t) - Q(t))\mathrm{e}^{-t} = -P(t)\mathrm{e}^{-t} < 0$: f est strictement décroissante, et $f(t) \to 0$ en $+\infty$ par croissances comparées. Donc $f(t) > 0$ pour tout t, c'est-à-dire $Q(t) > 0$.

$$\boxed{Q \text{ n'a aucune racine réelle}}$$

EXERCICE 72 ⋆⋆⋆⋆

Idée. L'équation $F(z) = w$ revient à trouver une racine de $P - wQ$; d'Alembert-Gauss en fournit une, sauf si ce polynôme est constant, ce qui n'arrive que pour une valeur de w au plus.

On écrit $F = \dfrac{P}{Q}$ sous forme irréductible. Soit $w \in \mathbb{C}$. Si $P - wQ$ n'est pas constant, il a une racine z (théorème 11), qui n'est pas un pôle : sinon $Q(z) = 0$ et $P(z) = 0$, ce que la forme irréductible interdit (proposition 16). Donc $F(z) = w$. Si $P - w_1Q$ et $P - w_2Q$ étaient constants avec $w_1 \neq w_2$, leur différence $(w_2 - w_1)Q$ le serait, puis P aussi, et F serait constante. Il y a donc au plus une valeur de w non atteinte.

$$\boxed{F(\mathbb{C} \setminus \{\text{pôles}\}) = \mathbb{C} \text{ ou } \mathbb{C} \setminus \{w_0\}}$$

Les deux cas se produisent : un polynôme non constant atteint toutes les valeurs, alors que $\dfrac{1}{X}$ n'atteint jamais 0, et $\dfrac{X+1}{X}$ n'atteint jamais 1.