CORRIGÉ – CHAPITRE 14

ESPACES VECTORIELS ET APPLICATIONS LINÉAIRES

⋆ *application directe* ⋆⋆ *mise en œuvre* ⋆⋆⋆ *problème* ⋆⋆⋆⋆ *problème long, en autonomie*

Les renvois « proposition n », « théorème n » désignent les énoncés du chapitre 14 du cours.

Espaces vectoriels

EXERCICE 1 ⋆

(i) L'axiome $1 \cdot x = x$ est en défaut : $1 \cdot (0,1) = (0,0) \neq (0,1)$.

Non : ce n'est pas un espace vectoriel.

(ii) L'addition est une loi de groupe abélien sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, produit des groupes $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ et $(\mathbb{R}, +)$; le neutre est $(1,0)$ et l'opposé de (x,y) est $(\frac{1}{x}, -y)$. Les quatre axiomes se vérifient grâce aux règles de calcul sur les puissances réelles (chapitre 5) :

$$(\lambda+\mu)\cdot(x,y) = (x^\lambda x^\mu, \lambda y + \mu y), \qquad \lambda\cdot\big((x,y)+(x',y')\big) = (x^\lambda x'^\lambda, \lambda y + \lambda y'),$$

$$\lambda\cdot(\mu\cdot(x,y)) = ((x^\mu)^\lambda, \lambda\mu y) = (\lambda\mu)\cdot(x,y), \qquad 1\cdot(x,y) = (x,y).$$

Oui : c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

À retenir. L'application $(x,y) \mapsto (\ln x, y)$ transforme ces lois en les lois usuelles de $\mathbb{R}^2$: c'est un isomorphisme, et l'on aurait pu tout transporter, comme dans l'exercice suivant.

EXERCICE 2 ⋆⋆

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to]-1,1[$ une bijection, par exemple $\varphi = \text{th}$ (chapitre 5), ou $\varphi(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$. On note $\Phi(x_1,\dots,x_n) = (\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_n))$, bijection de $\mathbb{R}^n$ sur $]-1,1[^n$, et l'on pose, pour a, $b \in]-1,1[^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$a \oplus b = \Phi\big(\Phi^{-1}(a) + \Phi^{-1}(b)\big), \qquad \lambda \odot a = \Phi\big(\lambda\,\Phi^{-1}(a)\big).$$

Chaque axiome de $(]-1,1[^n, \oplus, \odot)$ se déduit de l'axiome correspondant dans $\mathbb{R}^n$ en appliquant Φ ; par exemple

$$\lambda \odot (a \oplus b) = \Phi\big(\lambda\Phi^{-1}(a) + \lambda\Phi^{-1}(b)\big) = (\lambda\odot a)\oplus(\lambda\odot b).$$

On transporte la structure de $\mathbb{R}^n$ par la bijection Φ; le vecteur nul est $\Phi(0) = 0$.

À retenir. Une structure d'espace vectoriel ne dépend pas de la nature des objets : toute bijection avec un espace vectoriel permet d'en construire une, et l'application Φ est alors un isomorphisme.

EXERCICE 3 ⋆

1. Toute combinaison de $(1,2,0)$ et $(2,1,0)$ a une troisième coordonnée nulle : $(3,3,1)$ n'en est pas une. Avec $(1,2,0)$ et $(1,1,1)$, l'égalité $a(1,2,0)+b(1,1,1)=(3,3,1)$ impose $b=1$ (troisième coordonnée), puis $a=2$ (première), et la deuxième donne $5\neq 3$.

$$\boxed{\text{Non dans les deux cas.}}$$

2. Les deux premières coordonnées de $a(1,3,2)+b(1,-1,4)=(3,1,m)$ donnent $a+b=3$ et $3a-b=1$, d'où $a=1$ et $b=2$; la troisième impose alors $m=2a+4b$.

$$\boxed{m=10,\ \text{avec } (3,1,10)=(1,3,2)+2(1,-1,4)}$$

3. Le coefficient de X^3 impose $a=2$ dans $a(8X^3-5X^2+1)+b(X^2+7X-2)$, puis celui de X impose $b=3$, et l'on vérifie les deux autres coefficients.

$$\boxed{16X^3-7X^2+21X-4=2(8X^3-5X^2+1)+3(X^2+7X-2)}$$

4. Si $\cos(2x)=a\cos x+b\sin x$ pour tout x, l'évaluation en 0 et en π donne $1=a$ et $1=-a$: c'est impossible. Si $\sin(2x)=a\cos x+b\sin x$, l'évaluation en 0 et en $\dfrac{\pi}{2}$ donne $a=b=0$, et $\sin(2x)$ serait nulle.

$$\boxed{\text{Non dans les deux cas.}}$$

5. Les combinaisons $\lambda+\mu(-1)^n$ sont 2-périodiques ; réciproquement, une suite 2-périodique (u_n) s'écrit ainsi avec $\lambda=\dfrac{u_0+u_1}{2}$ et $\mu=\dfrac{u_0-u_1}{2}$.

$$\boxed{\text{Ce sont exactement les suites 2-périodiques.}}$$

EXERCICE 4 ⋆⋆

Supposons $\operatorname{Arctan} x=a\,\mathrm{e}^{x^2}+b\,\mathrm{e}^{-x}+c\sin x$ pour tout réel x. En divisant par e^{x^2} et en faisant tendre x vers $+\infty$, tous les termes tendent vers 0 sauf a : donc $a=0$. En divisant ensuite par e^{-x} et en faisant tendre x vers $-\infty$, on obtient $b=0$, puisque Arctan et sin sont bornées. Il resterait $\operatorname{Arctan}=c\sin$, ce que dément l'évaluation en π : $\operatorname{Arctan}\pi\neq 0=c\sin\pi$.

$$\boxed{\text{Non.}}$$

À retenir. Pour prouver qu'une fonction n'est pas combinaison de fonctions données, on compare les comportements à l'infini, du plus rapide au plus lent, comme pour la liberté des exponentielles dans le cours.

Sous-espaces vectoriels

EXERCICE 5 ⋆

(i) Oui : c'est la droite $\mathbb{R}(1,1)$. **(ii)** Non : $(1,1)$ y est, mais pas $-(1,1)$. **(iii)** Non : $(1,1)$ et $(1,-1)$ y sont, mais pas leur somme $(2,0)$. **(iv)** Non : $(1,0)$ y est, mais pas $-(1,0)$. **(v)** Non : il ne contient pas $(0,0)$. **(vi)** Oui : c'est $\{(0,0)\}$. **(vii)** Non : il ne contient pas 0. **(viii)** Oui : c'est la droite $\mathbb{R}(4,2,1)$. **(ix)** Oui : c'est la droite $\mathbb{R}(1,2,3)$. **(x)** Non : $(1,1,0)$ et $(0,0,1)$ y sont, mais pas leur somme.

$$\boxed{\text{Sous-espaces : (i), (vi), (viii), (ix).}}$$

EXERCICE 6 ⋆

Les parties (i) et (iii) sont les noyaux des formes linéaires $x \mapsto \sum x_i$ et $x \mapsto \sum 2^i x_i$: ce sont des sous-espaces (des hyperplans). La partie (ii) ne contient pas 0. La partie (iv) contient e_1 et e_2, mais pas $e_1 + e_2$, puisque $n \geqslant 2$. La partie (v) contient e_1 mais pas $\frac{1}{2}e_1$.

Sous-espaces : (i) et (iii).

EXERCICE 7 ⋆⋆

(i) Non : (n) est croissante, $(-n)$ ne l'est pas. **(ii)** Non : (n^2) et $(-2n)$ sont monotones, leur somme (n^2-2n), qui vaut $0, -1, 0, 3, \ldots$, ne l'est pas. **(iii)** Oui, par l'inégalité triangulaire. **(iv)** Non : la suite nulle converge. **(v)** Oui, par les opérations sur les limites (chapitre 7). **(vi)** Non : la suite nulle n'y est pas. **(vii)** Oui : si u est constante à partir du rang n_1 et v à partir du rang n_2, $\lambda u + v$ l'est à partir de $\max(n_1, n_2)$. **(viii)** Oui. **(ix)** Oui : si u est p-périodique et v est q-périodique, $\lambda u + v$ est pq-périodique. **(x)** Oui : c'est $\mathrm{Vect}((1)_n, (n)_n)$. **(xi)** Oui : c'est la droite $\mathrm{Vect}((3^n)_n)$, puisque $u_n = u_0 3^n$.

Sous-espaces : (iii), (v), (vii), (viii), (ix), (x), (xi).

Piège. Pour (ix), la période de $\lambda u + v$ n'est pas celle de u : c'est un multiple commun des deux périodes.

EXERCICE 8 ⋆⋆

(i) Les polynômes de degré n ne forment pas un sous-espace, puisque 0 n'en fait pas partie. Les polynômes qui s'annulent en 0 et en 1 forment le sous-espace $X(X-1)\mathbb{R}[X]$, intersection des noyaux de deux évaluations. Les polynômes ayant au moins deux racines ne forment pas un sous-espace : $X^2 - 1$ et $2 - X^2$ en ont deux, mais leur somme 1 n'en a aucune.

(ii) Les multiples de P forment un sous-espace, image de $Q \mapsto PQ$. Les diviseurs de P n'en forment pas si $P \neq 0$, car 0 ne divise pas P ; si $P = 0$, tout polynôme divise P, et l'on obtient $\mathbb{R}[X]$.

(iii) C'est le noyau de l'application linéaire $P \mapsto P(X+2) - XP'(X-4)$, donc un sous-espace. Si P est non nul de degré d et de coefficient dominant a, les termes de degré d donnent $a = da$, donc $d = 1$; avec $P = aX + b$, l'égalité $aX + 2a + b = aX$ donne $b = -2a$.

C'est la droite $\mathrm{Vect}(X - 2)$.

(iv) Les fonctions croissantes ne forment pas un sous-espace, ni les fonctions monotones : $x \mapsto x^3$ est croissante, $x \mapsto -x$ est décroissante, et leur somme ne l'est pas. Les différences de deux fonctions croissantes forment un sous-espace. Écrivons $f = f_1 - f_2$ et $g = g_1 - g_2$ avec f_1, f_2, g_1, g_2 croissantes. Pour $\lambda \geqslant 0$,

$$\lambda f + g = (\lambda f_1 + g_1) - (\lambda f_2 + g_2),$$

et pour $\lambda < 0$, on échange les rôles de f_1 et f_2.

(v) La condition $f(0) + f(1) = f'(0)$ définit le noyau d'une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: c'est un sous-espace. La condition $f(x_0) = y_0$ en définit un si et seulement si $y_0 = 0$.

(vi) Comme $A\cos(x + \varphi) = A\cos\varphi\cos x - A\sin\varphi\sin x$, et comme tout couple (a, b) s'écrit $(A\cos\varphi, -A\sin\varphi)$ par passage en coordonnées polaires (chapitre 4), cet ensemble est $\mathrm{Vect}(\cos, \sin)$. Les fonctions ne prenant qu'un nombre fini de valeurs forment aussi un sous-espace : si f prend p valeurs et g en prend q, $\lambda f + g$ en prend au plus pq.

Sous-espaces : $X(X-1)\mathbb{R}[X]$, $P\,\mathbb{R}[X]$, $\mathrm{Vect}(X-2)$, les différences de fonctions croissantes, la condition $f(0) + f(1) = f'(0)$, la condition $f(x_0) = y_0$ si $y_0 = 0$, et les deux ensembles de (vi).

EXERCICE 9 ⋆⋆

1. Le vecteur $w = (1,0,0)$ convient : $\alpha a + \beta b = (-\alpha, 2\alpha+\beta, \alpha-\beta)$ est égal à w seulement si $\alpha = -1$, $\beta = 2$ et $\alpha - \beta = 0$, ce qui est contradictoire.

2. On résout : $u = -a + 2b$ et $v = 2a + b$, donc $\mathrm{Vect}(u,v) \subset \mathrm{Vect}(a,b)$ par le théorème 1. Réciproquement, ce système s'inverse en

$$a = \frac{-u+2v}{5}, \qquad b = \frac{2u+v}{5},$$

donc $\mathrm{Vect}(a,b) \subset \mathrm{Vect}(u,v)$.

$$\boxed{\mathrm{Vect}(a,b) = \mathrm{Vect}(u,v)}$$

3. On cherche (α,β,γ) orthogonal à a et à b : $-\alpha+2\beta+\gamma = 0$ et $\beta-\gamma = 0$, d'où $\beta = \gamma$ et $\alpha = 3\gamma$.

$$\boxed{(\alpha,\beta,\gamma) = (3,1,1) : \ 3x+y+z = 0 \text{ sur } \mathrm{Vect}(a,b)}$$

4. On a $\mathrm{Vect}(a,b) \subset P$, où P est le plan d'équation $3x+y+z=0$. Réciproquement, si $(x,y,z) \in P$, alors $z = -3x-y$, et l'on cherche $\lambda a + \mu b = (-\lambda, 2\lambda+\mu, \lambda-\mu)$ égal à (x,y,z) : $\lambda = -x$ et $\mu = y+2x$ conviennent, la troisième coordonnée valant bien $-x-y-2x = z$.

$$\boxed{\mathrm{Vect}(a,b) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x+y+z = 0\}}$$

EXERCICE 10 ⋆⋆

Pour passer d'équations à une famille génératrice, on résout le système en fonction de paramètres ; pour passer d'une famille génératrice à des équations, on cherche les formes linéaires qui s'annulent sur les vecteurs donnés.

(i) $z = x+2y$, donc $(x,y,z) = x(1,0,1) + y(0,1,2)$: $\boxed{\mathrm{Vect}\big((1,0,1),(0,1,2)\big)}$.

(ii) En retranchant les équations, $x = 2z$, puis $y = -3z$: $\boxed{\mathrm{Vect}\big((2,-3,1)\big)}$.

(iii) Une équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ s'annule sur les deux vecteurs si $\alpha + 2\beta - \gamma = 0$ et $2\alpha + 3\beta - 3\gamma = 0$, d'où (α,β,γ) proportionnel à $(3,-1,1)$: $\boxed{3x-y+z=0}$.

(iv) De même, (α,β,γ) est proportionnel à $(1,1,-2)$: $\boxed{x+y-2z=0}$.

(v) Pour une droite, il faut deux équations : $(x,y,z) = t(1,2,-1)$ équivaut à $y = 2x$ et $z = -x$: $\boxed{2x-y=0 \text{ et } x+z=0}$.

(vi) La première équation donne $x = 2z$, la seconde $y = 0$: $\boxed{\mathrm{Vect}\big((2,0,1)\big)}$.

Dans chaque cas, on vérifie les deux inclusions comme dans l'exercice 9 : la famille trouvée vérifie les équations, et toute solution des équations est combinaison de la famille.

EXERCICE 11 ⋆⋆

1. Comme $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$, la proposition 6 permet de supprimer le premier vecteur. Avec $1 = \cos^2 + \sin^2$, on peut aussi remplacer $(\cos^2, \sin^2)$ par $(1, \cos(2\cdot))$, puisque $\cos^2 = \dfrac{1+\cos(2\cdot)}{2}$ et $\sin^2 = \dfrac{1-\cos(2\cdot)}{2}$.

$$\boxed{\mathrm{Vect}\big(\cos(2\cdot), \cos^2, \sin^2\big) = \mathrm{Vect}(\cos^2, \sin^2) = \mathrm{Vect}(1, \cos(2\cdot))}$$

2. Par la proposition 11 du cours, $\mathrm{Vect}(B)+\mathrm{Vect}(C)$ est le plus petit sous-espace contenant $\mathrm{Vect}(B)$ et $\mathrm{Vect}(C)$, donc contenant $B \cup C$.

$$\boxed{\mathrm{Vect}(B \cup C) = \mathrm{Vect}(B) + \mathrm{Vect}(C)}$$

Ensuite, $\mathrm{Vect}(A)$ est contenu dans $\mathrm{Vect}(A \cup B)$ et dans $\mathrm{Vect}(A \cup C)$, donc dans leur intersection. L'inclusion peut être stricte : dans $\mathbb{R}^2$, avec $A = \varnothing$, $B = \{e_1\}$ et $C = \{2e_1\}$, l'intersection vaut $\mathbb{R}e_1$, alors que $\mathrm{Vect}(A) = \{0\}$.

$$\boxed{\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(A \cup B) \cap \mathrm{Vect}(A \cup C), \text{ inclusion stricte en général}}$$

EXERCICE 12 ⋆⋆

1. Toute fonction continue f s'écrit $f = f^+ - f^-$, avec $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \max(-f, 0)$, continues et positives.

$$\boxed{\text{Vect}\{f \geqslant 0\} = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$$

2. Tout polynôme P s'écrit $P = \left(\frac{P+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{P-1}{2}\right)^2$, différence de deux polynômes positifs sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Vect}\{P \geqslant 0 \text{ sur } \mathbb{R}\} = \mathbb{R}[X]}$$

EXERCICE 13 ⋆⋆⋆

Si $F = E$, alors $E \setminus F = \varnothing$ et $\text{Vect}(\varnothing) = \{0\}$. Supposons $F \neq E$ et choisissons $a \in E \setminus F$. Le sous-espace $\text{Vect}(E \setminus F)$ contient $E \setminus F$. Il contient aussi F : si $x \in F$, alors $x + a \notin F$, sinon $a = (x + a) - x$ appartiendrait à F, de sorte que $x = (x + a) - a$ est différence de deux éléments de $E \setminus F$.

$$\boxed{\text{Vect}(E \setminus F) = E \text{ si } F \neq E, \qquad \text{Vect}(E \setminus F) = \{0\} \text{ si } F = E}$$

À retenir. Le complémentaire d'un sous-espace strict est « gros » : il engendre tout l'espace, ce qui confirme qu'on ne le confond pas avec un supplémentaire.

Familles de vecteurs

EXERCICE 14 ⋆

1. Notons $e'_1 = (-1, 1, 1)$, $e'_2 = (1, -1, 1)$, $e'_3 = (1, 1, -1)$. L'équation $ae'_1 + be'_2 + ce'_3 = (x, y, z)$ s'écrit $-a + b + c = x$, $a - b + c = y$, $a + b - c = z$. En ajoutant deux à deux, $2c = x + y$, $2a = y + z$, $2b = x + z$: la solution existe et est unique pour tout (x, y, z), donc la famille est une base par le théorème 2. Pour $(3, 7, -2)$:

$$\boxed{(3, 7, -2) = \frac{5}{2}e'_1 + \frac{1}{2}e'_2 + 5e'_3}$$

2. Le troisième vecteur est la somme des deux premiers ; ceux-ci ne sont pas colinéaires, donc forment une famille libre, qui engendre F par la proposition 6. Les trois vecteurs vérifient $x+2y+z = 0$, donc F est contenu dans le plan P de cette équation. Réciproquement, si $(x, y, z) \in P$, on a

$$(x, y, z) = a(1, -1, 1) + b(0, -1, 2) \qquad \text{avec } a = x \text{ et } b = -x - y,$$

la troisième coordonnée valant $a + 2b = -x - 2y = z$.

$$\boxed{\text{Base de } F : ((1, -1, 1), (0, -1, 2)), \qquad F = \{x + 2y + z = 0\}}$$

3. Dans le premier cas, $x = y - 2z$, donc $(x, y, z) = y(1, 1, 0) + z(-2, 0, 1)$. Dans le second, $y = -2x$ et $z = 2t - 7x$, donc $(x, y, z, t) = x(1, -2, -7, 0) + t(0, 0, 2, 1)$. Les familles obtenues sont génératrices, et libres, puisque les paramètres se lisent sur des coordonnées.

$$\boxed{((1, 1, 0), (-2, 0, 1)) \qquad \text{et} \qquad ((1, -2, -7, 0), (0, 0, 2, 1))}$$

EXERCICE 15 ⋆

1. Les vecteurs $(1,2,3)$ et $(-1,4,6)$ ne sont pas colinéaires : la première famille est libre. La seconde est liée, puisque $-(1,2,-1)+2(1,0,1)+(-1,2,-3)=0$.

2. Deux vecteurs non colinéaires forment une famille libre, ce que l'on vérifie sur les coordonnées. Mais $v_3 = v_2 - 2v_1$: la famille des trois est liée.

$$\boxed{v_3 = v_2 - 2v_1}$$

3. La famille $(e_1, 2e_2, e_3)$ est libre, comme sous-famille d'une famille libre, à un facteur non nul près. Pour la deuxième, $ae_1+b(2e_1+e_4)+c(e_3+e_4) = (a+2b)e_1+ce_3+(b+c)e_4$, et la liberté de (e_1,e_3,e_4) donne $c=0$, $b=0$, $a=0$: elle est libre. La troisième est liée, car $7e_1-4e_2 = 2(2e_1+e_2)+3(e_1-2e_2)$.

$$\boxed{\text{libre, libre, liée}}$$

Piège. La question 2 montre que la liberté de toutes les sous-familles de deux vecteurs n'entraîne pas celle de la famille entière.

EXERCICE 16 ⋆⋆

1. Si $\sum_{k=1}^{n-1} a_k(e_k+e_{k+1}) = 0$, on regroupe selon les e_k :

$$a_1e_1 + \sum_{k=2}^{n-1}(a_{k-1}+a_k)e_k + a_{n-1}e_n = 0.$$

La liberté donne $a_1 = 0$, puis $a_k = -a_{k-1} = 0$ de proche en proche.

$$\boxed{(e_1+e_2, \dots, e_{n-1}+e_n) \text{ est libre.}}$$

2. On a $e_1 = v_1$ et $e_k = v_k - v_{k-1}$ pour $k \geqslant 2$: chaque famille est formée de combinaisons de l'autre, d'où l'égalité des sous-espaces engendrés. Si $\sum \mu_k v_k = 0$, alors $\sum_j (\sum_{k \geqslant j} \mu_k) e_j = 0$, donc toutes les sommes $\mu_j + \dots + \mu_n$ sont nulles ; leurs différences successives donnent $\mu_n = \mu_{n-1} = \dots = \mu_1 = 0$.

$$\boxed{(v_1, \dots, v_n) \text{ est libre et } \mathrm{Vect}(v_k) = \mathrm{Vect}(e_k)}$$

EXERCICE 17 ⋆⋆

Soit $\mu_1, \dots, \mu_n$ des scalaires et $S = \sum \mu_i$. Alors

$$\sum_{i=1}^n \mu_i v_i = Su + \sum_{i=1}^n \mu_i e_i = \sum_{k=1}^n (S\lambda_k + \mu_k)e_k,$$

qui est nul si et seulement si $\mu_k = -S\lambda_k$ pour tout k. En sommant ces égalités, $S = -S\sum \lambda_k$, soit $S(1+\sum \lambda_k) = 0$.

Si $\sum \lambda_k \neq -1$, cela impose $S=0$, puis $\mu_k = 0$ pour tout k : la famille est libre. Si $\sum \lambda_k = -1$, les scalaires $\mu_k = -\lambda_k$, non tous nuls, vérifient $S=1$ et $\mu_k = -S\lambda_k$: ils fournissent une relation de dépendance.

$$\boxed{(v_1, \dots, v_n) \text{ liée} \iff \sum_{k=1}^n \lambda_k = -1}$$

EXERCICE 18 ⋆⋆

1. Si $\lambda + \mu n^2 + \nu 2^n = 0$ pour tout n, on divise par 2^n et l'on fait tendre n vers $+\infty$: $\nu = 0$, par croissance comparée. Il reste $\lambda + \mu n^2 = 0$, et les valeurs $n = 0$ et $n = 1$ donnent $\lambda = \mu = 0$.

2. Si $a\cos + b\sin + c\exp = 0$, on divise par e^x et l'on fait tendre x vers $+\infty$: $c = 0$, puisque cos et sin sont bornées. La famille $(\cos, \sin)$ étant libre (exemple du cours), $a = b = 0$.

3. Si $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sin^k = 0$, le polynôme $\sum \lambda_k T^k$ s'annule en tout point de $[-1, 1] = \sin(\mathbb{R})$; il a une infinité de racines, donc il est nul (chapitre 13, théorème 3), et tous les λ_k sont nuls.

$$\boxed{\text{Les trois familles sont libres.}}$$

EXERCICE 19 ⋆⋆

(i) C'est une base, à degrés échelonnés (proposition 10). La formule de Taylor en 1 donne les coordonnées : $P(1) = 3$, $P'(1) = 3$, $\dfrac{P''(1)}{2} = 1$.

$$\boxed{X^2 + X + 1 = 3 + 3(X-1) + (X-1)^2}$$

(ii) L'équation $a(X^2+X)+b(X^2+1)+c(X+1) = \alpha X^2+\beta X+\gamma$ s'écrit $a+b = \alpha$, $a+c = \beta$, $b+c = \gamma$. Ce système a une unique solution pour tout second membre, avec $a = \dfrac{\alpha+\beta-\gamma}{2}$, $b = \dfrac{\alpha-\beta+\gamma}{2}$, $c = \dfrac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}$: c'est une base par le théorème 2.

$$\boxed{X^2 + X + 1 = \frac{1}{2}(X^2+X) + \frac{1}{2}(X^2+1) + \frac{1}{2}(X+1)}$$

(iii) L'équation $a(X-1)^2 + bX^2 + c(X+1)^2 = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$ s'écrit $a+b+c = \alpha$, $2(c-a) = \beta$, $a+c = \gamma$, d'où $b = \alpha - \gamma$, $a = \dfrac{2\gamma-\beta}{4}$, $c = \dfrac{2\gamma+\beta}{4}$: solution unique, c'est une base.

$$\boxed{X^2 + X + 1 = \frac{1}{4}(X-1)^2 + \frac{3}{4}(X+1)^2}$$

EXERCICE 20 ⋆⋆

Par la formule du binôme, $P_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} X^j$: le terme X^{k+1} disparaît, et le coefficient de X^k vaut $k+1 \neq 0$. Donc $\deg P_k = k$ pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$.

$$\boxed{(P_0, \dots, P_n) \text{ est une base de } \mathbb{K}_n[X] \text{ (proposition 10).}}$$

EXERCICE 21 ⋆⋆

La famille des suites $u^{(k)} = (n^k)_{n\in\mathbb{N}}$, $k \in \mathbb{N}$, convient : aucune n'est nulle à partir d'un certain rang. Si une sous-famille finie vérifie $\sum_{k=0}^{d} \lambda_k n^k = 0$ pour tout n, le polynôme $\sum \lambda_k X^k$ a une infinité de racines, donc il est nul.

$$\boxed{\left((n^k)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est libre.}}$$

Les suites géométriques $(a^n)_n$, $a > 0$, conviennent aussi, par le même argument que les exponentielles du cours.

EXERCICE 22 ⋆⋆⋆

1. Une famille infinie est libre si toutes ses sous-familles finies le sont. Pour $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$, la liberté de $(x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha_k x})$ est l'exemple du cours, démontré en divisant par $\mathrm{e}^{\alpha_n x}$ et en faisant tendre x vers $+\infty$.

2. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ distincts et $\sum \lambda_k |x - \alpha_k| = 0$ pour tout x. Si $\lambda_j \neq 0$, on aurait

$$|x - \alpha_j| = -\frac{1}{\lambda_j} \sum_{k \neq j} \lambda_k |x - \alpha_k|,$$

et le membre de droite est dérivable en α_j, puisque chaque $x \mapsto |x - \alpha_k|$ l'est hors de α_k, alors que le membre de gauche ne l'est pas. Donc tous les λ_j sont nuls.

$$\boxed{\text{Les deux familles sont libres.}}$$

À retenir. Pour une famille de fonctions, on cherche une propriété qui distingue chaque fonction des autres : une croissance plus rapide, ou un point de non-dérivabilité qui lui est propre.

EXERCICE 23 ⋆⋆⋆

1. Si $\sum_{k=0}^{d} \lambda_k \cos^k = 0$, le polynôme $\sum \lambda_k T^k$ s'annule sur $[-1, 1]$, donc il est nul : la famille est libre, comme à l'exercice 18.

2. Pour tout n, il existe un polynôme T_n de degré n tel que $\cos(nx) = T_n(\cos x)$: c'est le polynôme de Tchebychev de l'exercice 53 du chapitre 13, ou une conséquence de la formule de Moivre (chapitre 4). Donc $x \mapsto \cos(nx)$ appartient à $\mathrm{Vect}(\cos^k)_{k \leqslant n}$. Réciproquement, la linéarisation (chapitre 4) écrit $\cos^n$ comme combinaison des $x \mapsto \cos(kx)$, $k \leqslant n$. Les deux sous-espaces engendrés sont égaux, par le théorème 1.

$$\boxed{\mathrm{Vect}(\cos^n)_{n \in \mathbb{N}} = \mathrm{Vect}\big(\cos(n\,\cdot)\big)_{n \in \mathbb{N}}}$$

3. Si $\sum \lambda_k \cos(k\,\cdot) = 0$, alors $\big(\sum \lambda_k T_k\big)(\cos x) = 0$ pour tout x, donc le polynôme $\sum \lambda_k T_k$ est nul ; comme les T_k sont de degrés distincts, la proposition 9 donne $\lambda_k = 0$ pour tout k.

$$\boxed{\big(\cos(n\,\cdot)\big)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est libre.}}$$

EXERCICE 24 ⋆⋆⋆

Notons $Q_k = (X - a)^k (X - b)^{n-k}$.

▷ *Liberté.* Supposons $\sum_{k=0}^{n} c_k Q_k = 0$. En évaluant en b, seul le terme $k = n$ subsiste : $c_n (b - a)^n = 0$, donc $c_n = 0$. Les termes restants sont divisibles par $X - b$; après division, on obtient la même relation au rang $n - 1$, et une récurrence sur n conclut.

▷ *Caractère générateur.* Posons $U = X - a$, $V = X - b$ et $d = b - a \neq 0$, de sorte que $U - V = d$. Par la formule de Taylor en a, tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$ s'écrit $\sum_{j=0}^{n} p_j U^j$. Or

$$U^j = U^j \Big(\frac{U - V}{d}\Big)^{n-j} = \frac{1}{d^{n-j}} \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n-j}{i} (-1)^{n-j-i} U^{j+i} V^{n-j-i},$$

combinaison des $U^k V^{n-k} = Q_k$.

$$\boxed{(Q_0, \dots, Q_n) \text{ est une base de } \mathbb{C}_n[X].}$$

Le chapitre 15 permettra d'abréger : une famille libre de $n + 1$ vecteurs dans un espace de dimension $n + 1$ est une base.

EXERCICE 25 ⋆⋆⋆

1. *Génératrice.* Montrons par récurrence sur j que $x_j \in \mathrm{Vect}(x_i)_{i\in J, i\leqslant j}$. Si $j \in J$, c'est clair. Sinon, $x_j \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{j-1})$, et chacun de ces vecteurs appartient, par hypothèse de récurrence, à $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in J, i<j}$. Donc $\mathrm{Vect}(x_j)_{j\in J}$ contient tous les x_i, et vaut E.

Libre. Si $\sum_{j\in J} \lambda_j x_j = 0$ avec des coefficients non tous nuls, soit m le plus grand indice tel que $\lambda_m \neq 0$. Alors x_m est combinaison de vecteurs d'indices inférieurs, donc appartient à $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{m-1})$, ce qui contredit $m \in J$.

$$\boxed{(x_j)_{j\in J} \text{ est une base de } E.}$$

2. Les deux premiers vecteurs ne sont pas colinéaires. Ensuite, $(0,1,2) = 2(1,1,1) + (-2,-1,0)$ et $(-1,1,3) = 3(1,1,1) + 2(-2,-1,0)$, donc $J = \{1,2\}$.

$$\boxed{\text{Base : } ((1,1,1),(-2,-1,0))}$$

Somme de sous-espaces

EXERCICE 26 ⋆

Si $t(1,1,1) = a(1,1,0) + b(0,1,1)$, les coordonnées donnent $a = t$, $b = t$ et $a + b = t$, donc $t = 0$: $F \cap G = \{0\}$. Pour la somme, l'équation $a(1,1,0) + b(0,1,1) + c(1,1,1) = (x,y,z)$ s'écrit $a + c = x$, $a + b + c = y$, $b + c = z$, et elle a pour solution $b = y - x$, $a = y - z$, $c = x + z - y$, quel que soit (x,y,z).

$$\boxed{F \cap G = \{0\}, \qquad F + G = \mathbb{R}^3, \qquad \mathbb{R}^3 = F \oplus G}$$

EXERCICE 27 ⋆

Les sous-espaces F et G sont contenus dans E : $1 - 1 + 1 - 1 = 0$, et si $x + z = y + t = 0$, alors $x - y + z - t = 0$. Raisonnons par analyse-synthèse. Si $v = (x,y,z,t) \in E$ s'écrit $a(1,1,1,1) + w$ avec $w \in G$, les conditions $(x - a) + (z - a) = 0$ et $(y - a) + (t - a) = 0$ imposent

$$a = \frac{x+z}{2} = \frac{y+t}{2},$$

ces deux valeurs étant égales puisque $v \in E$. Réciproquement, avec cette valeur de a, le vecteur $w = v - a(1,1,1,1)$ appartient à G.

$$\boxed{E = F \oplus G, \quad v = \frac{x+z}{2}(1,1,1,1) + \left(v - \frac{x+z}{2}(1,1,1,1)\right)}$$

EXERCICE 28 ⋆

Le sous-espace F est le noyau de la forme linéaire non nulle $(x,y,z,t) \mapsto x + y + z + t$, donc un hyperplan, et G est la droite dirigée par $(2,-1,0,1)$, dont la somme des coordonnées vaut $2 \neq 0$: G n'est pas contenue dans F. Le théorème 7 conclut.

$$\boxed{\mathbb{R}^4 = F \oplus G}$$

À retenir. Le théorème 7 évite tout calcul : un hyperplan et une droite qui n'y est pas contenue sont toujours supplémentaires.

EXERCICE 29 ⋆⋆

Soit F_1 le premier ensemble, noyau d'une application linéaire. Si $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ en fait partie, l'égalité

$$aX^6 + bX^4 + cX^2 + d = aX^5 + bX^4 + cX^3 + dX^2$$

impose $a = 0$, $c = 0$ et $d = 0$; réciproquement, X^2 convient. Donc $F_1 = \text{Vect}(X^2)$. Le second ensemble est le noyau de la forme linéaire non nulle $P \mapsto P(2) - P(1)$, qui vaut 1 en X : c'est un hyperplan H, et $X^2 \notin H$, puisque $4 \neq 1$. Le théorème 7 conclut.

$$\boxed{\mathbb{R}_3[X] = \text{Vect}(X^2) \oplus \{P \mid P(1) = P(2)\}}$$

EXERCICE 30 ⋆⋆

1. Si u converge vers ℓ, alors $u = (\ell)_n + (u_n - \ell)_n$, somme d'une suite constante et d'une suite de limite nulle. Une suite constante de limite nulle est nulle : l'intersection est réduite à 0.

$$\boxed{E = \{\text{suites constantes}\} \oplus \{\text{suites de limite nulle}\}}$$

2. Les deux ensembles sont des sous-espaces de E, et leur intersection est nulle, puisqu'une fonction affine $x \mapsto a + bx$ vérifiant $f(0) = f'(0) = 0$ a $a = b = 0$. Pour $f \in E$, la fonction $g : x \mapsto f(x) - f(0) - f'(0)x$ appartient à F, et $f = g + \big(x \mapsto f(0) + f'(0)x\big)$.

$$\boxed{E = F \oplus \{x \mapsto a + bx\}}$$

En généralisant : dans l'espace des fonctions n fois dérivables en 0, l'ensemble des f telles que $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0$ est un supplémentaire des fonctions polynomiales de degré au plus n, la décomposition étant donnée par le polynôme de Taylor $\displaystyle\sum_{k \leqslant n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

EXERCICE 31 ⋆⋆

Une combinaison linéaire de deux fonctions négligeables devant x^n en 0 l'est encore (chapitre 10), et $0 = o(x^n)$: F est un sous-espace. Soit G l'ensemble des fonctions polynomiales de degré au plus n. Si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la formule de Taylor-Young donne

$$f = T + (f - T), \qquad T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \qquad f(x) - T(x) \underset{x \to 0}{=} o(x^n).$$

Si une fonction polynomiale de degré au plus n est négligeable devant x^n, l'unicité du développement limité (chapitre 10) montre que tous ses coefficients sont nuls : $F \cap G = \{0\}$.

$$\boxed{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = F \oplus \{x \mapsto P(x) \mid P \in \mathbb{R}_n[X]\}}$$

EXERCICE 32 ⋆⋆

1. Si f est 1-périodique et de limite nulle en $+\infty$, alors pour tout x, $f(x) = f(x+k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$, donc $f(x) = 0$: $F \cap G = \{0\}$. Les sous-espaces ne sont pas supplémentaires : si l'on avait $x = p(x) + g(x)$ avec $p \in F$ et $g \in G$, alors

$$0 = p(x+1) - p(x) = 1 - \big(g(x+1) - g(x)\big) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1,$$

ce qui est absurde.

$$\boxed{F \cap G = \{0\}, \text{ mais } F + G \neq \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \ x \mapsto x \notin F + G}$$

2. Notons A et B les deux ensembles, qui sont des sous-espaces. Une suite de $A \cap B$ vérifie $u_{2n} = 0$ et $u_{2n+1} = u_{2n} = 0$: elle est nulle. Pour $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, la suite b définie par $b_{2n} = b_{2n+1} = u_{2n}$ appartient à B, et $a = u - b$ a ses termes pairs nuls.

$$\boxed{\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = A \oplus B}$$

EXERCICE 33 ⋆⋆

Soit $L_0, \dots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés aux points $a_0, \dots, a_n$. Un polynôme $P \in F_j$ s'annule aux n points a_i, $i \neq j$, et il est de degré au plus n : il est multiple de $\prod_{i \neq j}(X - a_i)$, donc de L_j, et $P = P(a_j)L_j$. Réciproquement, $L_j \in F_j$. Ainsi $F_j = \mathbb{K}L_j$. Comme $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ (exemple du cours), la deuxième remarque suivant la proposition 14 du cours donne la somme directe.

$$\boxed{F_j = \mathbb{K}L_j, \qquad \mathbb{K}_n[X] = F_0 \oplus \cdots \oplus F_n, \qquad P = \sum_{j=0}^{n} P(a_j)L_j}$$

EXERCICE 34 ⋆⋆

1. Si $A \cap B = A + B$, alors $A \subset A + B = A \cap B \subset B$, et de même $B \subset A$. La réciproque est claire.

2. Les sous-espaces $A \cap B$ et $A \cap C$ sont contenus dans A et dans $B + C$, donc leur somme aussi. L'inclusion peut être stricte : dans $\mathbb{R}^2$, avec $A = \mathbb{R}(1,1)$, $B = \mathbb{R}(1,0)$, $C = \mathbb{R}(0,1)$, le membre de gauche vaut $\{0\}$, et le membre de droite vaut $A \cap \mathbb{R}^2 = A$.

3. Supposons $B \subset A$ et soit $x \in A \cap (B + C)$, $x = b + c$. Alors $c = x - b \in A$, donc $c \in A \cap C$, et $b \in B = A \cap B$.

$$\boxed{B \subset A \implies (A \cap B) + (A \cap C) = A \cap (B + C)}$$

À retenir. L'intersection ne se distribue pas sur la somme ; c'est la différence la plus visible entre le calcul sur les sous-espaces et le calcul ensembliste du chapitre 1.

EXERCICE 35 ⋆⋆

Comme $H \subset G$, on a $F \cap H \subset (F \cap G) \cap H = \{0\}$: la somme $F + H$ est directe. Ensuite, $F + H \subset F + G$ puisque $H \subset G$, et $G = (F \cap G) + H \subset F + H$, donc $F + G \subset F + H$.

$$\boxed{F + G = F \oplus H}$$

Applications linéaires

EXERCICE 36 ⋆

Les applications (iii), (vii), (ix) et (x) sont linéaires, ainsi que $(u_n) \mapsto (u_{n+2} + u_{n+1} + u_n)$: chacune transforme une combinaison linéaire en la combinaison des images. Pour les autres, un contre-exemple suffit.

- (i) : l'image de $2(1,1)$ vaut 4, et non 2×1. (ii) : l'image de $(0,0)$ est $(1,0,0) \neq 0$.
- (iv) : $|-1| \neq -|1|$. (v) : l'image de $2(1,0)$ vaut $4 \neq 2$.
- (vi) : $\min(1,0) + \min(0,1) = 0$, alors que $\min(1,1) = 1$.
- (viii) : $(2P)^2 = 4P^2 \neq 2P^2$ pour $P = 1$. (xi) : pour $f = 1$, l'image de $2f$ vaut 8, et non 2×3.
- (xii) : l'image de $2f$ est 4 fois celle de f, et non 2 fois, pour $f = 1$. Pour $g \mapsto g \circ g$: l'image de $2\,\mathrm{id}$ est $4\,\mathrm{id} \neq 2\,\mathrm{id}$.

$$\boxed{\text{Linéaires : (iii), (vii), (ix), (x), et } (u_n) \mapsto (u_{n+2} + u_{n+1} + u_n).}$$

Piège. Le test $u(0) = 0$ ne suffit pas : (i), (iv), (v), (vi), (viii), (xi), (xii) envoient 0 sur 0 sans être linéaires.

EXERCICE 37 ⋆

Les quatre applications ont des composantes de la forme $a_1x_1+\cdots+a_px_p$: elles sont linéaires. On résout $u(x)=0$ pour le noyau, et l'on utilise la proposition 18 pour l'image.

(i) $x+2y=0$: Ker $=\mathbb{R}(-2,1)$; les deux coordonnées de l'image sont liées par $y'=-2x'$: Im $=\mathbb{R}(1,-2)$.

(ii) Le système $x=0$, $2x-z=0$, $x-y+z=0$ n'a que la solution nulle ; pour tout (a,b,c), l'équation $u(x,y,z)=(a,b,c)$ a la solution $x=a$, $z=2a-b$, $y=3a-b-c$: l'application est bijective.

(iii) $x=2y$ et $x=-2z$: Ker $=\mathbb{R}(2,1,-1)$; les images $(1,1)$ et $(-2,0)$ de e_1 et e_2 engendrent $\mathbb{R}^2$, donc Im $=\mathbb{R}^2$.

(iv) $x-2y=x+2y=0$ impose $x=y=0$; l'équation $u(x,y)=(a,b)$ a la solution $x=\dfrac{a+b}{2}$, $y=\dfrac{b-a}{4}$: bijective.

$$\boxed{\text{(i) Ker } =\mathbb{R}(-2,1),\ \text{Im}=\mathbb{R}(1,-2);\ \text{(ii), (iv) bijectives;}\ \text{(iii) Ker } =\mathbb{R}(2,1,-1),\ \text{Im}=\mathbb{R}^2}$$

EXERCICE 38 ⋆

1. Le système $x-y+z=2x+y+2z=0$ donne, par somme, $3x+3z=0$, puis $y=0$: Ker $f=\mathbb{R}(-1,0,1)$. Les images $(1,2)$ et $(-1,1)$ de e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires : on résout $a(1,2)+b(-1,1)=(p,q)$ par $a=\dfrac{p+q}{3}$, $b=\dfrac{q-2p}{3}$, donc elles engendrent $\mathbb{R}^2$.

$$\boxed{\text{Ker } f=\mathbb{R}(-1,0,1),\ \text{Im } f=\mathbb{R}^2:\ f \text{ est surjective, non injective.}}$$

2. La linéarité est immédiate. Résolvons $g(x,y,z)=(p,q,r)$. La deuxième équation donne $x=q-z$, la première $y=\dfrac{p-z}{2}$, et la troisième devient

$$-(q-z)+\frac{p-z}{2}+az=r,\qquad \text{soit}\qquad \Big(a+\frac{1}{2}\Big)z=r+q-\frac{p}{2}.$$

Si $a\neq-\dfrac{1}{2}$, la solution est unique : g est bijective. Pour $a=1$, on obtient $z=\dfrac{-p+2q+2r}{3}$, puis x et y.

$$\boxed{g\in\text{GL}(\mathbb{R}^3)\iff a\neq-\frac{1}{2},\qquad a=1:\ g^{-1}(p,q,r)=\frac{1}{3}(p+q-2r,\ 2p-q-r,\ -p+2q+2r)}$$

Pour $a=-\dfrac{1}{2}$, le noyau s'obtient avec $p=q=r=0$ et z libre : $x=-z$, $y=-\dfrac{z}{2}$. L'image est engendrée par $g(e_1)=(0,1,-1)$ et $g(e_2)=(2,0,1)$, puisque $g(e_3)=(1,1,-\dfrac{1}{2})$ est égal à $g(e_1)+\dfrac{1}{2}g(e_2)$; c'est le plan d'équation $p-2q-2r=0$, d'après la condition de compatibilité.

$$\boxed{a=-\tfrac{1}{2}:\ \text{Ker}\,g=\mathbb{R}(2,1,-2),\quad \text{Im}\,g=\text{Vect}\big((0,1,-1),(2,0,1)\big)=\{p-2q-2r=0\}}$$

EXERCICE 39 ⋆⋆

1. L'ensemble E est le noyau de la forme linéaire $u \mapsto u_0$, et Δ est linéaire. Si $\Delta(u) = 0$, la suite u est constante, égale à $u_0 = 0$: Δ est injective. Si $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, la suite définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$ appartient à E et vérifie $\Delta(u) = v$, par télescopage (chapitre 3).

$$\boxed{\Delta : E \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ est un isomorphisme, de réciproque } v \mapsto \Big(\sum_{k<n} v_k\Big)_n}$$

2. L'ensemble E_a est le noyau de l'évaluation en a. L'application $Q \mapsto (X-a)Q$, de $\mathbb{K}[X]$ dans E_a, est linéaire, injective puisque $\mathbb{K}[X]$ est intègre, et surjective par la proposition 7 du chapitre 13.

$$\boxed{Q \mapsto (X-a)Q \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{K}[X] \text{ sur } E_a.}$$

Piège. En dimension infinie, un espace peut être isomorphe à l'un de ses sous-espaces stricts ; le chapitre 15 montrera que c'est impossible en dimension finie.

EXERCICE 40 ⋆⋆

1. L'application T_n est linéaire, et $\deg(P'' + \omega^2 P) \leqslant \deg P$: elle envoie $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même.

2. On a $T_n(X^k) = \omega^2 X^k + k(k-1)X^{k-2}$, polynôme de degré exactement k, puisque $\omega \neq 0$. La famille $(T_n(X^k))_{0\leqslant k\leqslant n}$ est donc à degrés échelonnés, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (proposition 10), et T_n est un automorphisme par le théorème 4 (iii).

3. Le polynôme $P = T_n^{-1}(X^n)$ est une solution, de degré n, puisque T_n conserve le degré. Si Q est une solution polynomiale quelconque, de degré m, alors $\deg(Q'' + \omega^2 Q) = m$, donc $m = n$, et $Q = P$ par injectivité de T_n.

$$\boxed{\text{Il existe une unique solution polynomiale, de degré } n.}$$

Par exemple, pour $n = 2$: $P = \dfrac{X^2}{\omega^2} - \dfrac{2}{\omega^4}$.

EXERCICE 41 ⋆⋆

1. La linéarité vient de celle de $P \mapsto P(X+1)$. Par la formule du binôme, $\Delta(X^k) = \sum_{j<k} \binom{k}{j} X^j$ est de degré $k-1$ si $k \geqslant 1$, de coefficient dominant k, et $\Delta(1) = 0$. Donc $\deg \Delta(P) = \deg P - 1$ si $\deg P \geqslant 1$: Δ envoie $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$.

2. Un polynôme de degré au moins 1 a une image non nulle, donc $\operatorname{Ker}\Delta_n = \operatorname{Ker}\Delta = \mathbb{R}_0[X]$. Par la proposition 18, $\operatorname{Im}\Delta_n$ est engendrée par $\Delta(X), \dots, \Delta(X^n)$, de degrés $0, \dots, n-1$: c'est $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ (proposition 10). De même, $\operatorname{Im}\Delta = \mathbb{R}[X]$.

$$\boxed{\operatorname{Ker}\Delta_n = \operatorname{Ker}\Delta = \mathbb{R}_0[X], \qquad \operatorname{Im}\Delta_n = \mathbb{R}_{n-1}[X], \qquad \operatorname{Im}\Delta = \mathbb{R}[X]}$$

3. Chaque application de Δ fait baisser le degré d'au moins 1, et envoie les constantes sur 0 : $\Delta_n^{n+1}(P) = 0$ pour $\deg P \leqslant n$.

4. Soit $E = X\mathbb{R}[X]$, ensemble des polynômes sans terme constant. La restriction de Δ à E est injective, puisque $E \cap \mathbb{R}_0[X] = \{0\}$, et surjective, puisque $\Delta(X^{k+1})$ est de degré k pour tout k, de sorte que les $\Delta(X^{k+1})$ forment une base de $\mathbb{R}[X]$.

$$\boxed{\Delta \text{ induit un isomorphisme de } X\mathbb{R}[X] \text{ sur } \mathbb{R}[X].}$$

5. Soit $Q \in X\mathbb{R}[X]$ tel que $\Delta(Q) = X^d$. Alors $Q(k+1) - Q(k) = k^d$, et la somme télescopique donne

$$\sum_{k=0}^{n} k^d = Q(n+1) - Q(0) = Q(n+1).$$

$$\boxed{S_d = Q(X+1),\ \text{où } Q \in X\mathbb{R}[X] \text{ vérifie } Q(X+1) - Q(X) = X^d}$$

Pour $d = 1$, $Q = \dfrac{X(X-1)}{2}$ et l'on retrouve $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

EXERCICE 42 ⋆⋆

L'application f est linéaire, et $f(X^k) = (2^k - 1)X^k$. Pour $P = \sum a_k X^k$, on a donc

$$f(P) = \sum_k (2^k - 1) a_k X^k,$$

qui est nul si et seulement si $a_k = 0$ pour tout $k \geqslant 1$. L'image est engendrée par les $f(X^k)$, multiples non nuls de X^k pour $k \geqslant 1$.

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}_0[X], \qquad \operatorname{Im} f = X\mathbb{R}[X]}$$

EXERCICE 43 ⋆⋆

1. On résout $u(v) = \lambda v$ pour $\lambda = 0,\ 2,\ -2$. Les calculs, que l'on vérifie en appliquant u, donnent

$$\boxed{\begin{array}{l}\operatorname{Ker} u = \mathbb{R}(1, -1, \sqrt{2}), \qquad \operatorname{Ker}(u - 2\,\mathrm{id}) = \mathbb{R}(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}, 2),\\ \operatorname{Ker}(u + 2\,\mathrm{id}) = \mathbb{R}(2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}, -2)\end{array}}$$

Par exemple, $u(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}, 2) = (4 - 2\sqrt{2}, 4 + 2\sqrt{2}, 4)$, qui est bien le double du vecteur.

2. Notons v_0, v_2, v_{-2} ces trois vecteurs. La résolution de $av_0 + bv_2 + cv_{-2} = w$ par la méthode du pivot donne une solution unique pour tout w : (v_0, v_2, v_{-2}) est une base de $\mathbb{R}^3$, et la deuxième remarque suivant la proposition 14 du cours donne la somme directe.

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker}(u - 2\,\mathrm{id}) \oplus \operatorname{Ker}(u + 2\,\mathrm{id})}$$

3. Si $y + z \in F$ avec $u(y) = 2y$ et $u(z) = -2z$, alors $u(y + z) = 2y - 2z \in F$. L'application $y + z \mapsto \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{2}z$ est la réciproque de la restriction de u à F.

$$\boxed{u_{|F} \in \mathrm{GL}(F), \qquad (u_{|F})^{-1}(y + z) = \frac{y - z}{2}}$$

EXERCICE 44 ⋆⋆

1. Par récurrence sur n, le cas $n = 0$ étant clair. Si l'égalité est vraie au rang n,

$$f^{n+1}g - gf^{n+1} = f(f^n g - gf^n) + (fg - gf)f^n = nf^{n+1} + f^{n+1}.$$

$$\boxed{f^n \circ g - g \circ f^n = nf^n}$$

2. Comme id_E et f commutent, la factorisation de $a^n - b^n$ (chapitre 11) donne

$$(\mathrm{id}_E - f) \circ \sum_{k=0}^{n-1} f^k = \mathrm{id}_E - f^n = \mathrm{id}_E,$$

et de même dans l'autre ordre.

$$\boxed{(\mathrm{id}_E - f)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f^k}$$

EXERCICE 45 ⋆⋆

1. Si $f(x)=0$, alors $f(g(x))=g(f(x))=0$: $g(x)\in\operatorname{Ker} f$. Si $y=f(x)$, alors $g(y)=f(g(x))\in\operatorname{Im} f$.

2. Si $g\circ f=0$, alors $g(f(x))=0$ pour tout x, donc $\operatorname{Im} f\subset\operatorname{Ker} g$; la réciproque se lit de même.

$$\boxed{g\circ f=0 \iff \operatorname{Im} f\subset\operatorname{Ker} g}$$

EXERCICE 46 ⋆⋆

1. Si $f(x)=0$, alors $g(f(x))=0$. Supposons $\operatorname{Im} f\cap\operatorname{Ker} g=\{0\}$: si $g(f(x))=0$, alors $f(x)\in\operatorname{Im} f\cap\operatorname{Ker} g$, donc $f(x)=0$. Réciproquement, si $\operatorname{Ker} f=\operatorname{Ker}(g\circ f)$ et $y=f(x)\in\operatorname{Ker} g$, alors $x\in\operatorname{Ker}(g\circ f)=\operatorname{Ker} f$, donc $y=0$.

2. On a $g(f(x))\in\operatorname{Im} g$. Supposons $\operatorname{Im} f+\operatorname{Ker} g=F$: tout $y\in F$ s'écrit $f(x)+k$ avec $g(k)=0$, donc $g(y)=g(f(x))$. Réciproquement, si $\operatorname{Im}(g\circ f)=\operatorname{Im} g$ et $y\in F$, il existe x tel que $g(y)=g(f(x))$, et $y=f(x)+(y-f(x))$ avec $y-f(x)\in\operatorname{Ker} g$.

3. On a $x\in\operatorname{Ker}(g\circ f) \iff f(x)\in\operatorname{Ker} g$, et $\operatorname{Im}(g\circ f)=g(f(E))$.

$$\boxed{\operatorname{Ker}(g\circ f)=f^{-1}(\operatorname{Ker} g),\qquad \operatorname{Im}(g\circ f)=g(\operatorname{Im} f)}$$

EXERCICE 47 ⋆⋆

1. Supposons $f(E_1)\subset f(E_2)$ et soit $x\in E_1$: il existe $x'\in E_2$ tel que $f(x)=f(x')$, et

$$x=x'+(x-x')\in E_2+\operatorname{Ker} f.$$

Donc $E_1+\operatorname{Ker} f\subset E_2+\operatorname{Ker} f$. Réciproquement, $f(E_1)=f(E_1+\operatorname{Ker} f)\subset f(E_2+\operatorname{Ker} f)=f(E_2)$.

2. Un vecteur x vérifie $f(x)\in f(E')$ si et seulement s'il existe $x'\in E'$ tel que $x-x'\in\operatorname{Ker} f$. Et $y\in f(f^{-1}(F'))$ si et seulement si $y=f(x)$ avec $f(x)\in F'$, c'est-à-dire $y\in F'\cap\operatorname{Im} f$.

$$\boxed{f^{-1}(f(E'))=E'+\operatorname{Ker} f,\qquad f(f^{-1}(F'))=F'\cap\operatorname{Im} f}$$

EXERCICE 48 ⋆⋆

1. Les vecteurs de $u(S_1+S_2)$ sont les $u(s_1+s_2)=u(s_1)+u(s_2)$: c'est $u(S_1)+u(S_2)$. Si u est injective et si $y=u(s_1)=u(s_2)$ appartient à $u(S_1)\cap u(S_2)$, alors $s_1=s_2\in S_1\cap S_2=\{0\}$, donc $y=0$. Sans injectivité, c'est faux : avec $u(x,y)=(x+y,0)$, $S_1=\mathbb{R}(1,0)$ et $S_2=\mathbb{R}(0,1)$, on obtient $u(S_1)=u(S_2)=\mathbb{R}(1,0)$.

2. Soit $x\in E$. Comme $f(x)\in\operatorname{Im} f\subset\operatorname{Im}(f+g)$, il existe y tel que $f(x)=f(y)+g(y)$, soit $f(x-y)=g(y)$. Ce vecteur appartient à $\operatorname{Im} f\cap\operatorname{Im} g=\{0\}$, donc $x-y\in\operatorname{Ker} f$ et $y\in\operatorname{Ker} g$.

$$\boxed{x=(x-y)+y\in\operatorname{Ker} f+\operatorname{Ker} g}$$

EXERCICE 49 ⋆⋆

1. On a toujours $\operatorname{Ker} f\subset\operatorname{Ker} f^2$. Si $\operatorname{Im} f\cap\operatorname{Ker} f=\{0\}$ et $f^2(x)=0$, alors $f(x)\in\operatorname{Im} f\cap\operatorname{Ker} f$, donc $f(x)=0$. Réciproquement, si $y=f(x)\in\operatorname{Ker} f$, alors $x\in\operatorname{Ker} f^2=\operatorname{Ker} f$ et $y=0$.

2. On a toujours $\operatorname{Im} f^2\subset\operatorname{Im} f$. Si $E=\operatorname{Im} f+\operatorname{Ker} f$, tout x s'écrit $f(z)+k$, et $f(x)=f^2(z)$. Réciproquement, si $\operatorname{Im} f=\operatorname{Im} f^2$ et $x\in E$, il existe z tel que $f(x)=f^2(z)$, et $x=f(z)+(x-f(z))$ avec $x-f(z)\in\operatorname{Ker} f$.

3. Si $f^2(x)=0$, alors $f(x)=f^7(x)=f^5(f^2(x))=0$; et $f(x)=f^2(f^5(x))\in\operatorname{Im} f^2$. Les questions 1 et 2 concluent.

$$\boxed{E=\operatorname{Ker} f\oplus\operatorname{Im} f}$$

EXERCICE 50 ⋆⋆⋆

1. Une telle application doit vérifier $g(f(x)) = h(x)$ pour tout x, ce qui la détermine sur $\operatorname{Im} f$: d'où l'unicité. Pour l'existence, il faut que $h(x)$ ne dépende que de $f(x)$: si $f(x) = f(x')$, alors $x - x' \in \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} h$, donc $h(x) = h(x')$. On peut donc poser $g(f(x)) = h(x)$.

2. Pour $y = f(x)$, $y' = f(x')$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda y + y' = f(\lambda x + x')$, donc

$$g(\lambda y + y') = h(\lambda x + x') = \lambda h(x) + h(x') = \lambda g(y) + g(y').$$

$$\boxed{\text{Il existe une unique } g \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} f, G) \text{ telle que } g \circ f = h.}$$

À retenir. C'est l'analogue linéaire de la factorisation d'une application par la relation d'équivalence « avoir la même image », vue au chapitre 2.

EXERCICE 51 ⋆⋆⋆

L'ensemble A contient 0, et si u, v s'annulent sur G, $\lambda u+v$ aussi : c'est un sous-espace. L'application de restriction $\Phi : u \mapsto u_{|H}$, de A dans $\mathcal{L}(H, F)$, est linéaire. Elle est injective : si $u \in A$ et $u_{|H} = 0$, alors u est nulle sur G et sur H, donc sur $E = G \oplus H$. Elle est surjective : pour $w \in \mathcal{L}(H, F)$, la proposition 19 fournit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, nulle sur G et égale à w sur H.

$$\boxed{u \mapsto u_{|H} \text{ est un isomorphisme de } A \text{ sur } \mathcal{L}(H, F).}$$

EXERCICE 52 ⋆⋆⋆

Pour $x \neq 0$, il existe un unique scalaire λ_x tel que $u(x) = \lambda_x x$. Soit x, y non nuls. Si (x, y) est libre, alors

$$\lambda_{x+y}(x + y) = u(x + y) = \lambda_x x + \lambda_y y,$$

et la liberté donne $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$. Si $y = \mu x$, avec $\mu \neq 0$, alors $u(y) = \mu\lambda_x x = \lambda_x y$, donc $\lambda_y = \lambda_x$. Le scalaire $\lambda = \lambda_x$ ne dépend donc pas de x, et $u(x) = \lambda x$ pour tout x, y compris $x = 0$.

$$\boxed{u = \lambda \operatorname{id}_E}$$

Piège. L'erreur la plus répandue est de conclure dès que $u(x) = \lambda_x x$ pour tout x : tout le travail consiste à montrer que λ_x est constant, en distinguant les couples libres et les couples liés.

ENDOMORPHISMES, PROJECTEURS ET SYMÉTRIES

EXERCICE 53 ⋆

1. Le plan F est un hyperplan, noyau de $\varphi : (x, y, z) \mapsto x + y - z$, et $\varphi(1, 1, 3) = -1 \neq 0$: par le théorème 7, $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

2. Pour $v = (x, y, z)$, on cherche λ tel que $v - \lambda(1, 1, 3) \in F$, c'est-à-dire $\varphi(v) - \lambda\varphi(1, 1, 3) = 0$, soit $\lambda = -\varphi(v) = -(x + y - z)$. Les projecteurs sur F et sur G sont donc

$$p(v) = v + (x + y - z)(1, 1, 3), \qquad q(v) = -(x + y - z)(1, 1, 3).$$

$$\boxed{p(2, 2, 3) = (3, 3, 6), \qquad q(1, -2, 0) = (1, 1, 3)}$$

3. La symétrie est $s = 2p - \operatorname{id}$.

$$\boxed{s(x, y, z) = (x, y, z) + 2(x + y - z)(1, 1, 3)}$$

EXERCICE 54 ⋆

1. Le plan F a pour base $((1,1,0),(-3,0,1))$, obtenue en écrivant $x = y - 3z$. Le système qui définit G donne $z = -2x$ et $y = z - x = -3x$, d'où $G = \mathbb{R}w$ avec $w = (-1,3,2)$, obtenu pour $x = -1$. Avec $\varphi(x,y,z) = x - y + 3z$, on a $F = \operatorname{Ker}\varphi$ et $\varphi(w) = -1 - 3 + 6 = 2 \neq 0$. Le théorème 7 donne $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

2. Comme à l'exercice précédent, $v - \lambda w \in F$ si et seulement si $\lambda = \dfrac{\varphi(v)}{\varphi(w)} = \dfrac{x-y+3z}{2}$.

$$\boxed{q(x,y,z) = \frac{x-y+3z}{2}(-1,3,2), \qquad p(x,y,z) = (x,y,z) - \frac{x-y+3z}{2}(-1,3,2)}$$

EXERCICE 55 ⋆

1. On calcule $p \circ p = p$, par exemple sur les vecteurs de la base canonique, ce qui suffit par le théorème 4 : $p(e_1) = \dfrac{1}{3}(2,1,1)$ et $p(\dfrac{1}{3}(2,1,1)) = \dfrac{1}{9}(6,3,3) = p(e_1)$, et de même pour e_2 et e_3. L'équation $p(v) = 0$ équivaut à $2x + y + z = 0$ et $x + 2y - z = 0$, d'où $\operatorname{Ker} p = \mathbb{R}(-1,1,1)$; l'équation $p(v) = v$ équivaut à $x - y - z = 0$.

$$\boxed{p \text{ est le projecteur sur le plan } x - y - z = 0 \text{ parallèlement à } \mathbb{R}(-1,1,1).}$$

2. Le calcul donne $f \circ f(x,y,z) = (9x, 9y, 9z)$, donc $(\dfrac{1}{3}f)^2 = \mathrm{id}$: $s = \dfrac{1}{3}f$ est une symétrie (théorème 6). On a $s(v) = v$ si et seulement si $f(v) = 3v$, ce qui équivaut à $x = y$; et $s(v) = -v$ si et seulement si $f(v) = -3v$, ce qui donne $y = -2x$ et $z = x$.

$$\boxed{\tfrac{1}{3}f \text{ est la symétrie par rapport au plan } x = y \text{ parallèlement à } \mathbb{R}(1,-2,1), \qquad f^{-1} = \tfrac{1}{9}f}$$

EXERCICE 56 ⋆⋆

Écrivons $x = y + z$ avec $y \in S_1$ et $z \in S_2$. Alors $p_1(x) = y$, $p_2(x) = z$, $s_1(x) = y - z$ et $s_2(x) = z - y$. On lit directement $p_1 + p_2 = \mathrm{id}$, $p_1(p_2(x)) = p_1(z) = 0$, $p_2(p_1(x)) = 0$, $s_1 + s_2 = 0$, et

$$s_1(s_2(x)) = s_1(z-y) = -z - y = -x, \qquad s_2(s_1(x)) = s_2(y-z) = -y - z = -x.$$

$$\boxed{p_1 + p_2 = \mathrm{id}_E, \quad p_1 p_2 = p_2 p_1 = 0, \quad s_1 = -s_2, \quad s_1 s_2 = s_2 s_1 = -\mathrm{id}_E}$$

EXERCICE 57 ⋆⋆

1. Si $pq = qp$, alors $(pq)^2 = pqpq = ppqq = pq$.

2. On a $(p+q)^2 = p + q + pq + qp$, donc $p + q$ est un projecteur si et seulement si $pq + qp = 0$. Si $pq = qp = 0$, c'est le cas. Réciproquement, si $pq + qp = 0$, en composant par p à gauche puis à droite, on obtient $pq + pqp = 0$ et $pqp + qp = 0$, d'où $pq = qp$, puis $2pq = 0$.

$$\boxed{p + q \text{ projecteur} \iff pq = qp = 0}$$

3. On a $\operatorname{Im}(p+q) \subset \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$. Réciproquement,

$$(p+q)(p(x)) = p(x) + qp(x) = p(x),$$

donc $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im}(p+q)$, et de même pour q. La somme est directe : si $y = p(a) = q(b)$, alors $y = p(y) = pq(b) = 0$. Pour les noyaux, $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker}(p+q)$; si $p(x) = -q(x)$, en appliquant p, $p(x) = -pq(x) = 0$, puis $q(x) = 0$.

$$\boxed{\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q, \qquad \operatorname{Ker}(p+q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q}$$

Piège. La division par 2 est permise parce que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; sans elle, la question 2 serait fausse.

EXERCICE 58 ⋆⋆

1. On a $p = \mathrm{id} - q$, donc $0 = pq = q - q^2$: $q^2 = q$. Ensuite, $p^2 = p(\mathrm{id} - q) = p - pq = p$, et $qp = q(\mathrm{id} - q) = q - q^2 = 0$.

2. Comme $qp = 0$, on a $\mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Ker}\, q$; si $q(x) = 0$, alors $x = p(x) + q(x) = p(x) \in \mathrm{Im}\, p$. De même, $pq = 0$ et $x = p(x) + q(x)$ donnent $\mathrm{Im}\, q = \mathrm{Ker}\, p$.

$$\boxed{p, q \text{ projecteurs}, \quad qp = 0, \quad \mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}\, q, \quad \mathrm{Im}\, q = \mathrm{Ker}\, p}$$

EXERCICE 59 ⋆⋆

1. Par le théorème 5, tout x s'écrit $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Im}\, g$, $g(y) = y$, et $z \in \mathrm{Ker}\, g$. Par stabilité, $f(y) \in \mathrm{Im}\, g$ et $f(z) \in \mathrm{Ker}\, g$, donc

$$g(f(x)) = g(f(y)) + g(f(z)) = f(y) + 0 = f(g(x)).$$

$$\boxed{f \circ g = g \circ f}$$

2. Si g est un automorphisme, $\mathrm{Ker}\, g = \{0\}$ et $\mathrm{Im}\, g = E$ sont stables par tout endomorphisme. Avec $g(x, y) = (y, x)$ et $f(x, y) = (x, 0)$, l'exemple du cours montre que f et g ne commutent pas.

EXERCICE 60 ⋆⋆

1. On a $f \circ (-f) = (-f) \circ f = \mathrm{id}_E$.

$$\boxed{f \in \mathrm{GL}(E), \qquad f^{-1} = -f}$$

2. Les ensembles $F = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{i}\,\mathrm{id})$ et $G = \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{i}\,\mathrm{id})$ sont des sous-espaces. Si $x \in F \cap G$, alors $\mathrm{i}x = -\mathrm{i}x$, donc $x = 0$. Pour $x \in E$, on pose

$$y = \frac{x - \mathrm{i}f(x)}{2}, \qquad z = \frac{x + \mathrm{i}f(x)}{2};$$

alors $y + z = x$, $f(y) = \dfrac{f(x) + \mathrm{i}x}{2} = \mathrm{i}y$ et $f(z) = \dfrac{f(x) - \mathrm{i}x}{2} = -\mathrm{i}z$.

$$\boxed{E = F \oplus G}$$

3. Le calcul précédent donne $p = \dfrac{1}{2}(\mathrm{id} - \mathrm{i}f)$ et $q = \dfrac{1}{2}(\mathrm{id} + \mathrm{i}f)$, donc $p - q = -\mathrm{i}f$.

$$\boxed{f = \mathrm{i}(p - q)}$$

C'est le cas $(\alpha, \beta) = (\mathrm{i}, -\mathrm{i})$ de l'exercice 62. L'hypothèse que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est essentielle : la rotation $(x, y) \mapsto (-y, x)$ de $\mathbb{R}^2$ vérifie aussi $f^2 = -\mathrm{id}$, mais $\mathrm{i}x$ n'a pas de sens dans $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 61 ⋆⋆

Pour $x = \displaystyle\sum_k e_k^*(x) e_k$, la décomposition de x selon $\mathrm{Vect}(e_i) \oplus \mathrm{Vect}(e_j)_{j \neq i}$ est $e_i^*(x) e_i + \displaystyle\sum_{j \neq i} e_j^*(x) e_j$, donc $p_i(x) = e_i^*(x) e_i$. Par conséquent

$$p_i(p_j(x)) = e_j^*(x)\, e_i^*(e_j)\, e_i = \begin{cases} p_i(x) & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases} \qquad \sum_{i=1}^n p_i(x) = \sum_{i=1}^n e_i^*(x) e_i = x.$$

$$\boxed{p_i = e_i^*(\cdot)\, e_i, \qquad p_i p_j = 0 \ (i \neq j), \qquad p_i^2 = p_i, \qquad p_1 + \cdots + p_n = \mathrm{id}_E}$$

EXERCICE 62 ⋆⋆⋆

1. On veut $(a+b)f-(a\alpha+b\beta)\mathrm{id}=\mathrm{id}$, soit $a+b=0$ et $a\alpha+b\beta=-1$: $a=\dfrac{1}{\beta-\alpha}$, $b=\dfrac{1}{\alpha-\beta}$.

$$\boxed{\frac{1}{\beta-\alpha}(f-\alpha\,\mathrm{id})-\frac{1}{\beta-\alpha}(f-\beta\,\mathrm{id})=\mathrm{id}_E}$$

2. Tout x s'écrit $x=(f-\alpha\,\mathrm{id})(ax)+(f-\beta\,\mathrm{id})(bx)$.

3. Les endomorphismes $f-\alpha\,\mathrm{id}$ et $f-\beta\,\mathrm{id}$ commutent, et leur composée est nulle dans les deux ordres : pour tout x,

$$(f-\alpha\,\mathrm{id})((f-\beta\,\mathrm{id})(x))=0 \qquad \text{et} \qquad (f-\beta\,\mathrm{id})((f-\alpha\,\mathrm{id})(x))=0,$$

ce qui donne les deux inclusions (exercice 45).

4. Les questions 2 et 3 donnent $E=\mathrm{Ker}\,(f-\alpha\,\mathrm{id})+\mathrm{Ker}\,(f-\beta\,\mathrm{id})$. Si x est dans l'intersection, $\alpha x=f(x)=\beta x$, donc $x=0$.

$$\boxed{E=\mathrm{Ker}\,(f-\alpha\,\mathrm{id})\oplus\mathrm{Ker}\,(f-\beta\,\mathrm{id})}$$

Pour $(\alpha,\beta)=(0,1)$, l'hypothèse est $f^2=f$ et l'on retrouve le théorème 5 : $E=\mathrm{Ker}\,f\oplus\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{id})$. Pour $(\alpha,\beta)=(1,-1)$, c'est $f^2=\mathrm{id}$ et le théorème 6. Le chapitre consacré à la réduction, en seconde année, généralisera ce lemme à tout polynôme scindé à racines simples.

EXERCICE 63 ⋆⋆⋆

1. C'est le calcul de l'exercice 57 : en composant $pq+qp=0$ par p à gauche puis à droite, on obtient $pq=-pqp=qp$, donc $2pq=0$.

2. On a $(p-q)^2=p-pq-qp+q$, qui vaut $p-q$ si et seulement si $pq+qp=2q$. Si $pq=qp=q$, c'est vrai. Réciproquement, on compose l'égalité $pq+qp=2q$ par q : à gauche, $qpq+qp=2q$, et à droite, $pq+qpq=2q$, d'où $qp=pq$, puis $2pq=2q$.

$$\boxed{p-q \text{ projecteur} \iff pq=qp=q}$$

3. En développant, avec $p^2=p$, $q^2=q$ et $pq=0$,

$$r^2=(p+q-qp)(p+q-qp)=p+qp+q-qp-qp=p+q-qp=r.$$

On a $\mathrm{Im}\,r\subset\mathrm{Im}\,p+\mathrm{Im}\,q$, puisque $r=p+q(\mathrm{id}-p)$. Réciproquement, $rp=p+qp-qp=p$ et $rq=pq+q-qpq=q$, donc $\mathrm{Im}\,p$ et $\mathrm{Im}\,q$ sont contenus dans $\mathrm{Im}\,r$. La somme est directe : si $y=p(a)=q(b)$, alors $y=p(y)=pq(b)=0$. Enfin, $\mathrm{Ker}\,p\cap\mathrm{Ker}\,q\subset\mathrm{Ker}\,r$, et si $r(x)=0$, alors $p(x)=pr(x)=0$, car $pr=p$, puis $q(x)=r(x)-p(x)+qp(x)=0$.

$$\boxed{r \text{ est le projecteur sur } \mathrm{Im}\,p\oplus\mathrm{Im}\,q \text{ parallèlement à } \mathrm{Ker}\,p\cap\mathrm{Ker}\,q.}$$

Formes linéaires et hyperplans

EXERCICE 64 ⋆

1. L'application $\varphi : P \mapsto P(0) + P'(1)$ est une forme linéaire, non nulle puisque $\varphi(1) = 1$. Son noyau H est un hyperplan, et la droite $\mathbb{R}_0[X]$ des constantes n'est pas contenue dans H : par le théorème 7, c'est un supplémentaire.

$$\boxed{\mathbb{R}_n[X] = H \oplus \mathbb{R}_0[X], \qquad P = \big(P - \varphi(P)\big) + \varphi(P)}$$

2. La forme linéaire $f \mapsto f(1) - f(0)$ est non nulle, et vaut 1 en $x \mapsto x$: même conclusion.

3. La seconde équation est -2 fois la première : c'est le même plan (proposition 23). En revanche, $(1, -1, 0)$ n'est pas proportionnel à $(1, 2, -3)$: les plans sont distincts.

$$\boxed{\text{Même plan dans le premier cas, plans distincts dans le second.}}$$

EXERCICE 65 ⋆⋆

1. La forme φ est linéaire par linéarité de l'intégrale, et non nulle puisque $\varphi(\mathbf{1}) = 1$: H est un hyperplan, et $\mathbf{1} \notin H$. Le théorème 7 conclut.

2. La décomposition est $f = (f - \varphi(f)\mathbf{1}) + \varphi(f)\mathbf{1}$.

$$\boxed{p(f) = f - \Big(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\Big)\mathbf{1}}$$

On retranche à f sa valeur moyenne : le projeté est la fonction « centrée ».

3. La forme ψ est non nulle, puisque $\psi(\mathbf{1}) = 1$. La fonction $g : t \mapsto 1 - 2t$ vérifie $\varphi(g) = 0$ et $\psi(g) = 1$: elle est dans $\operatorname{Ker}\varphi$, mais pas dans $\operatorname{Ker}\psi$.

$$\boxed{\operatorname{Ker}\varphi \neq \operatorname{Ker}\psi}$$

EXERCICE 66 ⋆⋆

Si $\varphi = 0$, alors $\operatorname{Ker}\varphi = E \subset \operatorname{Ker}\psi$, donc $\psi = 0 = 0 \cdot \varphi$. Sinon, choisissons a tel que $\varphi(a) \neq 0$ et posons $\lambda = \dfrac{\psi(a)}{\varphi(a)}$. La forme $\psi - \lambda\varphi$ s'annule sur $\operatorname{Ker}\varphi$, par hypothèse, et en a, donc sur $\operatorname{Ker}\varphi \oplus \mathbb{K}a = E$ (théorème 7).

$$\boxed{\psi = \lambda\varphi}$$

La proposition 23 du cours est le cas où les deux noyaux sont égaux ; ici, ψ peut être nulle, et λ aussi.

Sous-espaces affines

EXERCICE 67 ⋆

La direction de $\mathcal{P}$ est le plan vectoriel P d'équation $x + 2y - z = 0$, qui contient $(1, 0, 1)$ mais pas $(1, 1, 1)$. On substitue la représentation paramétrique de chaque droite dans l'équation de $\mathcal{P}$.

- $\mathcal{D}_1$: $(1 + t) + 2 - t = 3$ pour tout t ; la droite est contenue dans le plan.
- $\mathcal{D}_2$: $t - t = 0 \neq 3$; l'intersection est vide.
- $\mathcal{D}_3$: $t + 2(1 + t) - t = 3$, soit $t = \dfrac{1}{2}$; l'intersection est le point $\big(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\big)$.

$$\boxed{\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{P}, \qquad \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{P} = \varnothing, \qquad \mathcal{D}_3 \cap \mathcal{P} = \Big\{\Big(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\Big)\Big\}}$$

Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ont une direction contenue dans P : elles sont parallèles au plan, et la proposition 25 dit que leur intersection avec $\mathcal{P}$ est vide ou égale à la droite entière. La direction de $\mathcal{D}_3$ rencontre P en 0 seulement, d'où une intersection réduite à un point.

EXERCICE 68 ⋆⋆

(i) L'application $\Delta : P \mapsto P(X+1) - P(X)$ est linéaire, de noyau $\mathbb{R}_0[X]$ (exercice 41). Une solution particulière s'obtient en cherchant P de degré 3 : $P_0 = \dfrac{X^3}{3} - \dfrac{X^2}{2} + \dfrac{X}{6}$, ce que l'on vérifie en développant.

$$\boxed{P = \frac{X^3}{3} - \frac{X^2}{2} + \frac{X}{6} + c, \quad c \in \mathbb{R}}$$

(ii) L'application $u \mapsto (u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n)_n$ est linéaire ; son noyau est formé des suites $\lambda + \mu 2^n$ (chapitre 7, l'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$ ayant pour racines 1 et 2). Comme 1 est racine, on cherche une solution particulière de la forme (αn) : $\alpha(n+2) - 3\alpha(n+1) + 2\alpha n = -\alpha = 1$.

$$\boxed{u_n = -n + \lambda + \mu 2^n, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}$$

(iii) L'application $y \mapsto y'' + y$ est linéaire, de noyau $\mathrm{Vect}(\cos, \sin)$, et $x \mapsto x$ est une solution particulière.

$$\boxed{y(x) = x + \lambda \cos x + \mu \sin x}$$

(iv) L'application $P \mapsto (P(0), P(1), P(2))$ est linéaire, de noyau $X(X-1)(X-2)\mathbb{R}[X]$. Le polynôme $(X-1)^2$ est une solution particulière, de degré au plus 2, comme le prévoit le théorème de Lagrange.

$$\boxed{P = (X-1)^2 + X(X-1)(X-2)A, \quad A \in \mathbb{R}[X]}$$

À retenir. Quatre problèmes de natures différentes ont la même structure de solutions : une solution particulière plus le noyau. C'est l'objet du théorème 8.

EXERCICE 69 ⋆⋆

1. Écrivons $\mathcal{A} = a + F$ et $\mathcal{B} = b + G$. On décompose $b - a = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$; alors $a + f = b - g$ appartient aux deux sous-espaces, qui se rencontrent donc. Par la proposition 25, l'intersection est un sous-espace affine de direction $F \cap G = \{0\}$, c'est-à-dire un point.

$$\boxed{\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \text{ est un singleton.}}$$

2. L'existence de la décomposition $b - a = f + g$ n'utilise que $F + G = E$: l'intersection n'est pas vide, et c'est un sous-espace affine de direction $F \cap G$.

$$\boxed{\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = c + (F \cap G) \text{ pour tout } c \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}}$$

Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, deux plans affines de directions distinctes ont pour directions deux plans dont la somme est $\mathbb{R}^3$: ils se coupent selon une droite.

EXERCICE 70 ⋆⋆

1. Faux. Dans $\mathbb{R}^2$, la réunion des deux axes contient $(1,0)$ et $(0,1)$, mais pas $(1,1)$; la proposition 5 dit que la réunion n'est un sous-espace que si l'un des deux contient l'autre.

2. Faux. L'exercice 15 en donne un contre-exemple : $v_3 = v_2 - 2v_1$, alors que les trois couples sont libres.

3. Vrai. Si $(x_i)_{i\in I}$ contient une famille génératrice, son sous-espace engendré contient celui de la sous-famille, qui est E.

4. Faux. Les droites $\mathbb{R}(1,0)$, $\mathbb{R}(0,1)$ et $\mathbb{R}(1,1)$ de $\mathbb{R}^2$ se coupent deux à deux en 0, mais

$$(1,0) + (0,1) - (1,1) = 0$$

est une décomposition non triviale du vecteur nul (remarque suivant la proposition 14).

5. Vrai. Si $\sum \lambda_k u(x_k) = 0$, alors $u(\sum \lambda_k x_k) = 0$, donc $\sum \lambda_k x_k = 0$ par injectivité, et les λ_k sont nuls par liberté.

6. Vrai. C'est l'exercice 45 avec $f = g = u$.

7. Vrai. On a $(\mathrm{id} - p)^2 = \mathrm{id} - 2p + p^2 = \mathrm{id} - p$; c'est le projecteur associé à la même décomposition, avec les rôles échangés (proposition 21).

8. Vrai. Pour tout x, $u(u(x) - x) = u^2(x) - u(x) = 0$, donc $u(x) - x \in \operatorname{Ker} u = \{0\}$.

9. Faux. Si $b \neq 0$, le vecteur nul n'est pas solution : l'ensemble des solutions est vide ou affine (théorème 8), et c'est un sous-espace vectoriel seulement si $b = 0$. Par exemple, $x = 1$ est la seule solution de $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x) = 1$.

10. Vrai. Si $p(x) = 0$, alors $p(u(x)) = u(p(x)) = 0$; si $y = p(x)$, alors $u(y) = p(u(x)) \in \operatorname{Im} p$. C'est l'exercice 45.

Vrai : 3, 5, 6, 7, 8, 10	Faux : 1, 2, 4, 9

EXERCICE 71 ⋆⋆⋆

1. Soit $\varphi : P \mapsto P(X) + P(X+1)$, endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Si P est de degré d et de coefficient dominant a, alors $\varphi(P)$ est de degré d et de coefficient dominant $2a$: φ conserve le degré. La famille $(\varphi(X^k))_{0\leqslant k\leqslant n}$ est donc à degrés échelonnés, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, et la restriction de φ à $\mathbb{R}_n[X]$ est un automorphisme (proposition 10 et théorème 4). Il existe donc un unique $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\varphi(P_n) = 2X^n$; toute solution est de degré n, puisque φ conserve le degré, donc c'est la seule dans $\mathbb{R}[X]$.

$$\boxed{P_n \text{ existe et est unique ; il est unitaire de degré } n.}$$

2. En dérivant l'égalité qui définit P_{n+1}, on obtient $P'_{n+1}(X) + P'_{n+1}(X+1) = 2(n+1)X^n$. Le polynôme $\dfrac{1}{n+1}P'_{n+1}$ vérifie donc la même équation que P_n, et l'unicité donne :

$$\boxed{P'_{n+1} = (n+1)P_n}$$

3. (a) Chaque P_k est de degré k : la famille est à degrés échelonnés, c'est une base de $\mathbb{R}[X]$ (proposition 10).

(b) Les deux membres sont linéaires en Q, la somme étant finie ; il suffit de vérifier l'égalité pour $Q = X^m$. Par la formule du binôme,

$$(X+1)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} X^{m-k} = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\frac{m!}{(m-k)!}X^{m-k} = \sum_{k=0}^{m} \frac{(X^m)^{(k)}}{k!}.$$

(c) En itérant la question 2, $P_n^{(k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!}P_{n-k}$ pour $k \leqslant n$, et $P_n^{(k)} = 0$ pour $k > n$. La question (b) donne alors

$$\boxed{P_n(X+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_{n-k} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} P_j}$$

4. Soit $Q = (-1)^n P_n(1-X)$. L'égalité qui définit P_n, écrite au point $-X$, donne

$$P_n(-X) + P_n(1-X) = 2(-X)^n,$$

donc

$$Q(X) + Q(X+1) = (-1)^n\big(P_n(1-X) + P_n(-X)\big) = (-1)^n \cdot 2(-1)^n X^n = 2X^n.$$

Par unicité, $Q = P_n$.

$$\boxed{P_n(1-X) = (-1)^n P_n(X)}$$

Ce sont, à une normalisation près, les polynômes d'Euler. Par exemple, $P_0 = 1$, $P_1 = X - \dfrac{1}{2}$, $P_2 = X^2 - X$.

EXERCICE 72 ⋆⋆⋆

1. Soit S un supplémentaire de G et $x \in F$. On décompose x selon $E = S \oplus G$: $x = s + g$. Le vecteur $y = -g$ convient. Si y et y' conviennent, $(x+y) - (x+y') = y - y'$ appartient à $S \cap G = \{0\}$.

2. Notons $f(x)$ ce vecteur y. L'unicité montre que f est linéaire : $\lambda x + x' + \lambda f(x) + f(x')$ appartient à S, donc $f(\lambda x + x') = \lambda f(x) + f(x')$. Par construction, $V_f \subset S$. Réciproquement, tout $s \in S$ s'écrit $s = x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$, puisque $E = F \oplus G$; comme $x + y \in S$, on a $y = f(x)$, donc $s \in V_f$. Ainsi $S = V_f$.
Inversement, V_f est un supplémentaire de G pour tout $f \in \mathcal{L}(F,G)$. C'est l'image de l'application linéaire $x \mapsto x + f(x)$, donc un sous-espace ; si $x + f(x) \in G$, alors $x \in G \cap F = \{0\}$; enfin, $V_f + G$ contient F, puisque $x = \big(x + f(x)\big) - f(x)$, et G, donc E. L'unicité de f vient de ce que, si $V_f = V_g$, alors $x + f(x) = x' + g(x')$ impose $x = x'$ et $f(x) = g(x)$, par unicité de la décomposition selon $F \oplus G$.

$$\boxed{\text{Les supplémentaires de } G \text{ sont les } V_f,\ f \in \mathcal{L}(F,G),\ \text{chacun pour un unique } f.}$$

3. L'application $x \mapsto x + f(x)$ est un isomorphisme de F sur V_f, injectif car $x + f(x) = 0$ impose $x = 0$. Tous les supplémentaires de G sont donc isomorphes à F, donc entre eux.
Correction de l'énoncé source. Le TD d'origine parlait des supplémentaires de F ; c'est faux, puisque $V_f \cap F = \operatorname{Ker} f$ n'est pas nul en général.

EXERCICE 73 ⋆⋆⋆

▷ *Le cas $j = 1$.* Montrons par récurrence sur i que $\operatorname{Ker} u^i \cap \operatorname{Ker} v = \{0\}$. C'est vrai pour $i = 0$ et $i = 1$. Si c'est vrai au rang i et si $x \in \operatorname{Ker} u^{i+1} \cap \operatorname{Ker} v$, alors $u(x) \in \operatorname{Ker} u^i$, et $v(u(x)) = u(v(x)) = 0$, donc $u(x) \in \operatorname{Ker} u^i \cap \operatorname{Ker} v = \{0\}$; ainsi $x \in \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v = \{0\}$.

▷ *Le cas général.* Les endomorphismes v et u^i commutent, et $\operatorname{Ker} v \cap \operatorname{Ker} u^i = \{0\}$ d'après l'étape précédente. On applique cette étape au couple (v, u^i), dans lequel v joue le rôle de u :

$$\boxed{\operatorname{Ker}(u^i) \cap \operatorname{Ker}(v^j) = \{0\} \quad \text{pour tous } i, j \in \mathbb{N}}$$

EXERCICE 74 ⋆⋆⋆

Posons $a = u + v$, $b = u - v$ et $c = uv - vu$. Comme $u^2 = v^2 = \mathrm{id}$, on calcule

$$ab = vu - uv = -c, \qquad ba = uv - vu = c, \qquad a^2 + b^2 = 2u^2 + 2v^2 = 4\,\mathrm{id}.$$

On vérifie aussi, en développant, que $ca = -ac$ et $cb = -bc$: par exemple $ca = uvu - vuv + u - v$ et $ac = -uvu + vuv - u + v$.

1. Comme $c = ba = -ab$, on a $\operatorname{Ker} a \subset \operatorname{Ker} c$ et $\operatorname{Ker} b \subset \operatorname{Ker} c$. La somme est directe : si $a(x) = b(x) = 0$, alors $u(x) = 0$, puis $x = u^2(x) = 0$. Soit $x \in \operatorname{Ker} c$; on écrit

$$x = \frac{1}{4}a^2(x) + \frac{1}{4}b^2(x).$$

Or $b(a^2(x)) = c\,a(x) = -a\,c(x) = 0$ et $a(b^2(x)) = -c\,b(x) = b\,c(x) = 0$: le premier terme est dans $\operatorname{Ker} b$, le second dans $\operatorname{Ker} a$.

$$\boxed{\operatorname{Ker}(uv - vu) = \operatorname{Ker}(u + v) \oplus \operatorname{Ker}(u - v)}$$

2. Comme $c = ba = -ab$, on a $\operatorname{Im} c \subset \operatorname{Im} b \cap \operatorname{Im} a$. Réciproquement, soit $y = a(s) = b(t)$. Alors

$$4y = a^2(y) + b^2(y) = a^2b(t) + b^2a(s) = -a\,c(t) + b\,c(s) = c\,a(t) - c\,b(s) \in \operatorname{Im} c.$$

$$\boxed{\operatorname{Im}(uv - vu) = \operatorname{Im}(u + v) \cap \operatorname{Im}(u - v)}$$

EXERCICE 75 ⋆⋆⋆

1. L'application π est linéaire, comme combinaison de composées d'applications linéaires. Si $x \in E$ et $g \in G$, alors $p(g(x)) \in F$, puis $g^{-1}(p(g(x))) \in F$ puisque $g^{-1} \in G$ stabilise F : $\operatorname{Im}\pi \subset F$. Si $y \in F$, alors $g(y) \in F = \operatorname{Im} p$, donc $p(g(y)) = g(y)$, et chaque terme de la somme vaut y : $\pi(y) = y$. Par conséquent $\pi \circ \pi = \pi$ et $\operatorname{Im}\pi = F$. Enfin, pour $h \in G$, l'application $g \mapsto gh$ est une bijection de G (chapitre 11), et

$$\pi \circ h = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} h\,(gh)^{-1}\,p\,(gh) = h \circ \frac{1}{|G|}\sum_{g'\in G} g'^{-1}pg' = h \circ \pi.$$

2. Par le théorème 5, $S = \operatorname{Ker}\pi$ est un supplémentaire de $\operatorname{Im}\pi = F$. Il est stable par tout $h \in G$: si $\pi(x) = 0$, alors $\pi(h(x)) = h(\pi(x)) = 0$ (exercice 45).

$$\boxed{E = F \oplus \operatorname{Ker}\pi, \text{ avec } \operatorname{Ker}\pi \text{ stable par } G.}$$

Remarque. L'énoncé source supposait le corps de caractéristique nulle, pour pouvoir diviser par $|G|$; c'est automatique ici, puisque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

EXERCICE 76 ⋆⋆

1. Le noyau de f est formé des constantes, et f est surjective (exercice 41, ou primitive d'un polynôme). Le noyau de g est $X\mathbb{R}[X]$, et son image est formée des constantes.

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}_0[X], \quad \operatorname{Ker} g = X\mathbb{R}[X], \quad \operatorname{Im} f = \mathbb{R}[X], \quad \operatorname{Im} g = \mathbb{R}_0[X]}$$

2. Tout polynôme s'écrit $P(0) + (P - P(0))$: $\mathbb{R}[X] = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker} g$, et cette somme est directe. La somme $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$ vaut $\mathbb{R}[X]$, mais elle n'est pas directe, puisque $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f$.

$$\boxed{\mathbb{R}[X] = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g, \text{ la seconde somme n'étant pas directe}}$$

EXERCICE 77 ⋆⋆⋆

1. Pour λ, $\mu \in \mathbb{C}$, la distributivité de la composition dans l'anneau $\mathcal{L}(E)$ (proposition 20), et le fait que f commute avec id_E, donnent

$$(f - \lambda\,\mathrm{id}_E) \circ (f - \mu\,\mathrm{id}_E) = f^2 - (\lambda + \mu)f + \lambda\mu\,\mathrm{id}_E.$$

Cette expression est symétrique en λ et μ : les deux facteurs commutent. Le cas $(\lambda, \mu) = (b, c)$ est la formule demandée.

2. Soit $L_a = \dfrac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)}$, et L_b, L_c les deux autres polynômes de Lagrange. Le polynôme $L_a + L_b + L_c$ est de degré au plus 2 et vaut 1 en a, b et c ; le polynôme constant 1 aussi, donc ils sont égaux par l'unicité du théorème 13 du chapitre 13. Écrivons $L_a = \alpha_a X^2 + \beta_a X + \gamma_a$, et de même pour L_b et L_c. La question 1 donne $p_a = \alpha_a f^2 + \beta_a f + \gamma_a\,\mathrm{id}_E$, et de même pour p_b et p_c ; en sommant, et en identifiant les coefficients de $L_a + L_b + L_c = 1$, on obtient

$$p_a + p_b + p_c = 0 \cdot f^2 + 0 \cdot f + 1 \cdot \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E.$$

$$\boxed{p_a + p_b + p_c = \mathrm{id}_E}$$

3. Grâce à la commutation des facteurs, l'hypothèse s'écrit

$$(f - a\,\mathrm{id}_E) \circ p_a = \frac{(f - a\,\mathrm{id}_E) \circ (f - b\,\mathrm{id}_E) \circ (f - c\,\mathrm{id}_E)}{(a-b)(a-c)} = 0,$$

donc $\mathrm{Im}\,p_a \subset \mathrm{Ker}\,(f - a\,\mathrm{id}_E) = E_a$. Si $x \in E_a$, alors $f(x) = ax$, donc $(f - c\,\mathrm{id}_E)(x) = (a-c)x$, puis $(f - b\,\mathrm{id}_E)((a-c)x) = (a-b)(a-c)x$: ainsi $p_a(x) = x$. Si $x \in E_c$, le facteur $f - c\,\mathrm{id}_E$, appliqué en premier, annule x ; si $x \in E_b$, on écrit p_a avec le facteur $f - b\,\mathrm{id}_E$ en premier, ce que permet la question 1. Dans les deux cas, $p_a(x) = 0$.

4. Les résultats de la question 3 valent pour p_b et p_c, en permutant les rôles. Tout $x \in E$ s'écrit

$$x = p_a(x) + p_b(x) + p_c(x) \in E_a + E_b + E_c.$$

La somme est directe : si $x_a + x_b + x_c = 0$ avec $x_\lambda \in E_\lambda$, l'application de p_a donne $x_a + 0 + 0 = 0$, et de même $x_b = x_c = 0$ (proposition 14). Enfin, pour $x = x_a + x_b + x_c$, le même calcul donne $p_a(x) = x_a$.

$$\boxed{E = E_a \oplus E_b \oplus E_c,\ \text{et } p_a \text{ est le projecteur sur } E_a \text{ parallèlement à } E_b \oplus E_c.}$$

Piège. L'hypothèse ne dit pas que l'un des trois facteurs est nul : l'anneau $\mathcal{L}(E)$ n'est pas intègre (exemples suivant la proposition 20). Ce sont les noyaux, et non les facteurs, qui portent l'information.
À retenir. Les projecteurs associés à la décomposition sont des polynômes en f, obtenus en remplaçant X par f dans les polynômes de Lagrange. L'exercice 62 est le cas de deux facteurs, où $p_\alpha = \dfrac{f - \beta\,\mathrm{id}_E}{\alpha - \beta}$.

5. (a) L'ensemble F est le noyau de l'application linéaire $u \mapsto (u_{n+3} - u_{n+1} - 6u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ dans lui-même, donc un sous-espace. L'application T est linéaire, et si $u \in F$, la suite $v = T(u)$ vérifie

$$v_{n+3} = u_{n+4} = u_{n+2} + 6u_{n+1} = v_{n+1} + 6v_n,$$

donc $T(F) \subset F$. Le polynôme $X^3 - X - 6$ s'annule en 2, et la division euclidienne donne

$$X^3 - X - 6 = (X-2)(X^2 + 2X + 3) = (X-2)(X-r)(X-\bar{r}), \qquad r = -1 + \mathrm{i}\sqrt{2},$$

le discriminant de $X^2 + 2X + 3$ valant -8. Les trois racines 2, r, $\bar{r}$ sont distinctes.

(b) Pour $u \in F$, on a $T^3(u) - T(u) - 6u = (u_{n+3} - u_{n+1} - 6u_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0$. En développant comme à la question 1, l'endomorphisme $(T - 2\,\mathrm{id}) \circ (T - r\,\mathrm{id}) \circ (T - \bar{r}\,\mathrm{id})$ a les coefficients du polynôme

$$(X-2)(X-r)(X-\bar{r}) = X^3 - X - 6 :$$

c'est l'endomorphisme nul de F. La question 4 s'applique, avec $(a,b,c)=(2,r,\bar r)$. Pour $\lambda\in\{2,r,\bar r\}$, une suite $u\in F$ appartient à $\operatorname{Ker}(T-\lambda\,\mathrm{id})$ si et seulement si $u_{n+1}=\lambda u_n$ pour tout n, c'est-à-dire si $u=u_0(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$; réciproquement, la suite (λ^n) appartient à F, puisque

$$\lambda^{n+3}-\lambda^{n+1}-6\lambda^n=\lambda^n(\lambda^3-\lambda-6)=0.$$

Ainsi

$$F=\operatorname{Vect}\big((2^n)\big)\oplus\operatorname{Vect}\big((r^n)\big)\oplus\operatorname{Vect}\big((\bar r^n)\big),$$

et une somme directe de droites engendrées par des vecteurs non nuls correspond à une famille libre (remarques suivant la proposition 14).

$$\boxed{\big((2^n)_{n\in\mathbb{N}},\ (r^n)_{n\in\mathbb{N}},\ (\bar r^n)_{n\in\mathbb{N}}\big)\text{ est une base de }F,\quad r=-1+\mathrm{i}\sqrt{2}.}$$

(c) Une suite de F est déterminée par ses trois premiers termes, par récurrence. La suite v de terme général $v_n=2^n+r^n+\bar r^n$ appartient à F, et, comme $r+\bar r=-2$ et $r\bar r=3$,

$$v_0=3,\qquad v_1=2+(r+\bar r)=0,\qquad v_2=4+(r+\bar r)^2-2r\bar r=4+4-6=2.$$

$$\boxed{u_n=2^n+(-1+\mathrm{i}\sqrt{2})^n+(-1-\mathrm{i}\sqrt{2})^n=2^n+2\operatorname{Re}\big((-1+\mathrm{i}\sqrt{2})^n\big)}$$

Ces nombres sont des entiers, comme le montre la récurrence : $3,0,2,18,2,30,110,42,\dots$ On a deviné les coordonnées $(1,1,1)$ en remarquant que 3, 0 et 2 sont le nombre de racines de X^3-X-6, leur somme et la somme de leurs carrés ; l'unicité des coordonnées dans une base garantit qu'il n'y a pas d'autre réponse.

6. (a) L'ensemble S est le noyau de l'application linéaire $y\mapsto y'''-y''+2y$, de $\mathcal{C}^3(\mathbb{R},\mathbb{C})$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, donc un sous-espace. Si $y\in S$, alors $y'''=y''-2y$ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc y est de classe $\mathcal{C}^4$, et y' est de classe $\mathcal{C}^3$, avec

$$(y')'''-(y')''+2y'=(y'''-y''+2y)'=0.$$

Donc $D(S)\subset S$, et D est linéaire.

(b) Le polynôme X^3-X^2+2 s'annule en -1, et

$$X^3-X^2+2=(X+1)(X^2-2X+2)=(X+1)\big(X-(1+\mathrm{i})\big)\big(X-(1-\mathrm{i})\big).$$

Sur S, on a $D^3-D^2+2\,\mathrm{id}=0$, et le développement de la question 1 montre que

$$(D+\mathrm{id})\circ\big(D-(1+\mathrm{i})\mathrm{id}\big)\circ\big(D-(1-\mathrm{i})\mathrm{id}\big)=0.$$

Pour $\lambda\in\{-1,1+\mathrm{i},1-\mathrm{i}\}$, une fonction $y\in S$ vérifie $D(y)=\lambda y$ si et seulement si $y'-\lambda y=0$, c'est-à-dire si y est de la forme $x\mapsto K\mathrm{e}^{\lambda x}$ (théorème 2 du chapitre 6) ; réciproquement, $e_\lambda : x\mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ appartient à S, puisque $e_\lambda'''-e_\lambda''+2e_\lambda=(\lambda^3-\lambda^2+2)e_\lambda=0$. La question 4 donne $S=\mathbb{C}e_{-1}\oplus\mathbb{C}e_{1+\mathrm{i}}\oplus\mathbb{C}e_{1-\mathrm{i}}$, et, comme en 5(b) :

$$\boxed{\big(x\mapsto\mathrm{e}^{-x},\ x\mapsto\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x},\ x\mapsto\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x}\big)\text{ est une base de }S.}$$

(c) Soit $y=Ae_{-1}+Be_{1+\mathrm{i}}+Ce_{1-\mathrm{i}}$ une solution à valeurs réelles. Sa conjuguée

$$\bar y=\bar Ae_{-1}+\bar Ce_{1+\mathrm{i}}+\bar Be_{1-\mathrm{i}}$$

est égale à y ; l'unicité des coordonnées donne $A\in\mathbb{R}$ et $C=\bar B$. En écrivant $B=\dfrac{\beta-\mathrm{i}\gamma}{2}$, avec β, γ réels,

$$Be_{1+\mathrm{i}}(x)+\bar Be_{1-\mathrm{i}}(x)=2\operatorname{Re}\big(B\,\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\big)=\mathrm{e}^x(\beta\cos x+\gamma\sin x).$$

Réciproquement, ces fonctions sont des solutions réelles.

$$\boxed{y(x)=\alpha\,\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x(\beta\cos x+\gamma\sin x),\qquad(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3}$$

À retenir. Le chapitre 6 ne traitait que les équations d'ordre 1 et 2 : la décomposition en noyaux ramène ici une équation d'ordre 3 à trois équations d'ordre 1. C'est le même calcul que pour les suites, la dérivation jouant le rôle du décalage T, et les exponentielles celui des suites géométriques. Le chapitre 15 dira que F et S sont de dimension 3.

EXERCICE 78 ⋆⋆⋆

1. L'ensemble F est le noyau de l'application linéaire $u \mapsto (3u_{n+3} - u_n - u_{n+1} - u_{n+2})_{n\in\mathbb{N}}$, donc un sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; une suite constante égale à k vérifie la relation, puisque $3k = k + k + k$. L'application $\Phi : u \mapsto (u_0, u_1, u_2)$ est linéaire. Elle est injective : si $u_0 = u_1 = u_2 = 0$, une récurrence forte donne $u_n = 0$ pour tout n. Elle est surjective : pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, la suite définie par $u_0 = x$, $u_1 = y$, $u_2 = z$ et la relation de récurrence appartient à F.

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \text{ et } \Phi \text{ est un isomorphisme de } F \text{ sur } \mathbb{R}^3.}$$

2. Posons $w_n = u_n + 2u_{n+1} + 3u_{n+2}$. En remplaçant $3u_{n+3}$ par $u_n + u_{n+1} + u_{n+2}$, on obtient

$$w_{n+1} = u_{n+1} + 2u_{n+2} + (u_n + u_{n+1} + u_{n+2}) = u_n + 2u_{n+1} + 3u_{n+2} = w_n.$$

La suite (w_n) est constante, et $\varphi(u) = w_0 = u_0 + 2u_1 + 3u_2$, qui dépend linéairement de u. Pour la suite constante $\mathbf{1}$ égale à 1, on trouve $\varphi(\mathbf{1}) = 6$.

$$\boxed{\varphi(u) = u_0 + 2u_1 + 3u_2 \text{ est une forme linéaire non nulle sur } F.}$$

3. L'hyperplan $H = \operatorname{Ker}\varphi$ ne contient pas $\mathbf{1}$, puisque $\varphi(\mathbf{1}) = 6 \neq 0$; le théorème 7 donne $F = H \oplus \mathbb{R}\mathbf{1}$, et sa démonstration fournit la décomposition

$$u = \Big(u - \frac{\varphi(u)}{6}\,\mathbf{1}\Big) + \frac{\varphi(u)}{6}\,\mathbf{1}.$$

$$\boxed{F = H \oplus C, \text{ et le projeté de } u \text{ sur } C \text{ est la suite constante égale à } \frac{u_0 + 2u_1 + 3u_2}{6}.}$$

4. Une suite $u \in H$ vérifie $u_n + 2u_{n+1} + 3u_{n+2} = \varphi(u) = 0$ pour tout n, c'est-à-dire

$$u_{n+2} = -\frac{2}{3}\,u_{n+1} - \frac{1}{3}\,u_n.$$

C'est une récurrence linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $3r^2 + 2r + 1 = 0$. Son discriminant vaut -8, et ses racines $\dfrac{-1 \pm \mathrm{i}\sqrt{2}}{3}$ sont conjuguées, de module $\rho = \dfrac{\sqrt{1+2}}{3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Par le théorème 11 du chapitre 7, il existe θ et des réels λ, μ tels que $u_n = \rho^n(\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta))$, d'où

$$|u_n| \leqslant \Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)^n (|\lambda| + |\mu|) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

$$\boxed{\text{Toute suite de } H \text{ tend vers } 0.}$$

5. Par la question 3, toute suite $u \in F$ s'écrit $u = \ell\,\mathbf{1} + h$, avec $\ell = \dfrac{\varphi(u)}{6}$ et $h \in H$; la question 4 donne $u_n = \ell + h_n \to \ell$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{u_0 + 2u_1 + 3u_2}{6}}$$

Pour $(u_0, u_1, u_2) = (0, 0, 1)$, la limite vaut $\dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$, ce que confirme le calcul des termes.

Piège. L'erreur la plus répandue est de penser que la limite est la moyenne $\dfrac{u_0 + u_1 + u_2}{3}$ des trois premiers termes, qui vaudrait ici $\dfrac{1}{3}$. Les termes récents pèsent davantage, avec les poids 1, 2, 3.

À retenir. Une quantité conservée par la récurrence est une forme linéaire φ ; la limite, elle aussi linéaire en u, s'annule exactement sur $\operatorname{Ker}\varphi$, et la proposition 23 confirme qu'elle est proportionnelle à φ. Calculer la limite revient à projeter sur la droite des suites constantes parallèlement à H, comme l'exercice 65 projetait sur une droite parallèlement à un hyperplan. Pour $u_{n+2} = \dfrac{u_n + u_{n+1}}{2}$, le même raisonnement, avec la quantité conservée $u_n + 2u_{n+1}$, donne la limite $\dfrac{u_0 + 2u_1}{3}$.

EXERCICE 79 ⋆⋆⋆

1. Soit p, q rationnels tels que $p+q\sqrt{2}=0$. Si q était non nul, $\sqrt{2}=-\dfrac{p}{q}$ serait rationnel, ce qui est faux ; donc $q=0$, puis $p=0$. En revanche, $\sqrt{2}\cdot 1-1\cdot\sqrt{2}=0$ est une relation de dépendance à coefficients réels non nuls.

$$\boxed{(1,\sqrt{2}) \text{ est libre sur } \mathbb{Q} \text{ et liée sur } \mathbb{R}.}$$

Comme pour la famille $(1,\mathrm{i})$ dans le cours, la liberté dépend du corps des scalaires.

2. Soit x, y réels et r rationnel. En complétant par des coefficients nuls, on écrit x et y sur une même sous-famille finie $(e_i)_{i\in J}$ de la base, contenant $\sqrt{2}$: $x=\sum_{i\in J}x_ie_i$ et $y=\sum_{i\in J}y_ie_i$. Alors $rx+y=\sum_{i\in J}(rx_i+y_i)e_i$, et l'unicité de l'écriture donne $\lambda(rx+y)=r\lambda(x)+\lambda(y)$. C'est l'argument qui montre, dans le cours, que les formes coordonnées sont linéaires. L'écriture $1=1\cdot 1$ donne $\lambda(1)=0$, et $\sqrt{2}=1\cdot\sqrt{2}$ donne $\lambda(\sqrt{2})=1$.

$$\boxed{\lambda \text{ est } \mathbb{Q}\text{-linéaire}, \quad \lambda(1)=0, \quad \lambda(\sqrt{2})=1}$$

3. Pour tout réel x, l'additivité de λ donne

$$g(x+1)=\sqrt{2}(\lambda(x)+\lambda(1))=g(x) \qquad \text{et} \qquad h(x+\sqrt{2})=x+\sqrt{2}-\sqrt{2}(\lambda(x)+1)=h(x).$$

Comme $x=g(x)+h(x)$ par définition :

$$\boxed{\text{la fonction } x\mapsto x \text{ est la somme de } g,\ 1\text{-périodique, et de } h,\ \sqrt{2}\text{-périodique.}}$$

4. La fonction $g=\sqrt{2}\,\lambda$ est $\mathbb{Q}$-linéaire. Supposons-la continue en un point x_0. Pour tout réel y_0 et tout réel y, l'additivité donne

$$g(y)=g(y-y_0+x_0)+g(y_0)-g(x_0);$$

lorsque y tend vers y_0, le réel $y-y_0+x_0$ tend vers x_0, donc $g(y)$ tend vers $g(y_0)$: g est continue en tout point. Soit alors t réel, et (r_n) une suite de rationnels de limite t (proposition 12 du chapitre 7). Comme $g(r_n)=r_ng(1)=0$, la caractérisation séquentielle de la continuité (théorème 7 du chapitre 8) donne $g(t)=0$. C'est faux pour $t=\sqrt{2}$, puisque $g(\sqrt{2})=\sqrt{2}$.

$$\boxed{g \text{ n'est continue en aucun point de } \mathbb{R}.}$$

La fonction $h=\mathrm{id}_{\mathbb{R}}-g$ n'est donc continue en aucun point non plus.

5. Soit φ une fonction continue et T-périodique, avec $T>0$. Elle est bornée sur le segment $[0,T]$ (théorème 10 du chapitre 8), par un réel M. Pour tout réel x, le réel $x'=x-\lfloor\dfrac{x}{T}\rfloor T$ appartient à $[0,T[$, et $\varphi(x)=\varphi(x')$ par périodicité, puisque $x-x'$ est un multiple entier de T, donc $|\varphi(x)|\leqslant M$: φ est bornée sur $\mathbb{R}$. Si $x\mapsto x$ était la somme de deux fonctions périodiques continues, elle serait bornée, ce qui est faux.

$$\boxed{x\mapsto x \text{ n'est pas la somme de deux fonctions périodiques continues.}}$$

Piège. Il est tentant de croire qu'une somme de fonctions périodiques reste bornée, ou du moins « oscille » : c'est vrai pour des fonctions continues, et la question 5 montre que la décomposition de la question 3 ne peut pas l'être. La continuité n'est pas un détail, c'est elle qui interdit les monstres.
À retenir. Le même ensemble $\mathbb{R}$ porte deux structures d'espace vectoriel très différentes. Les applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les $x\mapsto kx$; il existe bien d'autres applications $\mathbb{Q}$-linéaires, comme λ, mais le raisonnement de la question 4 montre que les seules qui soient continues sont encore les $x\mapsto kx$.

Les six derniers exercices sont des problèmes en autonomie ; le corrigé commence par l'idée directrice.

EXERCICE 80 ⋆⋆⋆⋆

Idée. Deux vecteurs de E dont les premières coordonnées coïncident sont égaux, puisque leur différence a une coordonnée nulle.
Si $E = \{0\}$, on prend $v = 0$. Sinon, soit $v \in E$ non nul ; sa première coordonnée v_1 est non nulle. Pour $x \in E$, le vecteur $x - \dfrac{x_1}{v_1} v$ appartient à E et a une première coordonnée nulle, donc il est nul.

$$\boxed{E = \mathrm{Vect}(v)}$$

EXERCICE 81 ⋆⋆⋆⋆

Idée. On décompose un vecteur de G selon $F + H$, et l'on montre que sa composante dans H est en fait dans F.
Soit $g \in G \subset G + H = F + H$: $g = f + h$ avec $f \in F$ et $h \in H$. Alors $h = g - f \in G$, puisque $F \subset G$, donc $h \in G \cap H = F \cap H \subset F$, et $g = f + h \in F$. Ainsi $G \subset F$, et $F = G$.

$$\boxed{F = G}$$

Sans l'hypothèse $F \subset G$, c'est faux : dans $\mathbb{R}^2$, avec $H = \mathbb{R}(1,0)$, $F = \mathbb{R}(0,1)$ et $G = \mathbb{R}(1,1)$, on a $F + H = G + H = \mathbb{R}^2$ et $F \cap H = G \cap H = \{0\}$, mais $F \neq G$. C'est l'exemple des supplémentaires non uniques.

EXERCICE 82 ⋆⋆⋆⋆

Idée. Une relation de dépendance $\sum \lambda_k f^k = 0$ dit que f prend ses valeurs parmi les racines d'un polynôme non nul ; une fonction continue qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs est constante.
Si f est constante égale à c, alors $f^1 - cf^0 = 0$ est une relation de dépendance, f^0 étant la fonction constante 1. Réciproquement, si $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} \lambda_k f^k = 0$ avec des λ_k non tous nuls, le polynôme non nul $P = \sum \lambda_k X^k$ vérifie $P(f(x)) = 0$ pour tout x : l'image $f(\mathbb{R})$ est contenue dans l'ensemble fini des racines de P. Or $f(\mathbb{R})$ est un intervalle, par le théorème des valeurs intermédiaires (chapitre 8) ; un intervalle fini est réduit à un point.

$$\boxed{(f^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est liée si et seulement si } f \text{ est constante.}}$$

EXERCICE 83 ⋆⋆⋆⋆

Idée. Une racine carrée de D commute avec D, donc stabilise son noyau, et l'on suit l'effet de f sur 1 et sur X.
Supposons $f \circ f = D$. Alors $f \circ D = f^3 = D \circ f$, donc f stabilise $\operatorname{Ker} D = \mathbb{R}_0[X]$ (exercice 45) : $f(1) = c$ est une constante. Comme $D(1) = 0$, on a $0 = f(f(1)) = c\,f(1) = c^2$, donc $f(1) = 0$. Ensuite, $D(f(X)) = f^3(X) = f(D(X)) = f(1) = 0$, donc $f(X)$ est une constante c'. Mais alors $1 = D(X) = f(f(X)) = c' f(1) = 0$, ce qui est absurde.

$$\boxed{\text{Aucun endomorphisme } f \text{ de } \mathbb{R}[X] \text{ ne vérifie } f \circ f = D.}$$

EXERCICE 84 ⋆⋆⋆⋆

Idée. On détermine l'indice N grâce à la suite $w = (n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis l'on perturbe une suite u quelconque en $u + tw$: pour presque toute valeur de t, le seul terme possible est celui d'indice N.

▷ *Un lemme.* Aucune suite réelle $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne prend toutes les valeurs réelles. On construit des segments emboîtés $I_0 \supset I_1 \supset \cdots$, de longueurs tendant vers 0, tels que $t_k \notin I_k$: on part de $I_{-1} = [0, 1]$, et l'on choisit pour I_k l'un des tiers extrêmes de I_{k-1} qui ne contient pas t_k. Les suites des extrémités sont adjacentes (chapitre 7) ; leur limite commune appartient à tous les I_k, donc n'est égale à aucun t_k.

▷ *L'indice N.* Le réel $\varphi(w)$ est un terme de w, donc un entier N.

▷ *Conclusion.* Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Pour tout réel t, il existe un indice k tel que

$$\varphi(u) + tN = \varphi(u + tw) = u_k + tk.$$

Pour $k \neq N$, cette égalité n'a lieu que pour $t = t_k = \dfrac{\varphi(u) - u_k}{k - N}$. Par le lemme, il existe un réel t différent de tous les t_k ; pour ce t, l'indice k vaut nécessairement N, et l'égalité devient $\varphi(u) = u_N$.

$$\boxed{\varphi(u) = u_N \text{ pour toute suite } u, \text{ avec } N = \varphi((n)_{n\in\mathbb{N}})}$$

EXERCICE 85 ⋆⋆⋆⋆

Idée. Si g est un pseudo-inverse, $e = f \circ g$ est un projecteur, d'image $\operatorname{Im} f$ et de noyau $\operatorname{Ker} f$; inversement, une décomposition $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ permet d'inverser f sur $\operatorname{Im} f$.

▷ *Unicité.* Soit g et g' deux pseudo-inverses, et $e = fg$, $e' = fg'$. En utilisant $fgf = f$ et les commutations, $e'e = (fg'f)g = fg = e$, et aussi $e'e = g'(fgf) = g'f = e'$. Donc $e = e'$, puis

$$g = gfg = ge = ge' = gfg' = eg' = e'g' = g'fg' = g'.$$

▷ *Cas d'un automorphisme et d'un projecteur.* Si $f \in \mathrm{GL}(E)$, $g = f^{-1}$ convient. Si f est un projecteur, $g = f$ convient, puisque $f^3 = f$.

▷ *Condition nécessaire.* Si g est un pseudo-inverse, $e = fg = gf$ vérifie $e^2 = (fgf)g = e$. On a $\operatorname{Im} e \subset \operatorname{Im} f$ et $f = fgf = ef$, donc $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} e$; de même $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(gf) = \operatorname{Ker} e$ et, si $e(x) = 0$, $f(x) = fgf(x) = f(e(x)) = 0$. Ainsi $\operatorname{Im} e = \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} e = \operatorname{Ker} f$, et le théorème 5 donne $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

▷ *Condition suffisante.* Supposons $E = K \oplus I$, avec $K = \operatorname{Ker} f$ et $I = \operatorname{Im} f$. L'image $f(I)$ est contenue dans I ; la restriction $f_I : I \to I$ est injective, puisque $K \cap I = \{0\}$, et surjective, puisque $f(k + i) = f(i)$. Soit g l'endomorphisme nul sur K et égal à f_I^{-1} sur I (proposition 19). On vérifie les trois relations séparément sur K, où tout est nul, et sur I, où $fg = gf = \mathrm{id}_I$.

▷ *Seconde caractérisation.* Par l'exercice 49, $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ équivaut à $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

$$\boxed{f \text{ pseudo-inversible} \iff E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f \iff (\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \text{ et } \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2)}$$

Le pseudo-inverse d'un automorphisme est son inverse, celui d'un projecteur est le projecteur lui-même.