EXERCICES – CHAPITRE 13

POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

⋆ *application directe* ⋆⋆ *mise en œuvre* ⋆⋆⋆ *problème* ⋆⋆⋆⋆ *problème long, en autonomie*

Dans toute la feuille, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

L'anneau $\mathbb{K}[X]$

EXERCICE 1 ⋆

Déterminer les réels a et b tels que $X^4+6X^3+aX^2+bX+1$ soit le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

EXERCICE 2 ⋆⋆

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant chacune des équations suivantes. On commencera par comparer les degrés des deux membres.

(i) $P(X^2) = (X^2+1)\,P(X)$.

(ii) $P \circ P = P$.

(iii) $P(X+1) - P(X) = X$.

EXERCICE 3 ⋆⋆

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)^2$. On pourra écrire $P = aX^n + R$ avec $\deg R < n$.

EXERCICE 4 ⋆⋆⋆

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(0) = 0$ et $P(X^2+1) = P(X)^2+1$. On pourra introduire la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$.

Divisibilité et division euclidienne

EXERCICE 5 ⋆

Effectuer les divisions euclidiennes suivantes.

(i) $X^5 - 3X^3 + 2X + 1$ par $X^2 + X + 1$.

(ii) $2X^4 - X^3 + 3X - 1$ par $X^2 - 2X + 3$.

(iii) $X^6 - 1$ par $X^3 + X - 1$.

EXERCICE 6 ⋆

Déterminer les couples $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tels que X^2+2 divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$.

EXERCICE 7 ⋆⋆

Déterminer les complexes a tels que $X^2 - aX + 1$ divise $X^4 - X + a$.

EXERCICE 8 ⋆⋆

Soit $p \geqslant 1$ un entier.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de X^k par $X^p - 1$ est X^r, où r est le reste de la division euclidienne de k par p.
2. En déduire le reste de la division d'un polynôme $P = \sum a_k X^k$ par $X^p - 1$, puis celui de $X^{2026} + X^{13} + 1$ par $X^5 - 1$.

EXERCICE 9 ⋆⋆

1. Soit A, B, P trois polynômes, avec P non constant. Montrer que si $A \circ P$ divise $B \circ P$, alors A divise B.
2. Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que P divise Q si et seulement si $P(X^m)$ divise $Q(X^m)$.

Fonctions polynomiales et racines

EXERCICE 10 ⋆

À l'aide du schéma de Horner, calculer $P(3)$ pour $P = X^5 - 4X^4 + 2X^3 + X - 7$, et en déduire le quotient de la division de P par $X - 3$.

EXERCICE 11 ⋆

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme $X^2 + X + 1$ divise-t-il $X^{3n+8} + X^{3n+4} + X^{3n}$ dans $\mathbb{C}[X]$?
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $X^2 - X$ divise $P(X^2 + 3X)$ si et seulement si $X^2 - 2X$ divise $P(X^2)$.

EXERCICE 12 ⋆⋆

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P - X$ divise $P \circ P - X$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z^2 + 3z + 1)^2 + 3z^2 + 8z + 4 = 0$.

EXERCICE 13 ⋆

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré 3, possédant au moins deux racines dans $\mathbb{K}$, comptées avec leur multiplicité. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{K}$.
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 2$. Montrer que la moyenne des racines de P' est égale à celle des racines de P, les racines étant comptées avec leur multiplicité.

EXERCICE 14 ⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Utiliser les relations entre coefficients et racines de $X^n - 1$ pour retrouver $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$, puis pour calculer $\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$ et $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^2$.

EXERCICE 15 ⋆⋆

Sommes de Newton.

1. Exprimer $x^2+y^2+z^2$ et $x^3+y^3+z^3$ en fonction de $\sigma_1 = x+y+z$, $\sigma_2 = xy+xz+yz$ et $\sigma_3 = xyz$.
2. Résoudre les systèmes suivants, d'inconnues x, y, z dans $\mathbb{C}$ (dans $\mathbb{C}^*$ pour le premier) :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1 \\ xyz=-4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2+z^2=14 \\ x^3+y^3+z^3=20 \end{cases}$$

EXERCICE 16 ⋆⋆

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants, à l'aide de l'information donnée.

(i) $X^3-8X^2+23X-28$, sachant que la somme de deux de ses racines est égale à la troisième.

(ii) $X^4+12X-5$, sachant qu'il possède deux racines dont la somme vaut 2.

EXERCICE 17 ⋆⋆⋆

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $P = X^3Q+X^2+X+1$. On note $\xi_1, \dots, \xi_n$ les racines complexes de P, comptées avec leur multiplicité.

1. Montrer que 0 n'est pas racine de P.
2. Calculer $\Sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\xi_k}$ et $\Sigma_2 = \sum_{1\leqslant k<l\leqslant n} \frac{1}{\xi_k \xi_l}$. On pourra considérer le polynôme $X^n P(\frac{1}{X})$.
3. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\xi_k^2}$, et en déduire que P n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 18 ⋆⋆⋆

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)\,P(X+1)$. On examinera le coefficient dominant, puis on démontrera que si λ est une racine de P, alors λ^2 et $(\lambda-1)^2$ en sont aussi, et que $|\lambda|$ vaut 0 ou 1.

Dérivation

EXERCICE 19 ⋆

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(2)=1$, $P'(2)=2$, $P''(2)=4$ et $P^{(k)}(2)=0$ pour tout $k \geqslant 3$.

EXERCICE 20 ⋆

Soit $a \neq b$ deux réels et $P \in \mathbb{R}[X]$.

1. Exprimer à l'aide de $P(a)$ et $P(b)$ le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.
2. Exprimer à l'aide de $P(a)$ et $P'(a)$ le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$.
3. Soit $n \geqslant 2$. Calculer le reste de la division euclidienne de X^n+2X-2 par $(X-1)^2$.

EXERCICE 21 ⋆⋆

Dans chacun des cas suivants, déterminer le reste de la division euclidienne de P par Q, pour $n \in \mathbb{N}$.

(i) $P = X^{100}$ et $Q = (X-1)^3(X+1)$.

(ii) $P = X^{2n}$ et $Q = (X^2+1)^2$.

(iii) $P = (X+1)^{2n+1} - X^{2n+1}$ et $Q = X^2 + X + 1$.

EXERCICE 22 ⋆⋆

1. Soit $n \geqslant 3$ et $P = X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$. Déterminer la multiplicité de 1 dans P.
2. Soit $n \geqslant 1$. Déterminer les réels a et b tels que 1 soit racine au moins double de $aX^{n+1} + bX^n + 1$.
3. Montrer par deux méthodes différentes que X^2 divise $(X+1)^n - nX - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ le polynôme $(X^2+X+1)^2$ divise-t-il $(X+1)^n - X^n - 1$?

EXERCICE 23 ⋆⋆

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = P'P''$.

EXERCICE 24 ⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.

1. Montrer que P_n n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$. On pourra exprimer $P_n - P_n'$.
2. Montrer que P_n n'a aucune racine réelle si n est pair, et exactement une si n est impair. On raisonnera par récurrence, en étudiant les variations de la fonction associée.

EXERCICE 25 ⋆⋆

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 2$.

1. On suppose P scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer, à l'aide du théorème de Rolle, que P' est scindé sur $\mathbb{R}$, et que toute racine multiple de P' est racine de P.
2. On suppose P scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. Montrer que P' est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, puis que $P^2 + 1$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.
3. Si $P \in \mathbb{C}[X]$ n'a que des racines simples, en est-il de même de P' ? On pourra considérer $X^3 - 1$.

EXERCICE 26 ⋆⋆⋆

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul tel que P' divise P.

1. Montrer que les racines de P' sont des racines de P.
2. Montrer que P ne peut pas avoir deux racines distinctes. On pourra comparer les multiplicités d'une racine dans P et dans P'.
3. Déterminer tous les polynômes P possibles.

EXERCICE 27 ⋆⋆⋆

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ non constant et $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose Q scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. En appliquant le théorème de Rolle à la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{ax}Q(x)$ et en étudiant f au voisinage de $\pm\infty$, montrer que $Q' + aQ$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que le résultat subsiste si Q est seulement supposé scindé sur $\mathbb{R}$, sans hypothèse sur les multiplicités.
3. L'analogue de la question 1 est-il vrai pour $a \in \mathbb{C}$? On pourra chercher un complexe a tel que $Q' + aQ$ ait une racine double, pour $Q = X^2 - 1$.

Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

EXERCICE 28 ⋆

1. Calculer par l'algorithme d'Euclide le PGCD des polynômes $X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 4$ et $X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2$.
2. Soit $n \geqslant 1$. Déterminer le PGCD de $X^n - 1$ et de $(X-1)^n$.

EXERCICE 29 ⋆⋆

On pose $A = X^4 - X^3 - X^2 - X - 2$ et $B = X^3 - 7X - 6$. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $(U, V) \in \mathbb{R}[X]^2$.

(i) $AU + BV = 1$.

(ii) $AU + BV = X^2 + 4X + 3$.

(iii) $(X^2 + 2X + 3)\,U + (X^2 - X - 3)\,V = 0$.

(iv) $X^2U + (2X + 1)\,V = X + 2$.

EXERCICE 30 ⋆⋆

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n = X^n - 1$.

1. Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $P_n \wedge P_m = P_{n\wedge m}$. On pourra s'inspirer de l'exercice 56 de la feuille du chapitre 12.
2. En déduire que a divise b si et seulement si P_a divise P_b.
3. Soit $p, q \geqslant 2$ premiers entre eux. Montrer que $(X^p - 1)(X^q - 1)$ divise $(X - 1)(X^{pq} - 1)$.

EXERCICE 31 ⋆⋆

Soit A et B deux polynômes non constants. Montrer que A et B ont un diviseur commun non constant si et seulement s'il existe deux polynômes P et Q non nuls, avec $\deg P < \deg B$ et $\deg Q < \deg A$, tels que $AP = BQ$.

EXERCICE 32 ⋆⋆⋆

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe un unique couple $(U, V) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $(1-X)^pU + X^pV = 1$ et $\deg U < p$.
2. Que peut-on dire de $\deg V$? En déduire que $V(X) = U(1 - X)$.
3. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $(1 - X)U' - pU = aX^{p-1}$, et en déduire les coefficients de U.

Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$

EXERCICE 33 ⋆

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer que P n'a que des racines simples si et seulement si $P \wedge P' = 1$.
2. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes suivants :

(i) $X^4 - 4$; (ii) $X^6 + 27$; (iii) $(X^2 - X + 1)^2 + 1$; (iv) $X^8 - 1$.

EXERCICE 34 ⋆⋆

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants.

(i) $X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$, que l'on écrira comme une somme de deux carrés.

(ii) $X^9 + X^6 + X^3 + 1$, en posant $Y = X^3$.

(iii) $X^{10} + X^5 + 1$, en remarquant que $(X^5 - 1)(X^{10} + X^5 + 1) = X^{15} - 1$.

(iv) $X^5 - 10X^4 + 25X^3 - 25X^2 + 10X - 1$, dont on cherchera une racine multiple évidente.

EXERCICE 35 ⋆⋆

On considère le polynôme $P = (1 - X^2)^3 + 8X^3$.

1. Déterminer les solutions complexes de l'équation $\left(\frac{1-z^2}{2z}\right)^3 = -1$.
2. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

EXERCICE 36 ⋆⋆

Soit $a \in]0, \pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser $X^{2n} - 2\cos(na)X^n + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

EXERCICE 37 ⋆⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation $(z+1)^n = \mathrm{e}^{2ina}$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
2. En déduire une factorisation du polynôme $(X+1)^n - \mathrm{e}^{2ina}$.
3. En évaluant en 0, en déduire la valeur du produit $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$.

Interpolation de Lagrange

EXERCICE 38 ⋆

Déterminer le polynôme P de degré au plus 2 tel que $P(-1) = 6$, $P(1) = 2$ et $P(2) = 3$, puis tous les polynômes $Q \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant ces trois conditions.

EXERCICE 39 ⋆⋆

Soit $z_1, \dots, z_s$ des complexes deux à deux distincts, et $L_1, \dots, L_s$ les polynômes de Lagrange associés, de degré $s-1$, tels que $L_i(z_j)$ vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon.

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré au plus $s-1$. Simplifier $\sum_{k=1}^{s} P(z_k)L_k$.
2. En déduire une expression simple de $\sum_{k=1}^{s} z_k^r L_k$ pour tout entier $r \in [\![0\,;s]\!]$, et la valeur de $\sum_{k=1}^{s} L_k$.
3. Montrer que le reste de la division euclidienne d'un polynôme A par $(X-z_1)\cdots(X-z_s)$ est $\sum_{k=1}^{s} A(z_k)L_k$.

Fractions rationnelles

EXERCICE 40 ⋆

1. Montrer qu'il n'existe aucune fraction rationnelle $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F^2 = X$, ni aucune telle que $F^2 = \frac{1}{X}$.
2. Existe-t-il $R \in \mathbb{C}(X)$ telle que $R^2 = \frac{X^2}{(X+1)(X+2)}$?

EXERCICE 41 ⋆⋆

Déterminer les fractions rationnelles $F \in \mathbb{C}(X)$ telles que $F(X+1) = F(X)$. On pourra s'intéresser aux pôles de F, puis à la partie entière.

EXERCICE 42 ⋆⋆

Soit p et q deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Déterminer les zéros et les pôles de la fraction $\frac{X^p-1}{X^q-1}$, avec leurs multiplicités. On pourra utiliser l'exercice 30.

EXERCICE 43 ⋆⋆

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{C}(X)$ non nulle, on pose $\mu_z(F) = \mu_z(P) - \mu_z(Q)$, où $\mu_z(P)$ est la multiplicité de z dans P. Montrer que $\mu_z(F)$ ne dépend pas du couple (P,Q) choisi pour écrire F.
2. Calculer $\mu_0(F')$ en fonction de $\mu_0(F)$ lorsque $\mu_0(F) \neq 0$. En déduire qu'il n'existe aucune fraction rationnelle $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F' = \frac{1}{X}$.

EXERCICE 44 ⋆⋆

Soit $n \geqslant 2$ et $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$.

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\omega X) = P(X)$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = Q(X^n)$.
2. Mettre sous forme irréductible la fraction $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{X+\omega^k}{X-\omega^k}$.

Décomposition en éléments simples

EXERCICE 45 ⋆

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes, puis, pour la quatrième, sur $\mathbb{C}$.

$$\text{(i) } \frac{1}{(X+1)^2(3-X)} \qquad \text{(ii) } \frac{1}{(X^2-1)(X+1)^2} \qquad \text{(iii) } \frac{7X^2+4X-4}{X^4-4X^2}$$

$$\text{(iv) } \frac{X^4+1}{X^4-1} \qquad \text{(v) } \frac{X^3-1}{(X-2)^2} \qquad \text{(vi) } \frac{3X^4+X^3+4X^2-X-3}{(X+1)(X^2+1)^2}$$

EXERCICE 46 ⋆⋆

Soit $n \geqslant 2$. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ les fractions rationnelles suivantes.

$$\text{(i) } \frac{1}{X(X-1)\cdots(X-n)} \qquad \text{(ii) } \frac{X^{n-1}}{X^n-1} \qquad \text{(iii) } \frac{1}{X^n-1} \qquad \text{(iv) } \frac{1}{(X-1)(X^n-1)}$$

EXERCICE 47 ⋆⋆

Soit $A = X^2+1$ et $B = (X-1)^2$. Décomposer la fraction $\frac{1}{AB}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$, et en déduire une relation de Bézout entre A et B.

EXERCICE 48 ⋆⋆

1. Donner un développement limité à l'ordre 7 en 0 de $x \mapsto \frac{x^3+1}{x^2+1}$.
2. En déduire la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de $\frac{X^3+1}{X^8(X^2+1)}$.

EXERCICE 49 ⋆

1. Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ sur $]-1,1[$, et de $x \mapsto \frac{x}{x^3-7x+6}$ sur $]2,+\infty[$.
2. Calculer la dérivée n-ième de $x \mapsto \frac{1}{x^2-3x+2}$ sur $]2,+\infty[$.

EXERCICE 50 ⋆⋆

Déterminer les limites des suites de terme général

$$\text{(i) } \sum_{k=1}^{n} \frac{k+3}{k^3+3k^2+2k}; \qquad \text{(ii) } \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k^4+k^2+1}; \qquad \text{(iii) } \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2+k-6}.$$

Pour (ii), on factorisera k^4+k^2+1 comme une différence de deux carrés.

EXERCICE 51 ⋆⋆

Soit $n \geqslant 2$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n, dont les racines $x_1, \ldots, x_n$ sont simples et non nulles. En décomposant en éléments simples des fractions bien choisies, montrer que

$$\text{(i) } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(x_k)} = 0; \qquad \text{(ii) } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k P'(x_k)} = -\frac{1}{P(0)}; \qquad \text{(iii) } \sum_{k=1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0.$$

EXERCICE 52 ⋆⋆

1. Montrer qu'il n'existe aucun polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\frac{P'}{P} = \frac{X^2+1}{X^3-1}$.
2. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\frac{P'}{P} = \frac{2}{X-1} + \frac{3}{X}$.

EXERCICE 53 ⋆⋆⋆

Polynômes de Tchebychev.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ pour tout réel θ. On pourra établir une relation entre T_{n+2}, T_{n+1} et T_n.
2. Pour $n \geqslant 1$, déterminer le degré, le coefficient dominant et les racines de T_n.
3. Décomposer $\frac{1}{T_n}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

Exercices de synthèse

EXERCICE 54 ⋆⋆

Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

1. Le degré de $P+Q$ est le plus grand des degrés de P et de Q.
2. Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair possède au moins une racine réelle.
3. Un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ sans racine réelle est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
4. Si a est racine double de P, alors a est racine simple de P'.
5. Deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sans racine commune sont premiers entre eux.
6. Le reste de la division euclidienne de P par X^2-1 est $P(1)X + P(-1)$.
7. Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ possède exactement n racines distinctes.
8. La partie entière de $\frac{X^3+1}{X^2+1}$ est X.
9. Si a est un pôle simple de $F = \frac{P}{Q}$, sous forme irréductible, le coefficient de $\frac{1}{X-a}$ dans la décomposition de F est $\frac{P(a)}{Q'(a)}$.
10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $X^n - 1$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

EXERCICE 55 ⋆⋆

Coefficients binomiaux impairs. Pour deux polynômes A et B à coefficients entiers, on note $A \equiv B$ [2] lorsque tous les coefficients de $A - B$ sont pairs, c'est-à-dire lorsque $A - B = 2E$, où E est un polynôme à coefficients entiers.

1. Soit A, B, C, D des polynômes à coefficients entiers tels que $A \equiv B$ [2] et $C \equiv D$ [2]. Montrer que $AC \equiv BD$ [2].
2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $(1+X)^{2^k} \equiv 1 + X^{2^k}$ [2].
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, dont l'écriture en base 2 (exercice 7 de la feuille du chapitre 12) est
$$n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_s}, \qquad k_1 > k_2 > \cdots > k_s \geqslant 0.$$
Montrer que
$$(1+X)^n \equiv \prod_{i=1}^{s} (1 + X^{2^{k_i}}) \text{ [2]},$$
puis que le développement de ce produit est une somme de 2^s monômes X^e d'exposants deux à deux distincts, tous de coefficient 1.

4. En déduire que le nombre d'entiers $k \in [\![0\,;n]\!]$ tels que $\binom{n}{k}$ soit impair est égal à 2^s. C'est en particulier une puissance de 2.
5. Combien la ligne d'indice 2026 du triangle de Pascal contient-elle de coefficients impairs ? Pour quels entiers $n \in \mathbb{N}^*$ les coefficients $\binom{n}{k}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, sont-ils tous impairs ?

EXERCICE 56 ⋆⋆

Un point du cercle loin de tous les autres. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Γ un cercle du plan de centre O et de rayon $R > 0$, et $A_1, \dots, A_n$ des points du plan, non nécessairement distincts. On veut montrer qu'il existe un point $M \in \Gamma$ tel que

$$MA_1 \times MA_2 \times \cdots \times MA_n \geqslant R^n.$$

On identifie le plan à $\mathbb{C}$, le point O ayant pour affixe 0, et l'on note a_k l'affixe de A_k. On pose

$$P = \prod_{k=1}^{n}(X - a_k) = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_1X + c_0, \qquad N = n+1 \qquad \text{et} \qquad \omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/N}.$$

1. Soit $m \in \mathbb{Z}$. Calculer $\sum_{j=0}^{N-1} \omega^{jm}$, en distinguant selon que N divise m ou non.
2. Montrer que $\sum_{j=0}^{N-1} \omega^{-jn} P(R\omega^j) = NR^n$.
3. En déduire qu'il existe $j \in [\![0\,;N-1]\!]$ tel que $|P(R\omega^j)| \geqslant R^n$, et conclure.
4. Montrer que la constante R^n ne peut pas être remplacée par un nombre strictement plus grand. Lorsque $A_1, \dots, A_n$ sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans Γ, déterminer la plus grande et la plus petite valeur du produit $MA_1 \times \cdots \times MA_n$ lorsque M parcourt Γ.

EXERCICE 57 ⋆⋆⋆

Méthode de Cardan. Soient $P(X) = X^3 + pX + q \in \mathbb{C}[X]$ et α_1, α_2, α_3 les racines de $P(X)$. On note $j = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$.

1. Montrer qu'il existe un unique couple $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\alpha_1 = u + v$, $\alpha_2 = ju + j^2v$ et $\alpha_3 = j^2u + jv$.
2. En calculant $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ et $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1$, déterminer uv et $u^3 + v^3$.
3. En déduire que u^3 et v^3 sont racines de $Q(X) = X^2 + qX - \frac{p^3}{27}$.
4. Donner une méthode pour calculer les racines de $P(X)$.
5. Donner une méthode pour déterminer les racines d'un polynôme de degré 3.
6. À quelle condition le polynôme $X^3 + pX + q$ a-t-il une racine multiple ?
7. On suppose p et q dans $\mathbb{R}$. À quelle condition sur p et q les racines de P sont-elles réelles ?

EXERCICE 58 ⋆⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P_n(X) = (X + \mathrm{i})^{2n+1} - (X - \mathrm{i})^{2n+1}$.

1. Déterminer le degré de $P_n(X)$, puis son terme dominant.
2. Factoriser $P_n(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$. On utilisera la fonction cotan : $x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}$.
3. (a) Calculer les quantités $\sum_{k=1}^{2n} \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ et $\sum_{k=1}^{2n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.

   (b) Montrer alors : $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$.
4. Montrer que $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin x < x < \tan x$, puis $\operatorname{cotan}^2 x < \frac{1}{x^2} < \operatorname{cotan}^2 x + 1$.
5. En déduire que la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge vers $\frac{\pi^2}{6}$.

EXERCICE 59 ⋆⋆⋆

Polynômes de Legendre. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. En considérant les polynômes $\left[(X^2-1)^n\right]^{(k)}$, montrer que le polynôme $L_n(X) = \left[(X^2-1)^n\right]^{(n)}$ est scindé à racines simples dans $]-1,1[$.
2. Montrer que pour tout polynôme $Q(X)$ tel que $\deg(Q) < n$, $\int_{-1}^{1} Q(t) \cdot L_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
3. Retrouver le fait que chaque polynôme $L_n(X)$ est scindé à racines simples dans $]-1,1[$.

EXERCICE 60 ⋆⋆⋆

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré $n \geqslant 1$. On note $Q = X(X-1)\cdots(X-n)$.

1. Montrer $\frac{P}{Q} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{n!}\binom{n}{k} P(k)\,\frac{1}{X-k}$.
2. En déduire $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}P(k) = n!$.
3. En déduire $\max\left\{|P(k)| \;\middle|\; k \in [\![0\,;n]\!]\right\} \geqslant \frac{n!}{2^n}$.

EXERCICE 61 ⋆⋆⋆

1. Soit $S = \{A^2 + B^2 \mid A, B \in \mathbb{R}[X]\}$. Montrer que S est stable par produit.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer l'équivalence $P \in S \iff \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$.

EXERCICE 62 ⋆⋆⋆

On dit qu'un polynôme est *simplement scindé* s'il est scindé à racines simples. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ simplement scindé. On note $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ ses racines et $b_1 < \cdots < b_{n-1}$ les racines de P'.

1. En décomposant en éléments simples $\frac{P'}{P}$ de deux façons différentes, montrer

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!], \qquad n\prod_{j=1}^{n-1}(a_i - b_j) = \prod_{\substack{k\in[\![1\,;n]\!]\\ k\neq i}}(a_i - a_k).$$

2. En déduire $\forall i \in [\![1\,;n-1]\!]$, $a_i + \frac{a_{i+1}-a_i}{n} \leqslant b_i \leqslant a_{i+1} - \frac{a_{i+1}-a_i}{n}$.

EXERCICE 63 ⋆⋆⋆

Remplir une boîte avec des briques. Soit $a \leqslant b \leqslant c$ et $A \leqslant B \leqslant C$ des entiers naturels non nuls. On appelle *brique* une partie de $\mathbb{N}^3$ de la forme $[\![x\,;x']\!] \times [\![y\,;y']\!] \times [\![z\,;z']\!]$, où $x \leqslant x'$, $y \leqslant y'$ et $z \leqslant z'$ sont des entiers naturels ; ses *dimensions* sont les trois entiers $x'-x+1$, $y'-y+1$ et $z'-z+1$, et l'on dit qu'elle est de *taille* (a,b,c) si ses dimensions, rangées dans l'ordre croissant, sont a, b et c. Le pavé $\mathcal{P} = [\![1\,;A]\!] \times [\![1\,;B]\!] \times [\![1\,;C]\!]$ est dit (a,b,c)-*pavable* s'il est la réunion de briques de taille (a,b,c) deux à deux disjointes. Pour toute partie finie E de $\mathbb{N}^3$, on définit le *poids*

$$w(E) = (X-1)^3 \sum_{(i,j,k)\in E} X^{i+j+k} \in \mathbb{R}[X].$$

1. Montrer que le pavé de dimensions 5, 6, 6 n'est pas $(1,2,4)$-pavable.
2. Calculer le poids d'une brique $[\![x\,;x']\!] \times [\![y\,;y']\!] \times [\![z\,;z']\!]$ en fonction de x, y, z et de ses dimensions. En déduire $w(\mathcal{P})$.
3. Montrer que si E et F sont deux parties finies disjointes de $\mathbb{N}^3$, alors $w(E \cup F) = w(E) + w(F)$. En déduire que si $\mathcal{P}$ est (a,b,c)-pavable, alors

$$(X^a-1)(X^b-1)(X^c-1) \quad \text{divise} \quad (X^A-1)(X^B-1)(X^C-1).$$

4. Montrer que le cube de dimensions 10, 10, 10 n'est pas $(1,2,4)$-pavable, bien que son volume soit un multiple de 8.
5. Montrer que le pavé de dimensions 7, 8, 9 n'est pas $(1,2,4)$-pavable.
6. Pour $d \in \mathbb{N}^*$, on note $\zeta_d = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/d}$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que ζ_d est racine de $X^m - 1$ si et seulement si d divise m, et qu'elle en est alors racine simple.
7. *Théorème de De Bruijn (1969).* On suppose que a divise b et que b divise c. Montrer que $\mathcal{P}$ est (a,b,c)-pavable si et seulement si, quitte à permuter A, B et C, l'entier a divise A, b divise B et c divise C. On comparera les multiplicités de ζ_c, ζ_b et ζ_a dans les deux polynômes de la question 3.

EXERCICE 64 ⋆⋆⋆

Théorème de Mason-Stothers et équation de Fermat pour les polynômes. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul, on note $r(P)$ le nombre de racines complexes *distinctes* de P. Soit A, B, C trois polynômes de $\mathbb{C}[X]$, premiers entre eux dans leur ensemble, tels que

$$A + B + C = 0 \qquad \text{et} \qquad ABC \text{ n'est pas constant.}$$

On veut montrer que $\max(\deg A, \deg B, \deg C) \leqslant r(ABC) - 1$.

1. Montrer que A, B et C sont non nuls et deux à deux premiers entre eux.
2. On pose $W = AB' - A'B$. Montrer que $W = BC' - B'C = CA' - C'A$, puis que $W \neq 0$.
3. Soit z une racine de A, de multiplicité m. Montrer que z est racine de W de multiplicité au moins $m-1$. En déduire que $\deg(ABC) - r(ABC) \leqslant \deg W$.
4. Conclure, en majorant de trois façons le degré de W.
5. *Application.* Soit $n \geqslant 3$. Déterminer tous les triplets $(x,y,z) \in \mathbb{C}[X]^3$ tels que $x^n + y^n = z^n$. On traitera d'abord le cas où x, y, z sont non nuls et premiers entre eux dans leur ensemble.
6. Vérifier que $(X^2-1)^2 + (2X)^2 = (X^2+1)^2$. Que montre cette égalité pour $n = 2$, et pour l'inégalité de Mason-Stothers ?

Les huit derniers exercices sont des problèmes à traiter en autonomie : l'énoncé fixe le but, et c'est à vous de trouver le chemin. Un polynôme est dit *simplement scindé* s'il est scindé à racines simples.

EXERCICE 65 ⋆⋆⋆⋆

Déterminer les $(P,Q) \in \mathbb{C}[X]^2$ tels que $\forall z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \leqslant |Q(z)|$.

EXERCICE 66 ⋆⋆⋆⋆

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ simplement scindé. Montrer que P n'a pas deux coefficients consécutifs nuls.

EXERCICE 67 ⋆⋆⋆⋆

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant, simplement scindé. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{C}$, les racines complexes de $P - a$ sont de multiplicité au plus 2.

EXERCICE 68 ⋆⋆⋆⋆

Soient P et Q deux polynômes non constants dans $\mathbb{C}[X]$ tels que l'ensemble des racines de $P(X)$ (resp. de $P(X) - 1$) soit égal à l'ensemble des racines de $Q(X)$ (resp. de $Q(X) - 1$). Montrer que $P(X) = Q(X)$.

EXERCICE 69 ⋆⋆⋆⋆

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que les racines de $P'(X)$ sont des barycentres à coefficients positifs ou nuls de racines de $P(X)$.

EXERCICE 70 ⋆⋆⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X) = nX^n - X^{n-1} - \cdots - X - 1$. Montrer qu'à part 1, les racines de P sont de module < 1, puis que P est à racines simples.

EXERCICE 71 ⋆⋆⋆⋆

Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme n'admettant aucune racine réelle. Montrer que le polynôme $Q(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P^{(n)}(X)$ n'admet aucune racine réelle. On pourra poser la fonction $f : t \mapsto Q(t) \cdot \mathrm{e}^{-t}$.

EXERCICE 72 ⋆⋆⋆⋆

Soit $F(X)$ une fraction rationnelle non constante dans $\mathbb{C}(X)$. Montrer que l'ensemble image de la fonction rationnelle $z \mapsto F(z)$ est soit $\mathbb{C}$ tout entier, soit $\mathbb{C}$ privé d'un point.